Р. МӘММӘДОВ

АЛИ РИЈАЗИЈЈАТ КУРСУ

II

МААРИФ · 1981

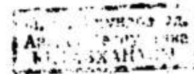
Р. МӘММӘДОВ
ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛӘРИ ДОКТОРУ, ПРОФЕССОР

АЛИ РИЈАЗИЈЈАТ КУРСУ

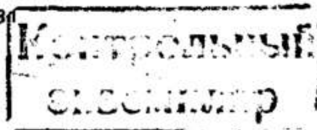
II

ДӘРСЛИК

АЗӘРБАЈҸАН ССР АЛИ ВӘ ОРТА
ИХТИСАС ТӘҺСИЛИ НАЗИРЛИЈИ ТӘРӘФИНДӘН
ТӘСДИГ ЕДИЛМИШДИР



„МААРИФ" НӘШРИЈЈАТЫ
Бакы — 198



517—1
М—42

Али ријазијјат курсунун јени програмы әсасында јазылмыш бу дәрслијин I чилди 1978-чи илдә бурахылмышдыр.

Дәрслијин II чилдиндә бирдәјишәнли функсијаларын интеграл һесабы, чохдәјишәнли функсијаларын диференсиал һесабы, ади диференсиал тәнликләр системи, дајаныглыг нәзәријјәсинин елементләри, әдәди вә функсионал сыралар, Фурје сырасы вә абстракт Һилберт фәзасында ортонормал функсијалар системи үзрә сыралар нәзәријјәси шәрһ едилир.

Али техники мәктәбләрин тәләбәләри үчүн јазылмыш бу дәрсликдән педагожи институтларын вә университетин тәләбәләри дә истифадә едә биләрләр.

Дәрслијә Азәрбајчан Иншаат Мүһәндисләри Институтунун «Али ријазијјат» кафедрасы рә'ј вермишдир.

Елми редактору **А. Бабајев**

Азәрбајчан ССР ЕА-нын мүхбир үзвү, профессор

60602—200
М—652 128—81 1702050000

III ҺИССӘ

БИРДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛ ҺЕСАБЫ

XXI ФӘСИЛ

ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛ

§ 1. ИБТИДАИ ФУНКСИЈА ВӘ ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ТӘ'РИФИ

Диференсиал һесабында верилмиш функсијанын төрәмәсини (вә ја диференсиалыны) тапмагла мәшғул олурлар. Функсијанын төрәмәси верилдикдә онун өзүнү тапмаг мәсәләси исә интеграл һесабында өјрәнилир.

Интеграл һесабы мәсәләләринин тәдгигинә кечмәздән әввәл ибтидаи функсија анлајышы илә таныш олаг.

Фәрз едәк ки, $f(x)$ вә $F(x)$ һәр һансы $[a, b]$ парчасында (парча әвәзинә интервал, јарыминтервал вә с. дә көтүрмәк олар) тә'јин олунмуш функсијалардыр.

Тә'риф. *$[a, b]$ парчасынын бүтүн нөгтәләриндә*

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

вә ја

$$dF(x) = f(x)dx \qquad (2)$$

бәрабәрлији өдәнилирсә, онда $F(x)$ функсијасына $f(x)$-ин $[a, b]$ парчасында ибтидаи функсијасы дејилир.

Ајдындыр ки, $F(x)$ функсијасы $f(x)$-ин ибтидаи функсијасыдырса, онда C ихтијари сабит әдәд олдугда $F(x)+C$ функсијасы да һәмин $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијасы олар. Доғрудан да, (1) бәрабәрлијинә көрә:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x).$$

Бурадан нәтичә олараг чыхыр ки, әкәр $f(x)$ функсијасынын бир $F(x)$ ибтидаи функсијасы вардырса, онда $F(x)+C$ (C ихтијари сабитдир) шәклиндә олан сонсуз сајда бүтүн функсијалар да һәмин функсијанын ибтидаи функсијасыдыр. Белә бир суал гаршыја чыхыр: $F(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында $f(x)$-ин ибтидаи функсијасы олдугда C сабитинә ихтијари гијмәтләр вермәклә $F(x)+C$ ифадәсиндән $f(x)$-ин бүтүн ибтидаи

функсиjаларыны алмаг олармы? Бу суала ашағыдакы садә теорем чаваб верир.

Теорем. *$f(x)$ функсиjасынын ихтиjари ики $F(x)$ вә $\Phi(x)$ ибтидаи функсиjасы бир-бириндән сабит әдәдлә фәргләнир:*

$$\Phi(x) = F(x) + C. \qquad (3)$$

Доғрудан да, $[a, b]$ парчасынын ихтиjари x нөгтәсиндә өдәнилән

$$F'(x) = f(x)$$

вә

$$\Phi'(x) = f(x)$$

бәрабәрликләриндән

$$[\Phi(x) - F(x)]' = 0$$

мүнасибәти алыныр. Бурадан (XVII, § 1) алырыг ки,

$$\Phi(x) - F(x) = C$$

вә jа (3) бәрабәрлиjи доғрудур (C ихтиjари сабитдир).

Бу теорем көстәрир ки, $F(x)$ функсиjасы $f(x)$-ин һәр һансы ибтидаи функсиjасыдырса, онда онун бүтүн ибтидаи функсиjалары $\{F(x)+C\}$ чохлуғуна дахилдир.

Тә'риф. $f(x)$ функсиjасынын $[a, b]$ парчасында бүтүн ибтидаи функсиjалары чохлуғуна $f(x)$ функсиjасынын һәмин парчада гејри-муәjjән интегралы дејилир вә

$$\int f(x)\,dx \qquad (4)$$

кими ишарә олунур.

Демәли, $F(x)$ функсиjасы $f(x)$-ин һәр һансы ибтидаи функсиjасыдырса, онда

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}.$$

Бу бәрабәрлиjи һәмишә

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (5)$$

кими jазырлар. Бурада $f(x)$ *интегралалты функсиjа*, $f(x)\,dx$ исә *интегралалты ифадә* адланыр.

Мисал 1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ функсиjасы $f(x) = x$ функсиjасынын ибтидаи функсиjасы олдуғундан,

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Мисал 2. $F(x) = -\cos x$ функсиjасы $f(x) = \sin x$ функсиjасынын ибтидаи функсиjасы олдуғундан

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Интеграл ишарәсинда тәкчә интегралалты $f(x)$ функсиjасыны jазмаjыб, $f(x)\,dx$ шәклиндә интегралалты ифадәни jазмағын әсас сәбәби одур ки, белә jаздыгда интегралын һансы дәjишәнә көрә көтүрүлмәси аjдын олур. Мәсәлән, y^2x^3

функсиjасынын x вә y дәjишәнләринә көрә интеграллары мүхтәлифдир:

$$\int x^3y^2dy = \frac{x^3y^3}{3} + C, \quad \int y^2x^3dx = \frac{y^2x^4}{4} + C.$$

Буна көрә дә y^2x^3 функсиjасы интегралынын һансы дәjишәнә көрә көтүрүлдүjү көстәрилмәлидир.

Һәндәси олараг (4) гејри-муәjjән интегралы бирпараметрли $y = F(x) + C$ мүстәви әjриләри (C параметрдир) аиләсиндән ибарәтдир. Бу аиләнин һәр бир әjриси дикәриндән Oy оху истигамәтиндә өзүнә парален олараг jухары вә jа ашағы көчүрмәклә алыныр. Бу әjриләрә *интеграл әjриләри* дејилир.

Интеграл әjриләринин белә бир хассәси вардыр ки, онларын һәр биринә абсисләри ejни $x = x_0$ әдәди олан нөгтәләрдә чәкилмиш тохунанлар бир-биринә паралелдир вә онларын һамысынын бучаг әмсалы

$$[F(x) + C]'_{x=x_0} = F'(x_0) = f(x_0)$$

әдәдинә бәрабәрдир. Интеграл әjриләри кәсишмир вә бир-биринә тохунмур. Мүстәвинин, абсиси $[a, b]$ парчасына дахил олан һәр бир нөгтәсиндән анчаг бир интеграл әjриси кечир.

Верилмиш функсиjанын ибтидаи функсиjаларыны тапмаға һәмин функсиjаны *интеграллама*г дејилир. Демәли, төрәмәси верилмиш функсиjанын өзүнү тапмагдан ибарәт олан интеграллама әмәли диференсиаллама әмәлинин тәрсидир. Верилмиш функсиjаны габагча диференсиаллаjыб, сонра да алынан ифадәни интеграллсаг, онда верилмиш функсиjанын өзүнү (сабит C һәддинә гәдәр дәгигликлә) аларыг. Бурадан көрүнүр ки, d (диференсиаллама) вә $\int$ (интеграллама) ишарәләри илә көстәрилән әмәлләр гаршылыглы тәрс әмәллардир:

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (6)$$

$$d\int f(x)\,dx = d[F(x) + C] = F'(x)\,dx = f(x)dx. \qquad (7)$$

Истәнилән функсиjанын ибтидаи функсиjасы вармы? Хеjр, jохдур. Лакин кәләчәкдә (XXII, § 7) көстәрәчәjик ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәjән һәр бир $f(x)$ функсиjасынын һәмин парчада ибтидаи функсиjасы, jә'ни гејри-муәjjән интегралы вар вә буна көрә дә верилән функсиjа муәjjән нөгтәләрдә кәсилән олдугда, онун кәсилмәз олдуғу аjры-аjры интервал вә jа парчаларда интегралындан данышачағыг. Мәсәлән, $f(x) = \frac{1}{x}$ функсиjасы $x = 0$ нөгтәсиндә кәсиләндир. Буна көрә дә һәмин функсиjанын кәсилмәз олдуғу $(-\infty, 0)$ вә $(0, \infty)$ интервалларынын һәр бириндә аjрылыгда интегралындан данышмаг олар. Биринчи интервалда

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + C, \qquad (8)$$

икинчи интервалда исә

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \tag{9}$$

олар. (8) вә (9) бәрабәрликләри

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C. \tag{10}$$

шәклиндә бирләшдирилир.

Интеграла гејри-мүәјјән ады верилмәси онун гијмәтинин конкрет (мүәјјән) бир функсија олмајыб, сонсуз сајда функсијалар (чохлуғу) олмасы илә әлагәдардыр.

§ 2. ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ӘСАДӘ ХАССӘЛӘРИ

Интегралын тә'рифиндән ајдындыр ки, верилмиш $f(x)$ функсијасынын интегралыны тапмаг (һесабламаг), онун бүтүн ибтидаи функсијалары чохлуғуну тапмаг демәкдир. Бунун үчүн исә онун бир ибтидаи функсијасыны, јә'ни $F'(x) = f(x)$ бәрабәрлијини өдәјән $F(x)$ функсијасыны билмәк кифајәтдир. Бу һалда

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \tag{1}$$

бәрабәрлијинин доғрулуғу бахылан парчанын вә ја интервалын бүтүн нөгтәләриндә

$$F'(x) = f(x) \tag{2}$$

мүнасибәтинин өдәнилмәсинә еквивалентдир. Беләликлә, (1) бәрабәрлијинин доғрулуғуну јохламаг үчүн онун сағ тәрәфинин төрәмәсинин интегралалты $f(x)$ функсијасына бәрабәр олдуғуну јохламаг кифајәтдир:

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Бу заман јадда сахламаг лазымдыр ки, ики гејри-мүәјјән интегралын вә ја гејри-мүәјјән интеграллар дахил олан ики ифадәнин бәрабәрлији ики чохлуғун (ибтидаи функсијалар чохлугларынын) бәрабәрлији демәкдир.

Дедикләримиздән истифадә едәрәк интегралын бир сыра садә хассәләрини исбат едәк.

Хассә 1. *Гејри-мүәјјән интегралын төрәмәси интегралалты функсијаја бәрабәрдир*:

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x). \tag{3}$$

Доғрудан да, (1) вә (2) бәрабәрликләринә көрә:

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Хассә 2. *Сонлу сајда функсијалар чәминин гејри-мүәјјән интегралы онларын гејри-мүәјјән интегралларынын чәминә бәрабәрдир*:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\, dx = $$
$$= \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx + \cdots + \int f_n(x)\, dx \tag{4}$$

Исбаты. Гејри-мүәјјән интегралын тә'рифинә көрә (4) бәрабәрлијинин сол тәрәфи $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијалары чохлуғудур. (4) бәрабәрлијинин сағ тәрәфинин төрәмәси дә һәмин $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ функсијасына бәрабәрдир. Доғрудан да, (3) бәрабәрлијинә көрә

$$\left[\int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx + \cdots + \int f_n(x) dx\right]' =$$
$$= \left[\int f_1(x)\, dx\right]' + \left[\int f_2(x) dx\right]' + \cdots + \left[\int f_n(x) dx\right]' =$$
$$= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Демәли, (4) бәрабәрлијинин сағ тәрәфи дә $f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијалары чохлуғудур. Бурадан (4) бәрабәрлијинин доғрулуғу ајдын олур.

Интегралын (4) бәрабәрлијилә ифадә олунан хассәси функсијалара нәзәрән *интегралын аддитивлик хассәси* адланыр.

Хассә 3. *Сабит вуруғу интеграл ишарәси харичинә чыхармаг олар*:

$$\int A f(x)\, dx = A \int f(x)\, dx. \tag{5}$$

Доғрудан да,

$$\left(A \int f(x)\, dx\right)' = A \left(\int f(x)\, dx\right)' = Af(x)$$

олдуғундан (5) бәрабәрлији доғру олар.

Нәтичә. Ики функсија фәргинин гејри-мүәјјән интегралы онларын гејри-мүәјјән интегралларынын фәргинә бәрабәрдир:

$$\int [f(x) - \varphi(x)]\, dx = \int f(x)\, dx - \int \varphi(x) dx. \tag{6}$$

Исбаты:

$$\int [f(x) - \varphi(x)]\, dx = \int [f(x) + (-1)\varphi(x)]\, dx =$$
$$= \int f(x) dx + \int (-1)\varphi(x)\, dx = \int f(x) dx - \int \varphi(x)\, dx.$$

Хассә 4. *Интегралын интеграллама дәјишәнинә нәзәрән инвариантлыг хассәси вардыр, јә'ни*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

оларса, онда истәнилән диференсиалланан $u = u(x)$ функсијасы үчүн

$$\int f(u)\, du = F(u) + C. \tag{7}$$

Доғрудан да, (1) мүнасибәтинә көрә

$$dF(x) = f(x)\, dx$$

олдуғундан, диференсиал шәклинин инвариантлығы (XV, § 5) хассәсинә әсасән

$$dF(u) = f(u)\, du$$

олар. Бурадан (7) бәрабәрлијинин доғрулуғу ајдындыр.

Хүсуси һалда, $u=ax+b$ оларса, онда

$$\int f(ax+b)\,d(ax+b)=F(ax+b)+C \qquad (8)$$

вә ја

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Мисал 1.

$$\int (2x^3+x+3)\,dx=\int 2x^3dx+\int xdx+\int 3dx=$$
$$=2\int x^3dx+\int xdx+3\int dx=\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}+3x+C.$$

Мисал 2.

$$\int (5x-e^x)\,dx=\int 5xdx-\int e^xdx=$$
$$=5\int xdx-\int e^xdx=\frac{5}{2}x^2-e^x+C.$$

§ 3. ӘСАС ИНТЕГРАЛЛАР ЧӘДВӘЛИ

Гејри-муәјјән интегралын тә'рифинә (§ 1) вә әсас елементар функсијаларын төрәмәләри дүстурларына (XIV, § 8) әсасән ашағыдакы интеграллар чәдвәли алыныр. Бу дүстурларын доғрулуғуну диференсиалламагла јохламаг олар.

1. $\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ ($\alpha\neq-1$ вә сабит әдәддир).

Хүсуси һалда,

$$\int du=u+C.$$

2. $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$ (u-нун сыфырдан фәргли олдуғу һәр бир интервалда).

3. $\int a^udu=\frac{a^u}{\ln a}+C$ (a сабитдир, $a>0$, $a\neq1$). Хүсуси һалда, $a=e$ оларса, онда

$$\int e^udu=e^u+C.$$

4. $\int \cos u\,du=\sin u+C.$

5. $\int \sin u\,du=-\cos u+C.$

6. $\int \frac{du}{\cos^2u}=\operatorname{tg}u+C$ ($\cos u$-нун сыфырдан фәргли олдуғу һәр бир интервалда).

7. $\int \frac{du}{\sin^2u}=-\operatorname{ctg}u+C$ ($\sin u$-нун сыфырдан фәргли олдуғу һәр бир интервалда).

8. $\int \frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{u}{a}+C \quad (a\neq0)$

9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C=-\arccos\frac{u}{a}+C \quad (|u|<|a|).$

10. $\int \operatorname{ch}u\,du=\operatorname{sh}u+C.$

11. $\int \operatorname{sh}u\,du=\operatorname{ch}u+C.$

12. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2u}=\operatorname{th}u+C.$

13. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2u}=-\operatorname{cth}u+C$ ($\operatorname{sh}u$-нун сыфырдан фәргли олдуғу һәр бир интервалда).

14. $\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C \quad (a\neq0).$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln|u+\sqrt{u^2\pm a^2}|+C.$

Јухарыда гејд етдијимиз кими бу дүстурларын һәр биринин доғрулуғуну билаваситә диференсиалламагла јохламаг олар.

Мәсәлән, 15-чи дүстурун доғрулуғуну јохлајаг. Сағ тәрәфин диференсиалыны һесабласаг,

$$d(\ln|u+\sqrt{u^2\pm a^2}|+C)=\frac{(u+\sqrt{u^2\pm a^2})'du}{u+\sqrt{u^2\pm a^2}}=$$
$$=\frac{du}{u+\sqrt{u^2\pm a^2}}\cdot\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2\pm a^2}}\right)=\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}$$

олар, јә'ни 15-чи дүстур доғрудур.

Бу интеграллар чәдвәлиндән истифадә едәрәк, бир чох елементар функсијаларын интегралыны һесабламаг олар. Интегралы, чәдвәлдән истифадә едәрәк һесабламаға *билаваситә интеграллама* дејилир. Буна аид бир нечә мисал көстәрәк.

Мисал 1.

$$\int x^7dx=\frac{x^8}{8}+C.$$

Мисал 2.

$$\int 3^xdx=\frac{3^x}{\ln 3}+C.$$

Мисал 3.

$$\int \cos^3x\sin x\,dx=-\int \cos^3x\,d(\cos x)=-\frac{\cos^4x}{4}+C.$$

Мисал 4.

$$\int \frac{dx}{x\ln^2x}=\int \frac{d\ln x}{\ln^2x}=-\frac{1}{\ln x}+C.$$

Мисал 5.

$$\int \operatorname{sh}(x+3)\,dx=\int \operatorname{sh}(x+3)\,d(x+3)=\operatorname{ch}(x+3)+C.$$

Мисал 6.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$
$$(\cos x \neq 0).$$

Мисал 7.

$$\int 2x \sin(x^2+5)\,dx = \int \sin(x^2+5)\,d(x^2+5) = -\cos(x^2+5) + C.$$

Мисал 8.

$$\int e^{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x dx = \int e^{\operatorname{sh} x} d(\operatorname{sh} x) = e^{\operatorname{sh} x} + C.$$

Мисал 9.

$$\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C = \ln \sqrt[6]{\left|\frac{x-3}{x+3}\right|} + C.$$

Мисал 10.

$$\int \frac{e^x dx}{3+e^x} = \int \frac{d(3+e^x)}{3+e^x} = \ln(3+e^x) + C.$$

Мисал 11.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$
$$= \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Бу мисалларын һамысында интеграл алтындакы елементар функсиjаларын ибтидаи функсиjалары jа елементар функсиjадыр, jа да елементар функсиjаларын мүәjjән комбинасиjасыдыр. Лакин елә елементар функсиjалар вар ки, онларын ибтидаи функсиjалары елементар функсиjаларын һеч бир сонлу комбинасиjасы васитәсилә ифадә олунмур.

Әкәр верилмиш $f(x)$ функсиjасынын ибтидаи функсиjасы елементар функсиjа (вә jа онларын мүәjjән сонлу комбинасиjасы) оларса, онда дејирләр ки, $\int f(x)dx$ интегралы елементар функсиjаларла сонлу шәкилдә ифадә олунур.

§ 4. ИНТЕГРАЛЛАМА ҮСУЛЛАРЫ

Биз jухарыда (§ 3) бир сыра садә функсиjаларын интегралыны һесабладыг. Лакин верилмиш функсиjанын интегралыны һесабламаг һәмишә белә садә олмур.

Функсиjаны интеграллама мәсәләси, үмумиjjәтлә, чәтиндир. Бунун сәбәби одур ки, истәнилән функсиjанын интегралыны һесабламаг үчүн үмуми конструктив гаjда көстәрмәк мүмкүн олмур. Белә чәтинлик әксәр тәрс әмәлләр үчүн мөвчуддур. Интеграллама исә диференсиалламанын тәрс әмәлидир.

Дүз әмәл олан диференсиаллама конструктив шәкилдә тә'jин олунур. Төрәмәнин тә'рифиндә, верилмиш функсиjанын мүәjjән нөгтәдә төрәмәсини тапмаг үчүн һансы әмәлләри (функсиjанын артымыны тапмаг, артымларын нисбәтини дүзәлтмәк, лимитә кечмәк) һансы ардычыллыгла апармаг лазым олдуғу көстәрилир.

Лакин бә'зи функсиjалар синфинин интегралыны һесабламаг үчүн үсуллар көстәрмәк мүмкүндүр.

I. Аjрылма үсулу.

Бу үсулун маһиjjәти ондан ибарәтдир ки, интеграл алтындакы функсиjа интеграллары асан һесаблана билән функсиjаларын чәми шәклиндә көстәрилир. Сонра исә интегралын „сонлу сајда функсиjалар чәминин интегралы онларын интегралары чәминә бәрабәрдир" хассәсиндән (§ 2, II) истифадә олунур.

Мисал 1.

$$\int (2x^3 + 5^x - \cos x)dx = \int 2x^3 dx + \int 5^x dx - \int \cos x dx =$$
$$= \frac{x^4}{2} + \frac{5^x}{\ln 5} - \sin x + C.$$

Мисал 2.

$$\int \left(\operatorname{tg} x + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \operatorname{tg} x\, dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx -$$
$$- \int \frac{dx}{x^2} = -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{x} + C.$$

Аjрылма үсулуну тәтбиг етмәк о заман әһәмиjjәтлидир ки, „аjрылмадан" алынан һәдләрин интеграллары асан һесаблансын.

II. Дәjишәни әвәзетмә үсулу.

Тутаг ки, $F(x)$ функсиjасы $f(x)$-ин ибтидаи функсиjасыдыр. Онда

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (1)$$

олар. $x = \varphi(t)$ диференсиалланан функсиjа оларса, онда

$$(F[\varphi(t)])'_t = F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$$

вә буна көрә дә

$$\int F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C. \qquad (2)$$

(1) вә (2)-дән

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \qquad (3)$$

бәрабәрлиjи алыныр. Буна *дәjишәни әвәзетмә дүстуру* дејилир.

Гејд едәк ки, (3) бәрабәрлиjинин сағ тәрәфиндәки интегралы һесабладыгдан сонра јенидән x дәjишәнинә гајытмаг үчүн $x = \varphi(t)$ әвәзләмәсиндән истифадә етмәк лазымдыр. Бә'зән

$x=\varphi(t)$ әвәзләмәсиндән дејил, $\psi(x)=t$ шәклиндә әвәзләмәдән истифадә олунур. Бу һалда, ахырынчы бәрабәрликдән $x=\Phi(t)$ тапылыр (әлбәттә, бунун мүмкүн олдуғуну гәбул едирик) вә беләликлә дә

$$\int f(x)\,dx=\int f[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,dt \qquad (4)$$

әвәзетмә дүстуру алыныр.

Мисал 3.

$$J_1=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \ (a>0)$$

интегралыны һесабламалы. Бу мәгсәдлә

$$x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2},\ -a\leqslant x\leqslant a\right)$$

әвәзләмәсиндән истифадә едәк:

$$J_1=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t\,dt=a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=$$
$$=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C.$$

Јенидән x дәјишәнинә гајытмаг үчүн $x=a\sin t$ әвәзләмәсиндән t вә $\sin t$ кәмијјәтләрини тапмаг лазымдыр:

$$\sin t=\frac{x}{a},\ t=\arcsin\frac{x}{a},$$

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Беләликлә,

$$J_1=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Мисал 4.

$$J_2=\int\frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)}$$

интегралыны һесабламаг үчүн $t=\varphi(x)$ әвәзләмәсини көтүрмәк әлверишлидир. Бу һалда $dt=\varphi'(x)\,dx$ вә

$$J_2=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\varphi(x)|+C$$

олар. Хүсуси һалда,

$$\int\operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C,$$

$$\int\frac{x\,dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(a^2+x^2)}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Мисал 5.

$$J_3=\int\frac{x^{n-1}\,dx}{a^2+x^{2n}}$$

интегралыны һесабламаг үчүн $x^n=t$ әвәзләмәсиндән истифадә етсәк, аларыг:

$$nx^{n-1}\,dx=dt,$$

$$J_3=\frac{1}{n}\int\frac{dt}{a^2+t^2}=\frac{1}{na}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C=\frac{1}{na}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^n}{a}+C.$$

III. Һиссә-һиссә интеграллама дүстуру.

Билирик ки, диференсиаллана билән $U=U(x)$ вә $V=V(x)$ функсијаларынын һасилинин диференсиалы

$$d(UV)=V\,dU+U\,dV$$

кими һесабланыр. Бу бәрабәрлији интеграллламагла

$$UV=\int V\,dU+\int U\,dV$$

вә јахуд

$$\int U\,dV=UV-\int V\,dU \qquad (5)$$

дүстуруну аларыг.

(5) дүстуруна *һиссә-һиссә интеграллама дүстуру дејилир.* $dV=V'dx$ вә $dU=U'dV$ олдуғундан (1) дүстуруну

$$\int UV'\,dx=UV-\int VU'\,dx$$

кими јазмаг олар. Бу бәрабәрлијә әсасән n-чи тәртиб кәсилмәјән төрәмәләри олан $U(x)$ вә $V(x)$ функсијалары үчүн ашағыдакы бәрабәрликләри јазмаг олар:

$$\int UV^{(n)}\,dx=UV^{(n-1)}-\int U'V^{(n-1)}\,dx,$$
$$\int U'V^{(n-1)}\,dx=U'V^{(n-2)}-\int U''V^{(n-2)}\,dx,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\int U^{(n-1)}V'\,dx=U^{(n-1)}V-\int U^{(n)}V\,dx.$$

Бу бәрабәрликләри нөвбә илә $+1$ вә -1 әдәдләринә вурараг, алынан бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топласаг,

$$\int UV^{(n)}\,dx=UV^{(n-1)}-U'V^{(n-2)}+U''V^{(n-3)}-\ldots+$$
$$+(-1)^{(n-1)}U^{(n-1)}V+(-1)^n\int U^{(n)}V\,dx \qquad (6)$$

бәрабәрлијини аларыг. (6) дүстуруна *үмумиләшмиш һиссә-һиссә интеграллама дүстуру* дејилир.

Верилмиш интегралы һесабламаг үчүн (5) (вә ја (6)) дүстуруну тәтбиг етмәк о заман әлверишлидир ки, сағ тәрәфдә алынан $\int V\,dU\left(\int U^{(n)}V\,dx\right)$ интегралы верилмиш $\int U\,dV\left(\int UV^{(n)}\,dx\right)$ интегралындан садә олсун. Бу мәсәлә интегралалты ифадәни U вә dV кими әлверишли вуругларын һасили шәклиндә көстәрмәк-

дән дә чох асылыдыр. Интегралалты ифадәни әлверишли вуругларын һасили шәклиндә көстәрмәк бачарығы исә чохлу мисал һәлл етмәк нәтиҹәсиндә газанылыр.

Мисал 6. $\int x^n \ln x\,dx = ?$

Бурада $u = \ln x$ вә $dV = x^n\,dx$ һесаб етсәк, $du = \frac{dx}{x}$ вә $V = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (бурада $+C$ сабитини көтүрмәјин әһәмијјәти јохдур, чүнки һәмин сабит нәтиҹәдә алынан ифадәјә дахил олмур. Јохлаји) олар. Онда (5) дүстуруна көрә алырыг:

$$\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

Мисал 7. $\int x^{2m} e^x\,dx = ?$

Верилмиш интегралы үмумиләшмиш һиссә-һиссә интеграллама дүстуру илә һесабламаг лазымдыр. Бу мәгсәдлә $u = x^{2m}$ вә $V^{(2m)} = e^x$ һесаб етмәк әлверишлидир. Онда (6) дүстуруна көрә

$$\int x^{2m} e^x\,dx = e^x[x^{2m} - 2m\,x^{2m-1} + (2m-1)2m\,x^{2m-2} - \ldots - (2m)!\,x] + \int (2m)!\,e^x\,dx = e^x[x^{2m} - 2m\,x^{2m-1} + 2m(2m-1)\,x^{2m-2} - \ldots - (2m)!\,x + (2m)!] + C.$$

Мисал 8. $\int x^{2m}\sin x\,dx = ?$

Бу һалда $u = x^{2m}$ вә $V^{(2m)} = \sin x$ әвәзләмәләриндән истифадә етмәк әлверишлидир. Онда (6) дүстуруна көрә

$$\int x^{2m}\sin x\,dx = -x^{2m}\cos x + (2m)\,x^{2m-1}\sin x - \ldots \mp (2m)!\,x\sin x \pm (2m)!\int \sin x\,dx =$$
$$= -x^{2m}\cos x + (2m)\,x^{2m-1}\sin x - \ldots \mp (2m)!\,x\sin x \mp (2m)!\cos x + C.$$

Мисал 9. $\int \arcsin x\,dx = ?$

$u = \arcsin x$ вә $dV = dx$ гәбул етсәк, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ вә $V = x$ олар. Онда (5) дүстуруна әсасән

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

IV. Рекуррент (кәтирмә) дүстуру васитәсилә интегралын һесабланмасы.

Тутаг ки, ахтарылан J_n ($n \geq 1$) кәмијјәтинин кичик индексли J_{n-1}, J_{n-2} вә с. васитәсилә

$$J_n = f(J_{n-1}, J_{n-2}, \ldots) \qquad (7)$$

шәклиндә ифадә олундуғу бир дүстур верилмишдир. Бу һалда J_0, J_1 вә с. кәмијјәтләри мә'лум олса, онда бөјүк индексли кәмијјәтләри (7) дүстурлары васитәсилә ардыҹыл һесабламаг олар.

(7) дүстурларына *рекуррент вә ја кәтирмә дүстурлары* дејилир. Рекуррент дүстурлары васитәсилә интеграл һесабламаға аид бир нечә мисал һәлл едәк.

Мисал 10. $S_n = \int \sin^n x\,dx$ интегралыны һесабламалы. Бу мәгсәдлә, верилмиш интеграла һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг едәк:

$$u = \sin^{n-1}x,\ dV = \sin x\,dx,$$
$$du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x\cdot dx,\ V = -\cos x$$

олдуғундан

$$\int \sin^n x\,dx = -\cos x\cdot\sin^{n-1}x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\,dx =$$
$$= -\cos x\cdot\sin^{n-1}x + (n-1)\int\sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int\sin^n x\,dx$$

вә ја

$$S_n = -\cos x\cdot\sin^{n-1}x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n$$

олар. Бурадан

$$S_n = -\frac{1}{n}\cos x\cdot\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}S_{n-2} \qquad (8)$$

рекуррент дүстуруну аларыг.

$$S_0 = \int dx = x + C$$

$$S_1 = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

олдуғундан (8) дүстуру васитәсилә J_2, J_3 вә с. интегралларыны ардыҹыл олараг һесабламаг олар.

Мисал 11.

$$J_n = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\quad (n = 1,2,\ldots)$$

интегралында $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ вә $dV = dx$ гәбул етсәк,

$$du = -\frac{2n\,x\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},\quad V = x$$

вә

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

олар. Бурадан

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left[\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right] =$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\,J_n - 2na^2\,J_{n+1}$$

вә ја

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}$$

аларыг. Верилмиш интегралы һесабламаг үчүн ахырынчы бәрабәрликдән

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n \qquad (9)$$

рекуррент дүстуруну тапарыг.

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C$$

олдуғуну биләрәк, (9) дүстуруна әсасән J_2, J_3 вә с. интегралларыны һесабламаг олар:

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C,$$

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}J_2, \ldots$$

§ 5. САДӘ РАСИОНАЛ КӘСРЛӘР ВӘ ОНЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Расионал функсијаларын ән садә нөвү

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

шәклиндә олан функсија, јә'ни n дәрәҹәли чәбри чохһәдлидир. Белә функсијаларын интегралы билаваситә һесабланыр:

$$\int P_n(x)\,dx = \int\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}\right)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k\int x^{n-k}dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{n-k+1}}{n-k+1}+C.$$

Садә расионал кәсрләр адланан

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k\geqslant 2$ натурал әдәддир),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\left(q-\frac{p^2}{4}>0 \text{ шәрти өдәнилир}\right)$,

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ ($k\geqslant 2$ натурал әдәддир вә $q-\frac{p^2}{4}>0$ шәрти өдәнилир)

шәклиндә кәсрләрин интегралланмасы илә мәшғул олаг.

I. $\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$,

II. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int(x-a)^{-k}d(x-a) = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$, $(k\neq-1)$.

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ кәсринин интегралыны һесабламаг үчүн онун мәхрәҹини ашағыдакы кими чевирәк:

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Шәртә көрә $q-\frac{p^2}{4}>0$ олдуғундан, ону a^2 илә ишарә етмәк олар. Онда

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int\frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$$

вә бурада $t=x+\frac{p}{2}$, $x=t-\frac{p}{2}$, $dx=dt$ әвәзләмәсини апарсаг,

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}dt = \frac{A}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a} + C$$

аларыг. Јенидән x дәјишәнинә гајытсаг, аларыг:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{2a}+C.$$

IV. Јухарыда көстәрилән чевирмәләр васитәсилә

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{A}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

аларыг. Сағ тәрәфдәки биринҹи интеграл билаваситә һесабланыр:

$$\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = -\frac{1}{(k-1)}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}+C.$$

Икинҹи

$$J_k = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

интегралы исә әввәлки параграфда рекуррент дүстур васитәсилә һесабланан интегралдыр (§ 4, мисал 11).

Бу гајда илә һәр бир IV нөв садә расионал кәсрин интегралы һесабланыр.

Апардығымыз мүһакимәдән ајдындыр ки, I—IV нөв садә расионал кәсрләрин интегралыны һәмишә һесабламаг мүмкүндүр. Бу кәсрләрин һәр биринин интегралы елементар функсијаларла (XI, § 19) ифадә олунур.

Мисал I.

$$J=\int\frac{x+3}{x^2-2x+10}\,dx$$

интегралыны һесабламалы.

Бурада $x-1=t,\ dx=dt$ әвәзләмәсини апарсаг, аларыг:

$$J=\int\frac{x+3}{(x-1)^2+9}\,dx=\int\frac{(t+4)\,dt}{t^2+9}=\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+9}+4\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+9)+\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+10)+\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C.$$

§ 6. РАСИОНАЛ КӘСРЛӘРИН САДӘ КӘСРЛӘРӘ АЈРЫЛМАСЫ

Һәр бир расионал (кәср) функсија ики чәбри чохһәдлинин нисбәти шәклиндә олур:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}. \qquad (1)$$

Расионал кәсрин сурәтиндәки $P(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәси мәхрәчиндәки $Q(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәсиндән кичик олдугда она дүзкүн, әкс һалда исә дүзкүн олмајан кәср дејилир. Дүзкүн олмајан һәр бир расионал кәсрин сурәтини мәхрәчинә бөләрәк, буну мүәјјән бир чохһәдли илә дүзкүн расионал кәсрин чәми шәклиндә көстәрмәк олар:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{\Phi(x)}{Q(x)}. \qquad (2)$$

Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини интеграллансаг,

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\int T(x)\,dx+\int\frac{\Phi(x)}{Q(x)}\,dx \qquad (3)$$

аларыг. $T(x)$ чәбри чохһәдлисинин интегралы билаваситә һесабланыр. Демәли, һәр бир расионал кәсрин интегралланмасы бир дүзкүн расионал кәсрин интегралланмасына кәтирилир. Дүзкүн расионал кәсрләр исә сонлу сајда садә расионал кәсрләрин чәми шәклиндә көстәрилә билир. Беләликлә, һәр бир расионал кәсрин интегралы садә расионал кәсрләрин интегралына кәтириләрәк тамамилә һесабланыр.

Инди һәр бир дүзкүн расионал кәсрин сонлу сајда садә расионал кәсрләрин чәми шәклиндә көстәрилә билдијини исбат едәк.

Фәрз едәк ки, $\Phi(x)$ вә $Q(x)$ һәгиги әмсаллы чәбри чохһәдлиләр вә

$$R(x)=\frac{\Phi(x)}{Q(x)} \qquad (4)$$

дүзкүн расионал кәсрдир. Әкәр һәгиги a әдәди мәхрәчин $к$ ($к\geqslant 1$) дәфә тәкрарланан көкүдүрсә (XVIII, § 8), онда

$$Q(x)=(x-a)^к Q_1(x),\ Q_1(a)\neq 0 \qquad (5)$$

олар.

Теорем 1. *Һәгиги a әдәди $Q(x)$ чохһәдлисинин $к$ дәфә тәкрарланан көкү олдугда, елә һәгиги A әдәди вә дәрәчәси $(x-a)^{к-1}Q_1(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәсиндән кичик олан $P_1(x)$ чохһәдлиси вар ки,*

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^к}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{к-1}Q_1(x)} \qquad (6)$$

бәрабәрлији өдәнилир.

Исбаты. (6) бәрабәрлијинин өдәнилмәси үчүн

$$\Phi(x)=A\,Q_1(x)+P_1(x)(x-a)$$

олмалыдыр. Бурадан, $x=a$ олдугда

$$\Phi(a)=A\,Q_1(a)$$

вә ја $Q_1(a)\neq 0$ олдуғундан

$$A=\frac{\Phi(a)}{Q_1(a)}$$

аларыг. A-нын бу гијмәтиндә $x=a$ әдәди

$$\Phi(x)-A\,Q_1(x) \qquad (7)$$

фәргинин көкүдүр. Буна көрә дә һәмин фәрг $x-a$ фәргинә бөлүнүр (XVIII, § 6). Демәли,

$$\frac{\Phi(x)-AQ_1(x)}{x-a}=P_1(x) \qquad (8)$$

ифадәси чәбри чохһәдлидир вә онун дәрәчәси сурәтин дәрәчәсиндән (јә'ни (7) чохһәдлисинин дәрәчәсиндән) бир ваһид аздыр. (7) чохһәдлисинин дәрәчәси исә $Q(x)$-ин дәрәчәсиндән ән азы бир ваһид кичикдир. Демәли, $P_1(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәси $Q(x)$-ин дәрәчәсиндән ән азы ики ваһид, $(x-a)^{к-1}Q_1(x)$-ин дәрәчәсиндән исә бир ваһид кичикдир.

Нәһајәт, (6) бәрабәрлији

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^к}+\frac{\Phi(x)-AQ_1(x)}{(x-a)^к Q_1(x)}$$

ејнилијиндән (8) бәрабәрлијинә әсасән алыныр.

Инди фәрз едәк ки, $\alpha=a+ib$ комплекс әдәди һәгиги әмсаллы $Q(x)$ чохһәдлисинин m дәфә тәкрарланан көкүдүр. Онда $\bar{\alpha}=a-ib$ әдәди дә онун m дәфә тәкрарланан көкү олар (XVIII, § 9) вә һәмин чохһәдли һәгиги әмсаллы

$$x^2+px+q=[x-(a+ib)]\,[x-(a-ib)]$$

$$(p=-2a,\ q=a^2+b^2)$$

квадрат үчһәдлисинин m-чи дәрәчәдән гүввәтинә бөлүнәр:

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_2(x). \qquad (9)$$

Теорем 2. ***Һәгиги әмсаллы $Q(x)$ чохһәдлиси үчүн (9) бәрабәрлиүи доғру олдугда, елә һәгиги B вә C әдәдләри вә дәрәчәси $(x^2 + px + q)^{m-1} Q_2(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәсиндән кичик олан $P_2(x)$ чохһәдлиси вар ки,***

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^{m-1} Q_2(x)} \qquad (10)$$

ејнилији, өдәнилир.

Исбаты. (10) ејнилијинин һәр ики тәрәфини $Q(x)$ ифадәсинә вурмагла

$$\Phi(x) = (Bx + C) Q_2(x) + (x^2 + px + q) P_2(x) \qquad (11)$$

мүнасибәтини аларыг. Бурадан x әвәзинә $\alpha = a + ib$ вә $\bar{\alpha} = a - ib$ јазмагла, B вә C әдәдләрини тапмаг үчүн

$$\begin{cases} \Phi(\alpha) = (B\alpha + C) Q_2(\alpha) \\ \Phi(\bar{\alpha}) = (B\bar{\alpha} + C) Q_2(\bar{\alpha}) \end{cases} \qquad (12)$$

системи алыныр.

$\Phi(x)$ вә $Q_2(x)$ чохһәдлиләри һәгиги әмсаллы чохһәдли олдуғундан $\frac{\Phi(\alpha)}{Q_2(\alpha)}$ вә $\frac{\Phi(\bar{\alpha})}{Q_2(\bar{\alpha})}$ әдәдләри гаршылыглы гошма комплекс әдәдләрдир:

$$\frac{\Phi(\alpha)}{Q_2(\alpha)} = M + iN, \quad \frac{\Phi(\bar{\alpha})}{Q_2(\bar{\alpha})} = M - iN.$$

Бу бәрабәрликләрдән истифадә едәрәк (12) системини

$$\begin{cases} B\alpha + C = M + iN \\ B\bar{\alpha} + C = M - iN \end{cases}$$

кими јазмаг олар. Бурадан B вә C тапылыр:

$$B = \frac{N}{b}, \quad C = M - \frac{Na}{b}. \qquad (13)$$

(11) мүнасибәтиндән ајдындыр ки, B вә C-нин тапдығымыз гијмәтләриндә

$$\Phi(x) - (Bx + C) Q_2(x)$$

фәрги $x^2 + px + q$ квадрат үчһәдлисинә бөлүнүр. Беләликлә, ахтардығымыз $P_2(x)$ чохһәдлиси

$$P_2(x) = \frac{\Phi(x) - (Bx + C) Q_2(x)}{x^2 + px + q} \qquad (14)$$

шәклиндә тапылыр. (13) вә (14) мүнасибәтләриндән тапылмыш B, C әдәдләри вә $P_2(x)$ чохһәдлиси үчүн (10) ејнилијинин доғрулуғу ајдындыр.

Нәтичә. Һәр бир дүзкүн расионал кәср сонлу сајда садә расионал кәсрләрин чәми шәклиндә көстәрилир.

Доғрудан да, тутаг ки, $R(x) = \frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ дүзкүн расионал кәсри верилмишдир вә онун мәхрәчи n дәрәчәли чәбри чохһәдлидир:

$$Q(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1} x + C_n$$

(үмумилији азалтмадан x^n-ин әмсалыны ваһид һесаб едирик).

Бу чохһәдлини бир вә икидәрәчәли һәгиги вуругларын һасили шәклиндә көстәрмәк олар (XVIII, § 9):

$$Q(x) = (x - a_1)^{\nu_1} \ldots (x - a_k)^{\nu_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{\mu_s}$$

$$(n = \nu_1 + \ldots + \nu_k + 2\mu_1 + \ldots + 2\mu_s, \ p_i^2 - 4q_i < 0, \ i = \overline{1,s}).$$

Онда $\frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ дүзкүн расионал кәсринә 1-чи теореми тәтбиг едә биләрик:

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{P_1(x)}{(x - a_1)^{\nu_1 - 1} Q_1(x)}.$$

Сағ тәрәфдәки икинчи һәдд дә дүзкүн расионал кәсрдир. $\nu_1 - 1 > 1$ олдугда она јенидән 1-чи теореми тәтбиг етсәк,

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{\nu_1 - 1}} + \frac{P_2(x)}{(x - a_1)^{\nu_1 - 2} Q_1(x)}$$

аларыг. Бу просеси ардычыл давам етдирәрәк тапырыг:

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{\nu_1-1}} + \cdots + \frac{A_{\nu_1}}{x - a_1} + \frac{P_{\nu_1}(x)}{Q_1(x)}$$

Сағ тәрәфдәки ахырынчы һәдд дә дүзкүн расионал кәсрдир. Она јенидән $(x-a_2)^{\nu_2}, \ldots, (x - a_k)^{\nu_k}$ вуругларына нәзәрән 1-чи теореми ардычыл тәтбиг етсәк,

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{\nu_1-1}} + \cdots + \frac{A_{\nu_1}}{x - a_1} + \cdots +$$

$$+ \frac{B_1}{(x - a_k)^{\nu_k}} + \frac{B_2}{(x - a_k)^{\nu_k - 1}} + \cdots + \frac{B_{\nu_k}}{x - a_k} + \frac{\Phi_1(x)}{Q^*(x)},$$

$$Q^*(x) = (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{\mu_s}$$

аларыг. Инди сағ тәрәфдә алынмыш сонунчу $\frac{\Phi_1(x)}{Q^*(x)}$ һәддинин дүзкүн расионал кәср олдуғуну нәзәрә алараг, она ардычыл олараг 2-чи теореми тәтбиг етсәк, нәтичәдә тәләб олунан үмуми

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{\nu_1-1}} + \cdots + \frac{A_{\nu_1}}{x - a_1} + \cdots +$$

$$+ \frac{B_1}{(x-a_k)^{\nu_k}} + \frac{B_2}{(x - a_k)^{\nu_k-1}} + \cdots + \frac{B_{\nu_k}}{x - a_k} +$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}}+\dots+\frac{C_{\mu_1}x+D_{\mu_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\dots+$$
$$+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}}+\dots+\frac{E_{\mu_s}x+F_{\mu_s}}{x^2+p_sx+q_s} \qquad (15)$$

ајрылышы алыныр ки, бу да нәтиҹәнин доғру олдуғуну көстәрир.

§ 7. РАСИОНАЛ КӘСРЛӘРИН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Әввәлки параграфда көстәрдик ки, һәр бир расионал кәсрин интегралланмасы дүзкүн расионал кәсрин интегралланмасына кәтирилир. Дүзкүн расионал кәсрләр исә сонлу сајда садә расионал кәсрләрин ҹәми шәклиндә көстәрилә билдијиндән (§ 6, (15)) һәр бир дүзкүн расионал кәсрин интегралланмасы I—IV нөв садә расионал кәсрләрин интегралланмасына кәтирилир. Истәнилән садә расионал кәсрин интегралы тамамилә һесаблана билир вә бу интеграллар елементар функсијаларла сонлу шәкилдә ифадә олунур (§ 5).

Демәли, һәр бир расионал кәсрин интегралы тамамилә һесаблана билир вә онун нәтиҹәси елементар функсијалар васитәсилә ифадә олунур.

Расионал кәсрин интегралланмасында әсас чәтинлик онун садә расионал кәсрләрин ҹәми шәклиндә көстәрилмәсидир. Бу мәгсәдлә онун мәхрәҹини вуруглара ајырмаг вә ајрылышын әмсалларыны (§ 6-да јазылмыш (15) дүстурунда иштирак едән $A_i\,(i=\overline{1,\nu_1})$, $B_i\,(i=\overline{1,\nu_k})$, ... E_i вә $F_i\,(i=\overline{1,\mu_s})$ әмсалларыны) тапмаг лазымдыр.

Һәр бир расионал кәсрин мәхрәҹи сонлу дәрәҹәли ҹәбри чохһәдлидир. $Q(x)$ чохһәдлисини вуруглара ајырмаг принсипҹә һәмишә мүмкүндүр (XVIII, § 9), лакин бу мәсәлә $Q(x)=0$ ҹәбри тәнлијини һәлл етмәјә еквивалентдир ки, бу да чох заман асан олмур. Анҹаг дәрәҹәси дөрддән бөјүк олмајан истәнилән ҹәбри тәнлијин һәлли үсулу мә'лумдур. Дәрәҹәси беш вә бешдән бөјүк олан истәнилән ҹәбри тәнлијин көкләрини әмсаллары васитәсилә ифадә едән дүстур исә мә'лум дејилдир. Бу да расионал кәсрләрин садә кәсрләрә ајрылмасында гаршыја чыхан әсас чәтинликдир.

Әкәр мүәјјән үсуллар васитәсилә $\frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ дүзкүн расионал кәсринин мәхрәҹи

$$Q(x)=(x-a_1)^{\nu_1}\cdots(x-a_k)^{\nu_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+$$
$$+p_sx+q_s)^{\mu_s}$$

кими вуруглара ајрылмышдырса, онда һәмин расионал кәср үчүн әввәлки параграфда јазылмыш (15) ајрылышы доғру

олмалыдыр. Бу ајрылышын әмсалларыны хүсуси гајдалар вә ја гејри-мүәјјән әмсаллар үсулу илә тапмаг олар.

Гејри-мүәјјән әмсаллар үсулу беләдир: (15) дүстурунун сағ тәрәфи үмуми мәхрәҹә кәтирилир, алынан бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини $Q(x)$-ә вурараг ики чохһәдлинин бәрабәрлији алыныр. Сол тәрәфдә расионал кәсрин сурәти олан мә'лум әмсаллы $\Phi(x)$ чохһәдлиси, сағ тәрәфдә исә әмсаллары ахтарылан намә'лум әмсаллардан асылы олан чохһәдли олур. Ики чохһәдлинин бәрабәр олмасы үчүн x-ин ејни дәрәҹәли гүввәтләринин әмсаллары бәрабәр олмалыдыр. Беләликлә, ахтарылан әмсаллары тапмаг үчүн хәтти тәнликләр системи алыныр.

Бә'зән (15) ајрылышында иштирак едән намә'лум әмсаллары тапмаг үчүн јухарыда көстәрдијимиз кими алынан бәрабәрликдә x-ин ејни дәрәҹәли гүввәтләринин әмсалларыны бәрабәр көтүрмәк әвәзинә, x-ә намә'лум әмсалларын сајы гәдәр гијмәтләр верәрәк, һәмин әмсаллары тапмаг үчүн хәтти тәнликләр системи алмаг олар. Бу заман x-ә мәхрәҹин көкү олан гијмәтләри вермәк бә'зән әлверишли олур.

Инди бир нечә мисал һәлл едәк.

Мисал 1. $\int\frac{5x^2-x+3}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

Интеграл алтындакы ифадә дүзкүн расионал кәсрдир. Интегралы һесабламаг үчүн һәмин кәсри садә расионал кәсрләрә ајырмаг лазымдыр. Бу мәгсәдлә әввәлҹә мәхрәҹдәки чохһәдлини вуруглара ајырмалыјыг. $x^3-6x^2+11x-6=0$ тәнлијини һәлл едәрәк, онун $x_1=1$, $x_2=2$ вә $x_3=3$ көкләрини тапырыг:

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3).$$

Инди һәмин кәср үчүн

$$\frac{5x^2-x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \qquad (1)$$

ајрылышыны јазаг. Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини $(x-1)(x-2)(x-3)$ ифадәсинә вурсаг,

$$5x^2-x+3=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+$$
$$+C(x-1)(x-2) \qquad (2)$$

бәрабәрлијини аларыг. Бурадан A, B вә C әмсалларыны ики јолла тапмаг олар:

I. (2) бәрабәрлијиндә x-ә нөвбә илә $x=1$, $x=2$ вә $x=3$ гијмәтләрини версәк,

$$\begin{cases} 7=A\cdot(-1)\cdot(-2) \\ 21=B\cdot1\cdot(-1) \\ 45=C\cdot2\cdot1 \end{cases} \qquad (3)$$

хәтти тәнликләр системи алынар. Бурадан

$$A=\frac{7}{2},\ B=-21,\ C=\frac{45}{2}.$$

II. (2) бәрабәрлијинин саг тәрәфини каноник чохһәдли шәклиндә јазсаг,

$$5x^2 - x + 3 = (A + B + C)\,x^2 + (-5A - 4B - 3C)\,x + \\ + (6A + 3B + 2C)$$

олар. Бурадан, x-ин ејни дәрәҹәли гүввәтләринин әмсаллары-ны бәрабәр һесаб етмәклә

$$\begin{cases} A + B + C = 5, \\ -5A - 4B - 3C = -1, \\ 6A + 3B + 2C = 3 \end{cases} \qquad (4)$$

хәтти тәнликләр системини аларыг. Бу системи һәлл етдикдә әмсаллар үчүн јенә дә һәмин гијмәтләр тапылыр:

$$A = \frac{7}{2},\ B = -21,\ C = \frac{45}{2}.$$

Лакин (4) системи (3) системиндән чәтин һәлл олунур. Буна көрә дә бу мисалда I үсулла (аргументә гијмәтләр вермәклә) хәтти тәнликләр системи алыб, әмсаллары орадан тапмаг даһа әлверишлидир.

Нәтиҹәдә, (1) бәрабәрлији

$$\frac{5x^2 - x + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - 21\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{45}{2}\cdot\frac{1}{x-3}$$

шәклиндә олар вә

$$\int \frac{5x^2 - x + 3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\,dx = \frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-1} - 21\int\frac{dx}{x-2} + \frac{45}{2}\int\frac{dx}{x-3} =$$
$$= \frac{7}{2}\ln|x-1| - 21\ln|x-2| + \frac{45}{2}\ln|x-3| + C.$$

Мисал 2. $\int \frac{x^3 - 5x + 1}{x^4 - 3x^2 - 4}\,dx$ интегралыны һесабламалы. Бунун үчүн интеграл алтындакы расионал кәсрин мәхрәҹини вуруг-лара ајыраг:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 = (x^2 - 4)\,x^2 + (x^2 - 4) =$$
$$= (x^2 + 1)(x^2 - 4) = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2).$$

Онда расионал кәсри

$$\frac{x^3 - 5x + 1}{(x^2+1)(x-2)(x+2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

кими садә расионал кәсрләрә ајырмаг олар. Бурадан

$$x^3 - 5x + 1 = (Ax + B)(x-2)(x+2) + \\ + C(x^2+1)(x+2) + D(x^2+1)(x-2)$$

вә јахуд

$$x^3 - 5x + 1 = (A + C + D)\,x^3 + (B + 2C - 2D)\,x^2 + \\ + (-4A + C + D)\,x + (-4B + 2C - 2D)$$

бәрабәрлијини аларыг. x-ин ејни дәрәҹәли гүввәтләринин әм-

салларыны бәрабәр һесаб едәк:

$$\begin{cases} A + C + D = 1, \\ B + 2C - 2D = 0, \\ -4A + C + D = -5, \\ -4B + 2C - 2D = 1. \end{cases}$$

Бу хәтти тәнликләр системи һәлл едиләрәк әмсаллар

$$A = \frac{6}{5},\ B = -\frac{1}{5},\ C = -\frac{1}{20},\ D = -\frac{3}{20}$$

кими тапылыр. Демәли,

$$\int \frac{x^3 - 5x + 1}{x^4 - 3x^2 - 4}\,dx = \int \frac{\frac{6}{5}x - \frac{1}{5}}{x^2 + 1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{20}}{x-2}\,dx + \int \frac{-\frac{3}{20}}{x+2}\,dx =$$
$$= \frac{3}{5}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} - \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{20}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{3}{20}\int\frac{dx}{x+2} =$$
$$= \frac{3}{5}\ln(x^2+1) - \frac{1}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \frac{1}{20}\ln|x-2| - \frac{3}{20}\ln|x+2| + C.$$

Шәрһ етдијимиз үсул истәнилән расионал функсијанын ин-теграллanмасына тәтбиг олуна биләр. Лакин һәр бир расионал функсијанын интегралланмасына бу үсулу механики олараг тәтбиг етмәк олмаз. Бә'зи расионал функсијаларын интеграллары хүсуси јоллар вә әвәзләмәләр васитәсилә һесабламаг даһа әлвериш и олур. Мәсәлән,

$$\int \frac{x\,dx}{x^4 + 1}$$

интегралыны һесабламаг үчүн $\frac{x}{x^4 + 1}$ расионал кәсрини садә расионал кәсрләрә ајырмаға еһтијач јохдур. $x^2 = t$ әвәзләмә-синдән истифадә етсәк,

$$\int \frac{x\,dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x^2 + C.$$

Бурада бир ҹәһәти хүсуси гејд етмәк лазымдыр. Јухарыда көстәрдик ки, истәнилән расионал кәсрин интегралы принсип-ҹә һәмишә ахыра кими һесабланыр вә онун нәтиҹәси елемен-тар функсијаларла сонлу шәкилдә ифадә олунур. Бу чох мү-һүм вә әһәмијјәтли нәтиҹәдир. Һәр һансы бир функсијанын интегралыны мүәјјән чевирмә вә әвәзләмәләр васитәсилә расионал функсијанын интегралына кәтирмәк мүмкүн оларса, јухарыда көстәрилән үсулла һәмин интегралы һесабламаг олар.

Демәли, мүәјјән расионал функсијанын интегралына кәтири-лә билән һәр бир интеграл принсипҹә һәмишә тамамилә һесаблана биләр. Бу чох мүһүм тәклифдән охуҹу белә бир нәтиҹә чыхармамалыдыр ки, истәнилән елементар функсијанын интегралыны һәмишә сонлу сајда елементар функсијаларла көстәрмәк мүмкүн олур.

Бир чох елементар функсиjаларын интегралыны сонлу саjда елементар функсиjалар васитәсилә ифадә етмәк мүмкүн деjилдир. Мәсәлән, $\int \frac{dx}{\ln x}$ (интеграл логарифм), $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ (интеграл синус), $\int \frac{\cos x}{x}\, dx$ (интеграл косинус), $\int \sin x^2 \cdot dx$ вә $\int \cos x^2\, dx$ (Френел интеграллары), $\int e^{-x^2}\, dx$ (еһтималлар интегралы), $\int \frac{e^x\, dx}{x}$ (интеграл үстлү функсиjа) вә с. интегралларыны сонлу саjда елементар функсиjаларла ифадә етмәк мүмкүн деjилдир.

Биз кәләчәкдә көрәчәjик ки, jухарыда jаздығымыз интеграллар алтындакы функсиjаларын һамысынын ибтидаи функсиjалары вардыр, лакин бу ибтидаи функсиjалар елементар функсиjалар деjилдир.

Мәсәлән,

$$F_1'(x) = e^{-x^2},\ F_2'(x) = \frac{\sin x}{x},\ F_3'(x) = \frac{1}{\ln x}, \ldots$$

мүнасибәтләрини өдәjән $F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots$ ибтидаи функсиjалары геjри-елементар функсиjалардыр (XI, § 19).

$P_m(x)$ вә $Q_n(x)$ функсиjалары уjғун олараг m вә n дәрәчәли чәбри чохһәдлиләр олдугда,

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{Q_n(x)}}\, dx \tag{5}$$

интегралы да $n > 2$ олдугда, әксәр һалларда елементар функсиjаларла ифадә олунмур. $n = 3$ вә $n = 4$ олдугда (5) интегралына *еллиптик*, $n > 4$ олдугда исә она *һипереллиптик* интеграл деjилир. Хүсуси һалда,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x}} \text{ вә } \int \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x}\, dx$$

интеграллары уjғун олараг Лежандр шәклиндә *биринчи вә икинчи нөв еллиптик* интеграллар адланыр.

Геjд едәк ки, n натурал әдәд олдугда

$$\int \frac{\sin x}{x^n}\, dx,\ \int \frac{\cos x}{x^n}\, dx,\ \int \frac{e^x}{x^n}\, dx$$

интеграллары да елементар функсиjалар васитәсилә ифадә олунмур.

§ 8. САДӘ ИРРАСИОНАЛ ФУНКСИJАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

1. Истәнилән иррасионал функсиjанын (XI, § 20) интегралыны һәмишә һесабламаг вә нәтичәни елементар функсиjаларла ифадә етмәк мүмкүн олмур. Лакин елә садә иррасионал функсиjалар вар ки, онларын интегралыны расионал функсиjаларын интегралына кәтирмәк олар. Расионал функсиjаларын интегралыны исә һәмишә һесабламаг мүмкүндүр (§ 7).

Тутаг ки $U_1, U_2, \ldots, U_n$ дәjишәнләринә нәзәрән чохһәдли олан

$$P(U_1, \ldots, U_n) = \sum_{\kappa_1 + \cdots + \kappa_n < m} a_{\kappa_1, \ldots, \kappa_n} U_1^{\kappa_1} \ldots U_n^{\kappa_n}$$

вә

$$Q(U_1, \ldots, U_n) = \sum_{\kappa_1 + \cdots + \kappa_n < N} b_{\kappa_1, \ldots, \kappa_n} U_1^{\kappa_1} \ldots U_n^{\kappa_n}$$

верилмишдир. Онда

$$R(U_1, \ldots, U_n) = \frac{P(U_1, \ldots, U_n)}{Q(U_1, \ldots, U_n)}$$

шәклиндә ифадәjә $U_1, \ldots, U_n$ дәjишәнләринин расионал функсиjасы деjилир. Мәсәлән,

$$R(x, \sqrt{x}) = \frac{5x + 3(\sqrt{x})^3}{2\sqrt{x}},$$

$$R(\sqrt{x+1}, \sqrt{x}, x) = \frac{(\sqrt{x+1})\, x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 3x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 5 \sin x \cos x} \text{ вә с.}$$

2. Тутаг ки,

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right] dx \tag{1}$$

интегралыны һесабламаг лазымдыр. Бурада $r_1, r_2, \ldots, r_n$ расионал әдәдләрдир. $r_\kappa = \frac{p_\kappa}{q_\kappa}$ $(\kappa = \overline{1, n})$ кәсрләринин үмуми мәхрәчи N олдугда (1) интегралында

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N \tag{2}$$

әвәзләмәсини апармаг олар. Бу һалда $N r_\kappa = \mu_\kappa$ гәбул етмәклә

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_\kappa} = t^{N r_\kappa} = t^{\mu_\kappa}\ (\kappa = \overline{1, n}),$$

$$x = \frac{dt^N - b}{a - ct^N},\quad dx = \frac{dNt^{N-1}(a - ct^N) + cNt^{N-1}(dt^N - b)}{(a - ct^N)^2}\, dt$$

аларыг вә (1) интегралы

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right] dx =$$

$$= \int R\left[\frac{d \cdot t^N - b}{a - ct^N}, t^{\mu_1}, \ldots, t^{\mu_n}\right] \frac{(adN - cbN)\, t^{N-1}}{(a - ct^N)^2}\, dt$$

шәклиндә jазылар. Сағ тәрәфдәки интеграл алтындакы ифадә t-

нин расионал функсиjасыдыр. Беләликлә, (1) интегралы (2) әвәзләмәси васитәсилә расионал функсиjанын интегралына кәтирилир:

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right] dx = \int R_1(t)\,dt.$$

Расионал кәсрин интегралыны һесабладыгдан сонра t әвәзинә

$$t = \sqrt[N]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

јазмаг лазымдыр.

Гејд едәк ки, хүсуси һалда (1) интегралы

$$\int R(x, x^{r_1}, \ldots, x^{r_n})\,dx,$$

$$\int R[x, (ax+b)^{r_1}, \ldots, (ax+b)^{r_n}]\,dx$$

вә с. шәклиндә ола биләр.

Мисал 1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

Бу мәгсәдлә

$$x = t^6,\ dx = 6t^5\,dt$$

әвәзләмәсиндән истифадә едәк. Онда:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{t^2\cdot 6t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^5\,dt}{t+1} = 6\int\left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac65 t^5 - \frac32 t^4 + 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= \frac65\sqrt[6]{x^5} - \frac32\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

Мисал 2. $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ интегралыны һесабламаг үчүн $\sqrt{x-1}=t$ әвәзләмәсиндән истифадә етмәк лазымдыр:

$$\sqrt{x-1}=t,\ x-1=t^2,\ x=1+t^2,\ dx=2t\,dt.$$

Онда

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int(1+t^2)\,t\,2t\,dt = 2\int t^2\,dt + 2\int t^4\,dt =$$

$$= \frac23 t^3 + \frac25 t^5 + C = \frac23\sqrt{(x-1)^3} + \frac25\sqrt{(x-1)^5} + C.$$

§ 9. ЕЈЛЕР ӘВӘЗЛӘМӘЛӘРИ

Дәјишәни әвәзетмә васитәсилә

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,\ a\neq 0 \qquad (1)$$

шәклиндә һәр бир интеграл расионал функсиjанын инте-

гралына кәтирилир. Бу мәгсәдлә, Ејлер әвәзләмәләри адланан ашағыдакы үч әвәзләмәдән истифадә олунур.

I. Ејлерин биринчи

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t \qquad (2)$$

әвәзләмәси $a>0$ олдугда тәтбиг олунур (ишарәләрин истәнилән комбинасијасы көтүрүлә биләр). Бурада t јени дәјишәндир.

(2) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини квадрата јүксәлтсәк,

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2xt\sqrt{a} + t^2$$

олар. Бурадан

$$x = \frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}},$$

$$dx = \frac{(2bt \mp 2t^2\sqrt{a} \mp 2c\sqrt{a})}{(b\mp 2t\sqrt{a})^2}\,dt$$

аларыг. x-ин бу гијмәтини (2) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг $\sqrt{ax^2+bx+c}$ радикалы t-нин расионал функсиjасы кими ифадә олунар:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\mp t^2\sqrt{a} \pm bt \mp c\sqrt{a}}{b\mp 2t\sqrt{a}}.$$

Верилмиш (1) интегралы алтында x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ вә dx әвәзинә онларын t-нин расионал функсиjасы олан ифадәләрини јаздыгда t-нин расионал функсиjасынын интегралы алыныр:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R_1(t)\,dt.$$

II. Ејлерин икинчи әвәзләмәси, ax^2+bx+c квадрат үчһәдлисинин ики һәгиги x_1 вә x_2 көкләри олдугда тәтбиг олунур. Квадрат үчһәдлинин көкләри бәрабәр ($x_1 = x_2$) оларса, онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)^2} = (x-x_1)\sqrt{a}$$

олар ки, бу да (1) интегралы алтында x-ин расионал функсиjасы олдуғуну көстәрир. Буна көрә дә $x_1 \neq x_2$ һалына бахмаг кифајәтдир. Бу һалда әвәзләмә

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)\,t$$

кими көтүрүлүр. Бурадан

$$a(x-x_1)(x-x_2) = (x-x_1)^2t^2,\quad a(x-x_2) = (x-x_1)\,t^2,$$

$$x = \frac{ax_2 - x_1t^2}{a-t^2},\quad dx = \frac{2a(x_2-x_1)t}{(a-t^2)^2}\,dt$$

тапарыг. x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ вә dx үчүн тапдығымыз гијмәтләри (1) интегралында јеринә јазсаг, расионал функсиjанын интегралы алынар:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R\left[\frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2}, \left(\frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2} - x_1\right)t\right]\frac{2a(x_2-x_1)t}{(a-t^2)^2}\,dt = \int R_2(t)\,dt.$$

Гејд. Ејлерин биринчи вә икинчи әвәзләмәләри (1) шәклиндә бүтүн интеграллары һесабламаг үчүн кифајәтдир. *Доғрудан да, $a > 0$ олдугда* биринчи әвәзләмә тәтбиг олунур, $a < 0$ олдугда исә $ax^2 + bx + c$ квадрат үчһәдлисинин көкләри һәгиги олмалыдыр. Чүнки $a < 0$ олдугда көкләр $(\alpha + i\beta)$ вә $(\alpha - i\beta)$ кими комплекс әдәдләр оларса, онда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a[x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)]} = \sqrt{a[(x - \alpha)^2 + \beta^2]}$$

олар ки, бу да көкалты ифадәнин мәнфи олдуғуну көстәрир. Бу һала исә һәгиги дәјишәнли функсијалар нәзәријјәсиндә, јә'ни ријази анализ курсунда бахылмыр.

Ејлерин биринчи вә икинчи әвәзләмәләри (1) шәклиндә бүтүн интеграллары һесабламаг үчүн кифајәт етдијинә бахмајараг, $c > 0$ олдугда Ејлерин үчүнчү әвәзләмәси адланан

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt \tag{3}$$

әвәзләмәси дә тәтбиг едилир. Бурадан x дәјишәни үчүн t-нин расионал функсијасы кими тапылмыш гијмәти васитәсилә $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ вә dx ифадәләри t-нин расионал функсијасы кими ифадә олунур. Нәтиҹәдә, (1) интегралы t дәјишәнинин расионал функсијасынын интегралына кәтирилмиш олур.

Мисал. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + q}}$ $(q \neq 0)$ интегралыны һесабламаг үчүн Ејлерин биринчи әвәзләмәсини

$$\sqrt{x^2 + q} = t - x, \quad t = x + \sqrt{x^2 + q}$$

шәклиндә көтүрәк. Онда

$$x^2 + q = t^2 - 2xt + x^2; \quad x = \frac{t^2 - q}{2t},$$

$$dx = \frac{t^2 + q}{2t^2}\, dt, \quad \sqrt{x^2 + q} = t - \frac{t^2 - q}{2t} = \frac{t^2 + q}{2t}.$$

Бурадан

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + q}} = \int \frac{2t}{t^2 + q} \cdot \frac{t^2 + q}{2t^2}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 + q}\right| + C.$$

Нәһајәт, гејд едәк ки, (1) интегралынын тәбии үмумиләшмәси

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right) dx$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right) dx$$

шәклиндә олан интеграллардыр. Бунлар да, еллиптик интеграллар адланыр (§ 7).

Еллиптик интеграллар, бир сыра хүсуси һаллар мүстәсна олмагла, елементар функсијалар васитәсилә ифадә олунмур.

§ 10. БИНОМИАЛ ДИФЕРЕНСИАЛЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

m, n, p расионал әдәдләр, a вә b ихтијари һәгиги әдәдләр олдугда

$$x^m (a + bx^n)^p\, dx$$

шәклиндә ифадәјә ***биномиал диференсиал*** дејилир. Биномиал диференсиалын

$$J = \int x^m (a + bx^n)^p\, dx \tag{1}$$

интегралыны һесабламаг үчүн ону

$$x^n = t, \quad x = t^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n}\, t^{\frac{1}{n} - 1}\, dt$$

әвәзләмәси васитәсилә

$$J = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n} - 1} (a + bt)^p\, dt \tag{2}$$

шәклинә кәтирәк.

Биномиал диференсиалын интегралы ашағыдакы үч һалда сонлу сајда елементар функсијаларла көстәрилә биләр:

I. p там әдәддир. Онда $\frac{m+1}{n} - 1 = \frac{r}{s}$ расионал әдәд олдуғундан $t = U^s$, $dt = sU^{s-1}dU$ әвәзләмәсиндән истифадә едилир:

$$J = \frac{s}{n} \int U^{r+s-1} (a + bU^s)^p\, dU. \tag{3}$$

Интеграл алтындакы ифадә U дәјишәнинә нәзәрән расионал функсија олдуғундан (3) интегралы елементар функсијаларла ифадә олунар. Нәтиҹәдә U әвәзинә $x^{\frac{n}{s}}$ јазараг, (1) интегралынын гијмәтини аларыг.

II. $\frac{m+1}{n}$ там әдәддир. Бу һалда $p = \frac{\nu}{\mu}$ расионал әдәддир вә (2) интегралында

$$a + bt = V^\mu, \quad t = \frac{1}{b}(V^\mu - a), \quad dt = \frac{\mu}{b} V^{\mu-1} dV$$

әвәзләмәсини апармаг олар. Онда

$$J = \frac{\mu}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int V^{\nu+\mu-1} (V^\mu - a)^{\frac{m+1}{n} - 1}\, dV \tag{4}$$

алыныр. Бу интеграл алтындакы ифадә V дәјишәнинин расионал функсијасыдыр. Расионал функсијанын интегралы исә елементар функсијалар васитәсилә ифадә олунур.

III. $\frac{m+1}{n} + p$ там әдәддир. Бу һалда (2) интегралыны ра-

сионал функсиjанын интегралына кәтирмәк үчүн ону

$$J = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{p} dt$$

шәклиндә jазмаг вә

$$\frac{a+bt}{t} = z^{\mu},\ t = \frac{a}{z^{\mu}-b},\quad dt = -\frac{a\mu z^{\mu-1}}{(z^{\mu}-b)^2}\,dz,\ p = \frac{\nu}{\mu}$$

әвәзләмәсиндән истифадә етмәк лазымдыр. Онда

$$J = -\frac{\mu a^{\frac{m+1}{n}+p}}{n}\int\frac{z^{\nu+\mu-1}\,dz}{(z^{\mu}-b)^{\frac{m+1}{n}+p+1}}$$

алыныр ки, бурада да интеграл алтындакы ифадә z дәјишәнинин расионал функсиjасыдыр. Расионал функсиjанын интегралы исә һесабланыр вә нәтичәси елементар функсиjаларла ифадә олунур.

Беләликлә, jухарыда көстәрилән үч һалда (1) интегралынын һәм һесабланa билдиjини вә һәм дә һансы үсулла һес бландығыны көстәрдик.

П. Л. Чебышев[1] көстәрмишдир ки, (1) интегралы анчаг jухарыда көстәрилән үч һалда сонлу шәкилдә интегралланыр вә нәтичәси сонлу саjда елементар функсиjаларла ифадә олунур. p, $\frac{m+1}{n}$ вә $\frac{m+1}{n}+p$ әдәдләринин һеч бири там әдәд деjилсә, онда биномиал диференсиалын (1) интегралы һеч бир үсулла сонлу саjда елементар функсиjалар васитәсилә кәстәрилә билмәз.

Мисал 1. $J = \int\sqrt[3]{x}\,(1+\sqrt{x})^2 dx$ интегралыны һесабламалы.

Бурада $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{2}$ вә $p = 2$ олдуғундан I һалда көстәрилән шәрт (p-нин там әдәд олмасы) өдәнилир. Буна көрә дә верилмиш интегралы әввәлчә

$$\sqrt{x} = t,\ x = t^2,\ dx = 2t\,dt$$

әвәзләмәсиндән истифадә едәрәк

$$J = 2\int t^{\frac{5}{3}}(1+t)^2\,dt$$

шәклинә кәтирмәк, сонра исә

$$t = U^3,\ dt = 3U^2 dU$$

әвәзләмәсиндән истифадә етмәк лазымдыр. Онда

[1] П. Л. Чебышев (1821—1894) мәшһур рус риjазиjjатчысыдыр.

$$J = 6\int U^7(1+U^3)^2\,dU = 6\int U^7 dU + 12\int U^{10} dU + 6\int U^{13} dU =$$

$$= \frac{3}{4}U^8 + \frac{12}{11}U^{11} + \frac{3}{7}U^{14} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} +$$

$$+ \frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C.$$

Мисал 2. $J = \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ интегралыны елементар функсиjалар васитәсилә көстәрмәк мүмкүн деjилдир. Чүнки $m = 0$, $n = 4$ вә $p = -\frac{1}{2}$ олдуғундан $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{4}$ вә $\frac{m+1}{n}+p = \frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ әдәдләринин һеч бири там әдәд олмур.

Мисал 3. $J_n = \int\sqrt[n]{1+x^n}\,dx\ (n \geqslant 2)$ интегралыны һесабламалы.

Бурада $m = 0$, $n = n$ вә $p = \frac{1}{n}$ олдуғундан $p = \frac{1}{n}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{n}$ вә $\frac{m+1}{n}+p = \frac{2}{n}$ әдәдләринин һеч бири $n \neq 2$ олдугда там әдәд ола билмәз. $n = 2$ олдугда исә $\frac{m+1}{n}+p$ әдәди там олур, jә'ни III һалда көстәрилән шәрт өдәнилир. Демәли, J_n интегралыны $n \neq 2$ олдугда елементар функсиjаларла көстәрмәк мүмкүн деjилдир. $n = 2$ олдугда исә

$$J_2 = \int\sqrt{1+x^2}\,dx$$

интегралыны расионал функсиjанын интегралына кәтирмәк үчүн

$$t = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}},\ x = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}},\quad dx = -\frac{t\,dt}{(t^2-1)^{3/2}}$$

әвәзләмәсиндән истифадә етмәк олар. Онда:

$$J_2 = -\int\frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2} = -\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{t+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt = -\frac{1}{4}\left[\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} - \ln|t+1| -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t+1}\right] = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{t}{2(t^2-1)} + C.$$

Бурада t әвәзинә $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$ ифадәсини jазсаг, аларыг:

$$J_2 = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + x\sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

§ 11. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКСИЈАЛАР ДАХИЛ ОЛАН ИФАДӘЛӘРИН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

1. Универсал әвәзләмә. Тутаг ки,

$$\int R(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \sec x,\ \operatorname{cosec} x)\, dx \qquad (1)$$

шәклиндә интегралын һесабланмасы тәләб олунур. $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ вә $\operatorname{cosec} x$ функсијалары һесаб әмәлләри васитәсилә $\sin x$ вә $\cos x$ илә ифадә олундуғундан

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x = \frac{1}{\cos x},\quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

(1) интегралы һәмишә

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\ dx \qquad (2)$$

шәклиндә интеграла чеврилир. Буна көрә дә анчаг (2) интегралынын һесабланмасы илә мәшғул олаг.

(2) интегралында

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \qquad (3)$$

әвәзләмәсини апараг:

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Онда һәмин интеграл t дәјишәниндән асылы расионал функсијанын интегралына чеврилир:

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R(t)\,dt.$$

Расионал функсијанын интегралы исә һесаблана билир.

Демәли, (2) шәклиндә һәр бир интеграл (3) әвәзләмәси васитәсилә расионал функсијанын интегралына кәтирилир. Буна көрә дә (3) әвәзләмәсинә *„универсал тригонометрик әвәзләмә“* дејилир. Универсал тригонометрик әвәзләмә бә'зән чох мүрәккәб расионал функсијанын интегралына кәтирир. Белә һалларда дикәр әвәзләмәләрдән истифадә етмәк даһа фајдалы олур.

Мисал 1. $J_1 = \int \frac{dx}{\sin^2 x}$ интегралыны һесабламаг үчүн (3) әвәзләмәсиндән истифадә едәк. Онда

$$J_1 = \int\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^2 \frac{2\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{2}t + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

2. $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ шәклиндә интеграллар. Бурада m вә n расионал әдәдләр олдугда $t = \sin x$ вә ја $t = \cos x$ әвәзләмәси васитәсилә верилмиш интеграл биномиал диференсиалын интегралына кәтирилир. Доғрудан да, $t = \cos x$ әвәзләмәсини көтүрсәк, онда

$$\sin x = (1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1-t^2)^{\frac{1}{2}},\quad dt = -\sin x\, dx$$

$$dx = -(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

олур вә верилмиш интеграл

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\int t^n (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}}\, dt$$

шәклинә кәтирилир ки, бу да биномиал диференсиалын интегралыдыр (§ 10). m вә n там әдәдләр олдугда верилмиш интеграл ја билаваситә һесабланан интеграла, ја да расионал функсијанын интегралына кәтирилир.

а) Тутаг ки, $m = 2к+1$ (m истәнилән там әдәддир). Онда верилмиш интеграл $t = \cos x$ әвәзләмәси васитәсилә расионал функсијанын интегралына кәтирилир:

$$\int \sin^{2к+1} x\cdot\cos^n x\, dx = -\int \sin^{2к} x\cdot\cos^n x\, d(\cos x) =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^к \cos^n x\, d(\cos x) = -\int (1-t^2)^к t^n\, dt.$$

б) $n = 2к+1$ (n истәнилән там әдәддир) олдугда $t = \sin x$ әвәзләмәси васитәсилә верилмиш интеграл расионал функсијанын интегралына кәтирилир.

в) m вә n әдәдләринин һәр икиси $m = 2к > 0$ вә $n = 2N > 0$ кими мүсбәт чүт әдәдләр олдугда

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,\quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \qquad (4)$$

дүстурлары васитәсилә верилмиш интеграл

$$\int \sin^{2к} x \cos^{2N} x\, dx = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^к\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^N dx$$

кими јазылыр. Интеграл алтындакы икиһәдлиләри көстәрилән дәрәчәдән гүввәтә јүксәлтдикдән сонра $\cos 2x$-ин гүввәтләринә нәзәрән чохһәдли алыныр. Тәкдәрәчәли һәдләр б) һалында көстәрилән гајда илә һесабланыр. Чүтдәрәчәли һәдләрин интегралыны исә (4) дүстурларыны јенидән тәтбиг етмәклә кичик дәрәчәли гүввәтләрин интегралына кәтирирләр. Бу просес $\int \cos кx\, dx$ интегралына кәлиб чыхана гәдәр давам етдирилир.

d) m вә n әдәдләринин һеч олмаса бири мәнфи чүт әдәд олдугда $t = \operatorname{tg} x$ вә јахуд $t = \operatorname{ctg} x$ әвәзләмәси васитәсилә ве-

рилмиш интеграл ја билаваситә һесабланан интеграла, ја да расионал функсијанын интегралына кәтирилир.

Мисал 2. $J_2 = \int \cos^4 x\, dx$ интегралыны һесабламаг үчүн (4) дүстурларынын икинчисиндән ис ифадә едәк:

$$J_2 = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x +$$

$$+ \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3. Тригонометрик функсијаларын һасили дахил олан

$$\int \sin\alpha x \sin\beta x\, dx, \quad \int \sin\alpha x \cos\beta x\, dx, \quad \int \cos\alpha x \cos\beta x\, dx$$

интеграллары

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right],$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right]$$

дүстурларыны тәтбиг етдикдә билаваситә һесабланыр.

4. Тригонометрик функсијалар дахил олан

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx \text{ вә } \int e^{\alpha x}\sin\beta x\, dx$$

интегралларыны һесабламаг үчүн

$$(e^{\alpha x}\cos\beta x)' = e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x),$$

$$(e^{\alpha x}\sin\beta x)' = e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)$$

бәрабәрликләриндән интегралалты функсијалары тапаг:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}(e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x)' + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}(e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x)',$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}(e^{\alpha x}\sin\beta x)' - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}(e^{\alpha x}\cos\beta x)'.$$

Бу бәрабәрликләри интегралласаг, аларыг:

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx = \frac{(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2} + C,$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\, dx = \frac{(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2} + C.$$

5. Һиссә-һиссә интеграллама үсулуну тәтбиг етмәклә

$$\int x^n\cos\alpha x\, dx, \quad \int x^n\sin\alpha x\, dx, \quad \int x^n e^{\alpha x}\, dx,$$

$$\int x^n \arcsin x\, dx, \quad \int x^n \arccos x\, dx, \quad \int x^n \operatorname{arctg} x\, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arcctg} x\, dx$$

интегралларыны һесабламаг олар.

Мисал 3. $J_2 = \int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$ интегралыны һиссә-һиссә интеграллама үсулу илә һесаблајаг:

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = x^2\, dx,$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

Онда

$$J_2 = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x -$$

$$- \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

XXII ФӘСИЛ

МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛ

§ 1. ИНТЕГРАЛ ҸӘМИ ВӘ МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ТӘ'РИФИ

Сонлу $[a, b]$ парчасында јерләшән вә

$$a = x_0 < x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b$$

мүнасибәтини өдәјән $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нөгтәләри верилдикдә, дејирләр ки, $[a, b]$ парчасы кичик $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$ һиссәләринә бөлүнмүшдүр. Бу бөлкүнү бир һәрфлә ишарә едирләр:

$$T = T\,[a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b]. \qquad (1)$$

$[x_k, x_{k+1}]$ парчасынын узунлуғуну Δx_k илә ишарә едәк: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Δx_k $(k = \overline{0, n-1})$ әдәдләринин ән бөјүјү T бөлкүсүнүн параметри адланыр вә $\lambda(T)$ илә ишарә олунур:

$$\lambda = \lambda(T) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \Delta x_k. \qquad (2)$$

Тутаг ки, $y = f(x)$ функсијасы сонлу $a \leqslant x \leqslant b$ парчасында тә'јин олунмушдур. $[a, b]$ парчасынын бөлүндүјү кичик $[x_k, x_{k+1}]$ парчаларынын һәр биринин дахилиндә ихтијари бир $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$ нөгтәси көтүрүб ашағыдакы кими ҹәм дүзәлдәк:

$$\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \qquad (3)$$

Бу ҹәмин гијмәти $[a, b]$ парчасынын T бөлкүсүндән вә ξ_k нөгтәләринин сечилмәсиндән асылыдыр. (3) ҹәминә $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында *интеграл ҹәми* дејилир.

Тә'риф 1. Тутаг ки, сонлу J вә истәнилән кичик мүсбәт ε әдәди үчүн елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, $[a, b]$ парчасынын $\lambda(T) < \delta$ шәртини өдәјән ихтијари T бөлкүсү вә $\xi_к \in [x_к, x_{к+1}]$ $(к = \overline{0, n-1})$ нөгтәләри үчүн

$$|J_n(T) - J| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда J әдәдинә $J_n(T)$ интеграл чәминин $\lambda(T) \to 0$ шәртиндә лимити дејилир вә

$$J = \lim_{\lambda(T)\to 0} J_n(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{к=0}^{n-1} f(\xi_к)\,\Delta x_к$$

кими јазылыр.

Интеграл чәминин (вә ја буна охшар башга ифадәләрин) лимити, ардычыллығын вә функсијанын лимити анлајышларындан фәргли олан јени анлајышдыр.

Тә'риф 2. $f(x)$ функсијасы үчүн $[a, b]$ парчасында дүзәлмиш (3) интеграл чәминин $\lambda(T)\to 0$ шәртиндә сонлу J лимити варса, онда $f(x)$ функсијасына $[a, b]$ парчасында интегралланан функсија, J әдәдинә исә онун $[a, b]$ парчасында мүәјјән интегралы дејилир вә $\int_a^b f(x)\,dx$ илә ишарә едилир:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{к=0}^{n-1} f(\xi_к)\,\Delta x_к. \qquad (4)$$

Бурада $f(x)$ функсијасы интегралалты функсија, a вә b әдәдләри, ујғун олараг, мүәјјән интегралын ашағы вә јухары сәрһәдләри, x дәјишәни исә интеграллама дәјишәни адланыр.

Тә'рифдән ајдындыр ки, мүәјјән интегралын гијмәти интеграллама дәјишәниндән асылы дејилдир:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \cdots$$

Мүәјјән интегралын тә'рифинә әлавә олараг гејд едәк ки, $a = b$ олдугда мүәјјән интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

бәрабәрлији илә, $a > b$ олдугда исә

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

кими тә'јин олунур.

Мүәјјән интегралын тә'рифини биринчи дәфә Риман[1] вердијиндән бә'зән (3) чәминә *Риманын интеграл чәми*, (4) интегралына исә *Риман интегралы* дејилир.

[1] Бернгар Риман (1826—1866) мәшһур алман ријазијјатчысыдыр.

Мүәјјән интегралын тә'рифи һаггында бир мәсәләни бурада хүсуси гејд етмәк лазымдыр. Әкәр $[a, b]$ парчасынын T бөлкүсү үчүн $\lambda(T)\to 0$ шәрти өдәнилирсә, онда $[a, b]$ парчасынын ајрылдығы кичик $[x_к, x_{к+1}]$ парчаларынын сајы олан n әдәди дә сонсузлуға јахынлашар. Бунун тәрси исә доғру дејилдир. $[a, b]$ парчасыны кичик һиссәләрә елә бөлмәк олар ки, бөлкүдән алынан кичик $[x_к, x_{к+1}]$ һиссәләринин сајы сонсузлуға јахынлашдығы $(n\to\infty)$ һалда, бөлкүнүн параметри $\lambda(T)$ сыфра јахынлашмаз $(\lambda(T) \not\to 0)$. Лакин $[a, b]$ парчасы бәрабәр һиссәләрә бөлүндүкдә $\lambda(T)\to 0$ вә $n\to\infty$ мүнасибәтләри еквивалент олур. Бу һалда интегралын (4) тә'рифини

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{к=0}^{n-1} f(\xi_к)\,\Delta x_к \qquad (5)$$

кими јазмаг олар.

$[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш истәнилән $f(x)$ функсијасынын һәмин парчада мүәјјән интегралы вармы?

Хејр, јохдур. Һәр шејдән әввәл, $[a, b]$ парчасында интегралланан функсија һәмин парчада һөкмән мәһдуд олмалыдыр. Чүнки әкәр $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында гејри-мәһдуд оларса, онда $\xi_к$ нөгтәләрини елә сечмәк олар ки, (3) интеграл чәми мүтләг гијмәтчә истәнилән гәдәр бөјүк әдәд олсун. Белә чәмин исә сонлу лимити ола билмәз.

Демәли, $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасынын мәһдуд олмасы, онун һәмин парчада интегралланан олмасы үчүн зәрури шәртдир. Лакин бу зәрури шәрт, јә'ни функсијанын мәһдуд олмасы, онун интегралланан олмасы үчүн кафи дејилдир. Мәсәлән, $[0, 1]$ парчасында тә'јин олунмуш мәһду $D(x)$ Дирихле функсијасынын (XI, § 6) һәмин парчада мүәјјән интегралы јохдур. Доғрудан да, $[0, 1]$ парчасынын ихтијари T бөлкүсүнү апарараг әввәлчә $\xi_к$ нөгтәләри олараг ујғун кичик парчаларда расионал нөгтәләри, сонра исә $\xi_к$ нөгтәләри олараг иррасионал нөгтәләри көтүрсәк вә ујғун интеграл чәмләри дүзәлтсәк, онда ујғун олараг $J_n(T) = \sum_{к=0}^{n-1} 1\cdot\Delta x_к = 1 - 0 = 1$ вә $J_n(T) = \sum_{к=0}^{n-1} 0\cdot\Delta x_к = 0$ олар. Буна көрә дә $J_n(T)$ чәминин $\lambda(T)\to 0$ шәртиндә $\xi_к$ нөгтәләринин сечилмәсиндән асылы олмајан лимити јохдур, јә'ни $D(x)$ функсијасы $[0, 1]$ парчасында интегралланан дејилдир.

Мәһдуд функсијаларын интегралланан олмасы үчүн кафи шәртләр сонракы параграфларда көстәрилир.

Мисал 1. $\int_a^b x\,dx \ (a < b)$ интегралыны һесабламалы.

Бу мәгсәдлә $[a, b]$ парчасыны ашағыдакы нөгтәләрлә n бәрабәр һиссәјә бөләк:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h, \ldots,\ x_{n-1} = a + (n-1)h,$$
$$x_n = a + nh = b.$$

Бурада $\Delta x_k = h = \frac{b-a}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. ξ_k нөгтәси олараг $[x_k, x_{k+1}]$ парчасынын сол учуну көтүрәрәк, $f(x) = x$ функсијасы үчүн интеграл чәми дүзәлдәк:

$$J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a + kh)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a +$$
$$+ \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}k = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = a(b-a) +$$
$$+ \frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Бурада биз $1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ мүнасибәтиндән истифадә етдик (әдәди силсиләнин чәми). Ајдындыр ки,

$$\lim_{n\to\infty} J_n(T) = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right) =$$
$$= (b-a)\frac{a+b}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

вә ја

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Мисал 2. $\int_0^\pi \sin x\,dx$ интегралыны һесабламалы[1].

Бу һалда $[0, \pi]$ парчасыны $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{n},\ x_2 = 2\frac{\pi}{n}, \ldots,\ x_n = \pi$ нөгтәләри васитәсилә n бәрабәр һиссәјә бөләрәк вә ξ_k нөгтәләри олараг ујғун кичик парчаларын сағ учуну сечәрәк $f(x) = \sin x$ функсијасы үчүн интеграл чәми дүзәлдәк:

$$J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+1)\frac{\pi}{n}\cdot\Delta x_k = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

Бу чәми тапмаг үчүн онун үзәриндә ашағыдакы чевирмәләри апараг:

$$J_n(T) = \frac{\pi}{2n\cdot\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n} =$$

[1] $\int_a^b x\,dx$ вә $\int_0^\pi \sin x\,dx$ интегралларынын варлығы 4-чү параграфын 1-чи теореминдән ајдындыр.

$$= \frac{\pi}{2n\cdot\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right)\right] =$$
$$= \frac{\pi}{2n\cdot\sin\frac{\pi}{2n}}\left[\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2n}\right)\right] = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\ 2\cos\frac{\pi}{2n}.$$

Бурадан

$$\lim_{n\to\infty} J_n(T) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot 2\cos\frac{\pi}{2n}\right) = 2$$

вә ја

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = 2.$$

Бу мисаллар көстәрир ки, мүәјјән интегралын, тә'рифинә әсасән, јә'ни интеграл чәминин лимити кими һесабланмасы мүрәккәб чәмләрин лимитинин һесабланмасы илә бағлыдыр. Мүәјјән интегралларын садә һесабланма үсуллары илә кәләчәкдә (§ 8, § 9) таныш олачағыг.

§ 2. ДАРБУ ЧӘМЛӘРИ

Сонлу $[a, b]$ парчасында мәһдуд олан ихтијари $f(x)$ функсијасы көтүрәк. $[a, b]$ парчасынын истәнилән

$$T\,[a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b]$$

бөлкүсү үчүн тә'јин олунмуш

$$m_k = \inf_{x_k < x < x_{k+1}} f(x),\ (k = \overline{0, n-1})$$

вә

$$M_k = \sup_{x_k < x < x_{k+1}} f(x),\ (k = \overline{0, n-1})$$

кәмијјәтләри васитәсилә ашағыдакы чәмләри дүзәлдәк:

$$s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k, \quad (1)$$

$$S_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k. \quad (2)$$

Бу чәмләрә $f(x)$ функсијасынын, ујғун олараг, *ашағы вә јухары Дарбу*[1] *чәмләри* вә ја ашағы вә јухары *интеграл чәмләри* дејилир. Ајдындыр ки,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

[1] Гастон Дарбу (1842—1917) франсыз ријазијјатчысыдыр.

бәрабәрсизлијини өдәјән һәр бир мәһдуд $f(x)$ функсијасы үчүн
$$m(b-a) \leqslant s_n(T) \leqslant S_n(T) \leqslant M(b-a) \qquad (3)$$
олар. Доғрудан да, $m_k \leqslant M_k$ вә $\Delta x_k \geqslant 0 \ (k=0, 1, \dots, n-1)$ олдуғундан
$$s_n(T)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S_n(T)$$
аларыг. Бундан башга,
$$S_n(T)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = (b-a)M$$
вә
$$s_n(T)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \geqslant m \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = (b-a)m.$$

Дарбу чәмләринин даһа ики мүһүм хассәси вардыр:

Хассә 1. $[a, b]$ *парчасынын T бөлкү нөгтәләри сырасына јени бөлкү нөгтәләри әлавә етдикдә ашағы Дарбу чәми азалмаз, јухары Дарбу чәми исә артмаз.*

Доғрудан да, тутаг ки, $[a, b]$ парчасынын
$$T = T[a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b]$$
бөлкү нөгтәләри сырасына јени бир x_k' нөгтәси әлавә олунмушдур:
$$T' = T'[a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_k' < x_{k+1} < \cdots < x_n = b].$$
Бу T вә T' бөлкүләринә ујғун олан ашағы Дарбу чәмләри үчүн һәмишә
$$s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = m_0 \Delta x_0 + \cdots + m_k \Delta x_k + \cdots +$$
$$+ m_{n-1} \Delta x_{n-1} \leqslant m_0 \Delta x_0 + \cdots + (m_k' \Delta x_k' + m_k'' \Delta x_k'') + \cdots +$$
$$+ m_{n-1} \Delta x_{n-1} = s_n(T')$$
бәрабәрсизлији доғру олар. Бурада
$$m_k' = \inf_{x_k < x < x_k'} f(x), \quad m_k'' = \inf_{x_k' < x < x_{k+1}} f(x), \quad \Delta x_k' = x_k' - x_k$$
$$\Delta x_k'' = x_{k+1} - x_k', \quad m_k \leqslant m_k', \quad m_k \leqslant m_k'', \quad \Delta x_k = \Delta x_k' + \Delta x_k''$$
мүнасибәтләри нәзәрә алынмышдыр.

Ејни мүһакимә илә јухары Дарбу чәмләри үчүн $S_n(T) \geqslant S_n(T')$ бәрабәрсизлијинин доғрулуғуну јохламаг олар.

Хассә 2. *Истәнилән бир T_1 бөлкүсүнә ујғун олан ашағы*

$s_n(T_1)$ Дарбу чәми, ихтијари башга бир T_2 бөлкүсүнә ујғун олан јухары $S_n(T_2)$ Дарбу чәминдән бөјүк ола билмәз.

Доғрудан да, T_1 вә T_2 бөлкүләринин бирләшмәсиндән ибарәт олан бөлкүнү $T_1 U T_2$ илә ишарә етсәк, 1-чи хассәјә вә (3) мүнасибәтинә көрә
$$s_n(T_1) \leqslant s_n(T_1 U T_2) \leqslant S_n(T_1 U T_2) \leqslant S_n(T_2).$$

(3) бәрабәрсизлијиндән ајдындыр ки, һәр бир мәһдуд $f(x)$ функсијасынын бүтүн ашағы Дарбу чәмләри јухарыдан, бүтүн јухары Дарбу чәмләри исә ашағыдан мәһдуддур:
$$s_n(T) \leqslant M(b-a), \quad m(b-a) \leqslant S_n(T).$$

Буна көрә дә
$$J_* = \sup\{s_n(T)\}, \quad J^* = \inf\{S_n(T)\}$$
кәмијјәтләри сонлу олар (IX, § 9). 2-чи хассәјә вә (3) мүнасибәтинә көрә исә ихтијари $s_n(T)$ вә $S_n(T)$ Дарбу чәмләри үчүн ашағыдакы мүнасибәт доғрудур:
$$s_n(T) \leqslant J_* \leqslant J^* \leqslant S_n(T). \qquad (4)$$

J_* вә J^* әдәдләринә, ујғун олараг *ашағы вә јухары Дарбу интегралы* дејилир.

§ 3. МУӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ВАРЛЫГ МӘСӘЛӘСИ

Тутаг ки, $f(x)$ сонлу $[a, b]$ парчасында мәһдуд функсијадыр. $[a, b]$ парчасынын ихтијари T бөлкүсү үчүн интеграл вә Дарбу чәмләри дүзәлдәк:
$$J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k,$$
$$s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k,$$
$$S_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Бурада $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$ ихтијари нөгтәләр олдуғундан $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$ бәрабәрсизлијини вә буна көрә дә
$$s_n(T) \leqslant J_n(T) \leqslant S_n(T) \qquad (1)$$
бәрабәрсизлијини јаза биләрик. Бундан башга, Дарбу чәмләри үчүн
$$S_n(T) - s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} [M_k - m_k] \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k, \qquad (2)$$
$$s_n(T) = \inf\{J_n(T)\}, \quad S_n(T) = \sup\{J_n(T)\} \qquad (3)$$
мүнасибәтләрини алмаг олар. Бурада $\omega_k = M_k - m_k$ кәмијјәтинә $f(x)$ функсијасынын $[x_k, x_{k+1}]$ парчасында *рәгси* дејилир.

Теорем. *$[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш мәһдуд $f(x)$ функсијасынын бу парчада интеграллана олмасы үчүн*

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} [S_n(T) - s_n(T)] = 0 \qquad (4)$$

мүнасибәтинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интеграллана билир вә $J = \int_a^b f(x)\,dx$ онун мүәјјән интегралыдыр. Онда мүәјјән интегралын тә'рифинә көрә истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, $\lambda(T) < \delta$ шәртини өдәјән ихтијари T бөлкүсү вә ихтијари $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ нөгтәләри үчүн

$$|J_n(T) - J| < \varepsilon \text{ вә ја } J - \varepsilon < J_n(T) < J + \varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан, (3) бәрабәрликләринә әсасән

$$J - \varepsilon < s_n(T) \leqslant S_n(T) < J + \varepsilon$$

мүнасибәти алыныр ки, бу да

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} s_n(T) = J, \quad \lim_{\lambda(T)\to 0} S_n(T) = J$$

вә ја тәләб олунан

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} [S_n(T) - s_n(T)] = 0$$

бәрабәрлијинин доғру олдуғуну көстәрир.

Шәртин кафилији. Тутаг ки, (4) бәрабәрлији өдәнилир. Онда әввәлки параграфдакы (4) мүнасибәтинә көрә $J_* = J^*$ олар вә $J = J_* = J^*$ әдәди үчүн

$$s_n(T) \leqslant J \leqslant S_n(T) \qquad (5)$$

бәрабәрсизлији өдәниләр.

(1) вә (5) бәрабәрсизликләриндән чыхыр ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, $\lambda(T) < \delta$ шәртини өдәјән ихтијари T бөлкүсү үчүн

$$|J_n(T) - J| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} J_n(T) = J$$

алыныр ки, бу да $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында интеграллана олдуғуну көстәрир.

(2) бәрабәрлијинә әсасән ашағыдакы нәтиҹә алыныр:

$[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш мәһдуд $f(x)$ функсијасынын бу парчада интеграллана олмасы үчүн

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0 \qquad (6)$$

мүнасибәтинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

§ 4. КӘСИЛМӘЈӘН ВӘ МОНОТОН ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНА ОЛМАСЫ

Теорем 1. *$[a, b]$ парчасында кәсилмәз $f(x)$ функсијасы һәмин парчада интеграллана билир.*

Исбаты. Мә'лумдур ки, парчада кәсилмәјән функсија һәмин парчада мәһдуддур (XIII, § 8) вә мүнтәзәм кәсилмәјәндир (XIII, § 10). Буна көрә дә ихтијари $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ әдәди үчүн елә $\delta_0 > 0$ вар ки, $[a, b]$ парчасынын $|x' - x''| < \delta_0$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари x', x'' нөгтәләриндә

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Инди ихтијари $\delta_0 > 0$ әдәди үчүн $[a, b]$ парчасынын бөлкүсүнү елә көтүрәк ки, $\lambda(T) < \delta_0$ олсун. Бу һалда $f(x)$ функсијасынын истәнилән $[x_k, x_{k+1}]$ парчасында рәгси

$$\omega_k = M_k - m_k = [f(x_k') - f(x_k'')] = |f(x_k') - f(x_k'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

мүнасибәтини өдәјәр. Бурада биз, $[x_k, x_{k+1}]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасынын һеч олмаса бир x_k' нөгтәсиндә һәмин парчадакы ән бөјүк гијмәтини $M_k = f(x_k')$, һеч олмаса бир x_k'' нөгтәсиндә ән кичик гијмәтини $m_k = f(x_k'')$ алмасындан (XIII, § 8) истифадә етдик. Онда $[a, b]$ парчасынын һәмин T бөлкүсү үчүн

$$S_n(T) - s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon$$

вә ја

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} [S_n(T) - s_n(T)] = 0$$

олар ки, бу да $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында интеграллана олдуғуну көстәрир (§ 3).

Теорем 2. *$[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш монотон $f(x)$ функсијасы һәмин парчада интеграллана билир.*

Исбаты. Үмумилији азалтмадан, фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында азалмајандыр. Онда $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуд олар вә парчанын истәнилән $[x_k, x_{k+1}]$ һиссәсиндә рәгси

$$\omega_k = M_k - m_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) \geqslant 0$$

кими тә'јин олунар. Беләликлә, $[a, b]$ парчасынын истәнилән T бөлкүсү үчүн

$$S_n(T) - s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k \leqslant \lambda(T) \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k =$$

$$= \lambda(T)\sum_{\kappa=0}^{n-1}[f(x_{\kappa+1})-f(x_\kappa)] = \lambda(T)[f(b)-f(a)]$$

вə буна көрə дə

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}[S_n(T)-s_n(T)]=0$$

олур. Демəли, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интеграллананды р.

Гејд. Китабын XIII фəслиндə (§ 7) исбат етмишдик ки, $[a, b]$ парчасында монотон олан $f(x)$ функсијасынын һəмин парчада анчаг биринчи нөв кəсилмə нөгтəлəри ола билəр. Бу кəсилмə нөгтəлəри сонлу сајда вə ја əн чоху һесаби сајда ола билəр. Көстəрмəк олар ки, тəкчə монотон функсијалар дејил, бу хассəјə малик олан бүтүн мəһдуд функсијалар да интеграллананды р. Башга сөзлə, $[a, b]$ парчасында мəһдуд вə бу парчада əн чоху һесаби сајда кəсилмə нөгтəси олан һəр бир функсија һəмин парчада интеграллананды р. ■

§ 5. МҮƏЈЈƏН ИНТЕГРАЛЫН ƏСАС ХАССƏЛƏРИ

Мүəјјəн интегралын интеграл чəминин лимити олмасына əсасланараг онун бир сыра хассəлəрини мүəјјəн етмəк олар. Бу хассəлəр, истəнилəн интеграллана н функсијалар үчүн доғру олдуғуна бахмајараг, бурада кəсилмəјəн функсијалар үчүн исбат едилир. Буна көрə дə бахылан бүтүн функсијалар бурада кəсилмəз һесаб едилир.

Хассə 1. *Сабит вуруғу мүəјјəн интеграл ишарəси харичинə чыхармаг олар:*

$$\int_a^b \mu f(x)\,dx = \mu\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

(μ сабит əдəддир).

Исбаты. Тə'рифə көрə $[a, b]$ парчасынын истəнилəн T бөлкүсү үчүн

$$\int_a^b \mu f(x)\,dx = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\mu f(\xi_\kappa)\Delta x_\kappa =$$

$$=\mu\left[\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{\kappa=0}^{n-1}f(\xi_\kappa)\Delta x_\kappa\right]=\mu\int_a^b f(x)\,dx$$

олар. Хүсуси һалда, $f(x)\equiv 1$ оларса, онда

$$\int_a^b \mu\,dx = \mu\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\Delta x_\kappa = \mu(b-a)$$

вə бурадан $\mu=1$ олдугда

$$\int_a^b dx = b-a \qquad (2)$$

алыныр.

Хассə 2. *Сонлу сајда $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ функсијаларынын чəминин мүəјјəн интегралы топлананларын мүəјјəн интегралларынын чəминə бəрабəрдир:*

$$\int_a^b\left[\sum_{\kappa=1}^{m} f_\kappa(x)\right]dx = \sum_{\kappa=1}^{m}\int_a^b f_\kappa(x)\,dx. \qquad (3)$$

Исбаты. Тə'рифə көрə

$$\int_a^b\left[\sum_{\kappa=1}^{m} f_\kappa(x)\right]dx = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{\kappa=1}^{m} f_\kappa(\xi_j)\right]\Delta x_j =$$

$$=\sum_{\kappa=1}^{m}\left[\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} f_\kappa(\xi_j)\Delta x_j\right] = \sum_{\kappa=1}^{m}\int_a^b f_\kappa(x)\,dx.$$

Нəтичə.

$$\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (4)$$

Хассə 3. *Истəнилəн c нөгтəси үчүн*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (5)$$

бəрабəрлији доғрудур.

Исбаты. Əввəлчə $a<c<b$ һалына бахаг. $[a, b]$ парчасынын истəнилəн T бөлкүсүнү апараг вə мүəјјəн интегралын варлығы ξ_κ нөгтəлəринин сечилмəсиндəн асылы олмадығындан, c нөгтəсини бөлкү нөгтəси көтүрəрəк, $f(x)$ функсијасы үчүн интеграл чəми дүзəлдəк:

$$J_n(T)=\sum_{\kappa=0}^{n-1}f(\xi_\kappa)\Delta x_\kappa = \sum_{[a,b]}f(\xi_\kappa)\Delta x_\kappa.$$

Бу чəми $[a, c]$ вə $[c, b]$ парчаларында јерлəшəн ујғун һиссəлəр үзрə ики чəмə ајырмаг олар. Онда ахырынчы бəрабəрлији

$$J_n(T)=\sum_{[a,c]}f(\xi_\kappa)\Delta x_\kappa + \sum_{[c,a]}f(\xi_\kappa)\Delta x_\kappa$$

кими јазараг, $\lambda(T)\to 0$ шəртиндə лимитə кечсəк (5) бəрабəрлијини аларыг.

Əкəр $a<b<c$ оларса, онда исбат етдијимизə əсасəн

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

вə ја

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

олар. Бурада

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

олдуғуну (§ 1) нәзәрә алсаг, јенә дә (5) бәрабәрлији алынар. Галан һалларда да (5) бәрабәрлијинин доғрулуғу еіни гајда илә исбат олунур.

Нәтиҹә. Сонлу сајда $c_1, \ldots, c_m$ нөгтәләри үчүн

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_m}^b f(x)\,dx \qquad (6)$$

бәрабәрлији доғрудур. Бурада бахылан бүтүн интегралларын варлығы фәрз олунур.

Хассә 4. *$a \le x \le b$ парчасында $f(x) \ge 0$ оларса, онда*

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

Исбаты. $f(\xi_k) \ge 0$ вә $\Delta x_k > 0$ олдуғундан

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k \ge 0.$$

Нәтиҹә. $a \le x \le b$ парчасында $f(x) \le \varphi(x)$ бәрабәрсизлији өдәнилирсә, онда

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (7)$$

Доғрудан да, $\varphi(x) - f(x) \ge 0$ олдуғундан

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

олар. Бурадан

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0, \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx$$

алынар.

Хассә 5. *$a \le x \le b$ парчасында кәсилмәјән истәнилән $f(x)$ функсијасы үчүн*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (8)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Исбаты. Мүтләг гијмәтин тә'рифинә (IX, § 7) көрә x-ин $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

олар. Бу бәрабәрсизликләри һәдбәһәд интегралласаг

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

мүнасибәти алынар ки, бу да (8) бәрабәрсизлијинин доғру олдуғуну көстәрир.

Бу хассә илә әлагәдар олараг гејд едәк ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олдугда $|f(x)|$ функсијасы да һәмин парчада кәсилмәјән олур. Буна көрә дә $f(x)$-ин $[a, b]$ парчасында интегралланан олмасындан $|f(x)|$-ин дә һәмин парчада интегралланан олмасы чыхыр. Бу тәклиф истәнилән интегралланан функсија үчүн дә доғрудур. $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, онда $|f(x)|$ функсијасы да һәмин парчада интегралланандыр. Бунун тәрси доғру олмаја да биләр. Мәсәлән,

$$f(x) = \begin{cases} +1, & x \text{ расионал әдәд олдугда,} \\ -1, & x \text{ иррасионал әдәд олдугда} \end{cases}$$

функсијасынын мүтләг гијмәти $|f(x)| \equiv 1$ һәр бир сонлу парчада интегралланандыр, өзү исә интегралланан дејилдир.

Хассә 6. *$[a, b]$ парчасынын анҹаг бир нөгтәсиндә сыфырдан фәргли олан функсијанын интегралы сыфра бәрабәрдир, јә'ни*

$$f_c(x) = \begin{cases} 0, & x \ne c,\ x \in [a, b] \\ \mu, & x = c \end{cases} \qquad (9)$$

шәклиндә функсијанын интегралы сыфра бәрабәрдир:

$$\int_a^b f_c(x)\,dx = 0.$$

Исбаты. $[a, b]$ парчасынын истәнилән T бөлкүсүнү апардыгда c нөгтәси бөлкүдән алынан кичик $[x_k, x_{k+1}]$ парчаларынын анҹаг биринә дахил олар: $x_m \le c < x_{m+1}$. Бу һалда $f_c(x)$ функсијасынын интеграл ҹәминдә анҹаг ики һәд сыфырдан фәргли ола биләр:

$$J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f_c(\xi_k)\,\Delta x_k = f_c(\xi_{m-1})\,\Delta x_{m-1} + f_c(\xi_m)\,\Delta x_m.$$

Бурадан

$$|J_n(T)| \le |f_c(\xi_{m-1})|\,|\Delta x_{m-1}| + |f_c(\xi_m)|\,|\Delta x_m| \le$$
$$\le |\mu|\,(|\Delta x_{m-1}| + |\Delta x_m|)$$

бәрабәрсизлији вә $\lambda(T) \to 0$ шәртиндә доғру олан

$$0 \le |\Delta x_{m-1}| + |\Delta x_m| \le 2\lambda(T) \to 0$$

мүнасибәтинә әсасән $J_n(T) \to 0\ (\lambda \to 0)$ алынар.

Нәтиҹә. $[a, b]$ парчасында интегралланан $f(x)$ функсијасынын бир $c \in [a, b]$ нөгтәсиндә гијмәтини дәјишдирмәк онун интегралланмасыны вә интегралыны дәјишмир.

407—4

Доғрудан да, $f(x)$ функсијасынын c нөгтәсиндә гијмәтини дәјишмәк онун үзәринә (9) шәклиндә функсија әлавә етмәк демәкдир:

$$\varphi(x) = f(x) + f_c(x).$$

6-чы хассәјә көрә $\int_a^b f_c(x)\,dx = 0$ олдуғундан,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f_c(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Хассә 7. *$[a, b]$ парчасында интегралланан $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијаларынын һасили дә һәмин парчада интегралланандыр.*

Бу хассәни мүәјјән интегралын варлыг теореминә әсасән исбат етмәк олар.

§ 6. ОРТА ГИЈМӘТ ТЕОРЕМИ

Теорем. ***$f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијалар олдуғда вә $\varphi(x)$ функсијасы бу парчада ишарәсини дәјишмәдикдә, елә $a \leqslant \xi \leqslant b$ нөгтәси вар ки,***

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (1)$$

бәрабәрлији өдәнилир.

Исбаты. $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында ән кичик гијмәтини $m = \inf f(x)$ вә ән бөјүк гијмәтини $M = \sup f(x)$ илә ишарә етсәк, x-ин һәмин парчадакы бүтүн гијмәтләриндә

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad (2)$$

олар. Мүәјјәнлик үчүн фәрз едәк ки, $[a, b]$ парчасында $\varphi(x) \geqslant 0$. Онда (2) бәрабәрсизлијинин һәр үч тәрәфини $\varphi(x)$ функсијасына вурмагла

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\,\varphi(x) \leqslant M\varphi(x)$$

аларыг. Бу бәрабәрсизлији һәдбәһәд интеграллласаг,

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (3)$$

олар.

Әкәр $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$ оларса, онда (3) бәрабәрсизлијинә көрә $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$ алынар. Бу һалда (1) бәрабәрлији $f(x)$-ин истәнилән $\xi \in [a, b]$ нөгтәсиндәки гијмәти үчүн өдәниләр.

$\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0$ олдугда исә (3) мүнасибәтиндән

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \leqslant M$$

бәрабәрсизлији алыныр. Бурадан ајдындыр ки,

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \qquad (4)$$

әдәди $m \leqslant \gamma \leqslant M$ шәртини өдәјир. Онда кәсилмәјән функсијаларын мә'лум хассәсинә (XIII, § 8) көрә $[a, b]$ парчасынын һеч олмаса бир ξ нөгтәсиндә $f(\xi) = \gamma$ олар. Буну (4) бәрабәрлијиндә нәзәрә алсаг, (1) алынар.

Нәтиҹә. $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олдугда, елә $a \leqslant \xi \leqslant b$ нөгтәси вар ки,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi) \qquad (5)$$

бәрабәрлији өдәнилир.

(5) бәрабәрлијинин доғрулуғуна инанмаг үчүн (1) мүнасибәтиндә $\varphi(x) \equiv 1$ вә $\int_a^b dx = (b-a)$ олдуғуну нәзәрә алмаг лазымдыр.

(5) бәрабәрлијини ашағыдакы кими јазаг:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Бу бәрабәрлијин сол тәрәфиндәки әдәдә $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында *орта гијмәти* дејилир. Буна көрә дә исбат етдијимиз нәтиҹә орта гијмәт теореми, (5) бәрабәрлији орта гијмәт дүстуру вә исбат етдијимиз теорем үмумиләшмиш орта гијмәт теореми адланыр.

§ 7. ЈУХАРЫ СӘРҺӘДИ ДӘЈИШӘН ОЛАН МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЛАР

Тутаг ки, $y = f(t)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш кәсилмәјән функсијадыр. Онда бу функсија истәнилән $[a, x]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ парчасында интегралланан олар. Һәмин

парча үзрә көтүрүлмүш интегралы

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

илә ишарә едәк. a сабит әдәд, x исә $[a, b]$ парчасында дәјишән кәмијјәт олдугда (1) интегралы x-ин функсијасы олар. Буна көрә дә, (1) интегралына *јухары сәрһәди дәјишән олан мүәјјән интеграл* дејилир.

Бурада $f(x)$ функсијасынын мүәјјән хассәләри мә'лум олдугда јухары сәрһәди дәјишән олан (1) интегралынын, јә'ни $F(x)$ функсијасынын ујғун хассәләри өјрәнилир.

Теорем. ***Әкәр $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјәндирсә, онда һәмин парчанын истәнилән x нөгтәсиндә***

$$F'(x) = f(x) \qquad (2)$$

вә-ја

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

бәрабәрлији доғрудур, јә'ни мүәјјән интегралын јухары сәрһәдд нәзәрән төрәмәси интегралалты функсијада интеграллама дәјишәни әвәзинә јухары сәрһәди јаздығда алынан гијмәтә бәрабәрдир.

Исбаты. Аргументә x нөгтәсиндә Δx артымы вериб, $F(x)$ функсијасынын ујғун артымыны һесаблајаг:

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \left(\int_a^x + \int_x^{x+\Delta x}\right) f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Алдығымыз интеграла орта гијмәт теоремини тәтбиг етсәк,

$$\Delta F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)\,\Delta x, \quad \xi \in [x,\ x+\Delta x]$$

олар. Бурадан

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(\xi), \quad \xi \in [x,\ x+\Delta x] \qquad (3)$$

бәрабәрлијини аларыг. Ајдындыр ки, $\Delta x \to 0$ шәртиндә $\xi \to x$ олур. Буна көрә дә (3) бәрабәрлијинин $\Delta x \to 0$ шәртиндә лимитә кечсәк вә $f(x)$ функсијасынын кәсилмәз олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

вә ја

$$F'(x) = f(x)$$

олар.

Нәтиҹә. *$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасынын һәмин парчада ибтидаи функсијасы вардыр.*

Доғрудан да, $f(x)$ кәсилмәјән функсија олдугда $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ функсијасы онун ибтидаи функсијасы олар: $F'(x) = f(x)$.

Бу нәтиҹә әслиндә гејри-мүәјјән интегралын варлыг теоремидир.

§ 8. НЈУТОН-ЛЕЈБНИС ДҮСТУРУ

Гејд едәк ки, мүәјјән интегралын интеграл ҹәминин лимити кими (јә'ни билаваситә тә'рифинә әсасән) һесабланмасы нисбәтән чәтин мәсәләдир. Бу үсулла интеграллары һесабладыгда чох заман мүрәккәб ҹәмләрин лимитини билаваситә тапмаг лазым кәлир. Мә'лумдур ки, һәтта садә интегралалты функсијалар үчүн интеграл ҹәминин лимитини һесабламаг бә'зән бөјүк техники чәтинликләрлә бағлы олур.

Интегралалты функсијанын ибтидаи функсијасы мә'лум олдугда мүәјјән интегралы һесабламаг үчүн чох әлверишли бир дүстур мә'лумдур.

Теорем. ***$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијаларындан бири $\Phi(x)$ функсијасыдырса, онда***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad (1)$$

дүстуру доғрудур. (1) дүстуруна Нјутон-Лејбнис дүстуру дејилир.

Исбаты. Шәртә көрә $\Phi(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијаларындан биридир. Әввәлки параграфда исбат етмишик ки,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

функсијасы да һәмин функсијанын ибтидаи функсијасыдыр. Верилмиш функсијанын ики ибтидаи функсијасы бир-бириндән анҹаг сабит бир әдәдлә фәргләнә биләр (XXI, § 1). Буна көрә дә

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C \qquad (2)$$

олмалыдыр. Бу бәрабәрликдә $x = C$ көтүрсәк вә $\int_a^a f(t)\,dt = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $C = -\Phi(a)$ тапарыг. Бу гијмәти (2) бә-

рабәрлијиндә јеринә јазыб, сонра да алынан бәрабәрликдә $x=b$ көтүрсәк:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

аларыг.

Гејд едәк ки, (1) дүстурунун сағ тәрәфиндәки фәрги чох вахт

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\big|_a^b$$

вә ја

$$\Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_a^b$$

кими ишарә едирләр. Бу һалда Нјутон-Лејбнис дүстуру

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(x)\big|_a^b \qquad (2)$$

кими јазылыр. Верилмиш $f(x)$ функсијасынын бүтүн ибтидаи функсијалары бир-бириндән анчаг сабит әдәдлә фәргләндикләриндән $\Phi(b)-\Phi(a)$ фәрги $\Phi(x)$ ибтидаи функсијасынын сечилмәсиндән асылы дејил. $f(x)$-ин бүтүн $F(x)$, $\Phi(x)$, ... ибтидаи функсијалары үчүн

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \dots = \int_a^b f(x)\,dx$$

фәргләри сабит олур.

Мисал 1.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right), \quad (n \neq -1).$$

Мисал 2.

$$\int_{a_0}^b a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}\Big|_{a_0}^b = \frac{1}{\ln a}\left(a^b - a^{a_0}\right), \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

Мисал 3.

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\big|_0^\pi = -(-1-1) = 2.$$

Јухарыда (§ 1) бу интеграл мүәјјән интегралын тә'рифинә әсасән һесабланмышдыр.

Мисал. 4.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Мисал 5.

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3}\Big|_0^1 = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}.$$

§ 9. МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ҺЕСАБЛАНМА ҮСУЛЛАРЫ ҺАГГЫНДА

Мүәјјән интегралын интеграл чәминин лимити кими вә Нјутон-Лејбнис дүстуру васитәсилә һесабланмасы һаггында әввәлләр данышмышыг. Бу үсуллар мүәјјән интегралы һесабламаг үчүн үмуми үсуллар һесаб олуна биләр.

Мүәјјән интегралын интеграл чәминин лимити кими һесабланмасы үсулу принсипчә бүтүн һаллара тәтбиг олуна биләр. Лакин алынан интеграл чәмләринин лимитини һесабламаг бөјүк техники чәтинликләрлә бағлы олдуғундан бу үсул әксәр һалларда әлверишли дејилдир.

Мүәјјән интегралларын Нјутон-Лејбнис дүстуру васитәсилә һесабланмасы нисбәтән әлверишли үсулдур. Бу үсулла мүәјјән интегралы һесабладыгда исә әввәлчә ујғун гејри-мүәјјән интегралы һесабламаг тәләб олунур ки, бу да чох вахт әлверишли олмур. Буна көрә дә бир чох мүәјјән интеграллары бә'зән хүсуси үсулларла һесабламаг даһа мүнасиб олур. Белә хүсуси үсулларын бир нечәси ашағыда көстәрилир.

1. Һиссә-һиссә интеграллама.

Теорем 1. *$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән вә кәсилмәјән төрәмәләри олан $U=U(x)$ вә $V=V(x)$ функсијалары үчүн*

$$\int_a^b U(x)\,dV(x) = [U(x)\,V(x)]_a^b - \int_a^b V(x)\,dU(x) \qquad (1)$$

бәрабәрлији доғрудур. Бу дүстура мүәјјән интеграл үчүн һиссә-һиссә интеграллама дүстуру дејилир.

Исбаты. Ики функсија һасили төрәмәсинин һесабландығы

$$[U(x)\,V(x)]' = U'(x)\,V(x) + U(x)\,V'(x)$$

дүстурунун һәр ики тәрәфини $[a, b]$ парчасы үзрә интеграллајаг:

$$\int_a^b [U(x)\,V(x)]'dx = \int_a^b U'(x)\,V(x)\,dx + \int_a^b U(x)\,V'(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b V(x)\,dU(x) + \int_a^b U(x)\,dV(x).$$

Бу бәрабәрлијин сол тәрәфиндәки интеграл Нјутон-Лејбнис дүстуру васитәсилә һесабланыр:

$$\int_a^b [U(x)\,V(x)]'\,dx = [U(x)\,V(x)]_a^b.$$

Онда

$$[U(x)\,V(x)]_a^b = \int_a^b V(x)\,dU(x) + \int_a^b U(x)\,dV(x)$$

вә ја тәләб олунан

$$\int_a^b U(x)\,dV(x) = [U(x)\,V(x)]_a^b - \int_a^b V(x)\,dU(x)$$

дүстуру алыныр.

Мисал 1. $\int_1^2 x\ln x\,dx$ интегралыны (1) дүстуру илә һесабламаг үчүн $U(x)=\ln x$ вә $dV(x)=d\left(\frac{x^2}{2}\right)$ һесаб едәк. Онда

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = 2\ln 2 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 =$$

$$= 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Мисал 2. $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ ($n\geq 0$ там әдәддир).

Бу интегралы һесабламаг үчүн һиссә-һиссә интеграллама дүстуру васитәсилә рекуррент дүстур алмаг олар. Онда:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot d(-\cos x) = [-\sin^{n-1}x\cdot\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\,dx = (n-1)\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)(J_{n-2}-J_n).$$

Бурадан

$$J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2} \qquad (2)$$

рекуррент дүстуру алыныр.

Әкәр $n=2m$ оларса, онда $J_0=\frac{\pi}{2}$ олдуғундан (2) дүстуруна әсасән

$$J_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot J_0=\frac{(2m-1)\cdots3\cdot1}{(2m)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

$n=2m+1$ олдугда исә

$$J_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot J_1=\frac{(2m)\cdots4\cdot2}{(2m+1)\cdots5\cdot3\cdot1}.$$

II. Мүәјјән интегралда дәјишәни әвәзетмә.

Теорем 2. *Тутаг ки, 1) $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјәндир; 2) $x=\varphi(t)$ функсијасы вә онун $\varphi'(t)$ төрәмәси $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәјәндир; 3) $[\alpha, \beta]$ парчасында*

$$a=\varphi(\alpha)\leq\varphi(t)\leq\varphi(\beta)=b$$

мүнасибәти өдәнилир. Онда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \qquad (3)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Бу дүстура мүәјјән интегралда дәјишәни әвәзетмә дүстуру дејилир.

Исбаты. Теоремин шәртләриндән ајдындыр ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында, $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ функсијасы исә $[\alpha, \beta]$ парчасында интегралланандыр (ујғун парчаларда кәсилмәз олдуглары үчүн). Бундан башга, әкәр $F(x)$ функсијасы $f(x)$-ин һәр һансы ибтидаи функсијасыдырса, онда $F(\varphi(t))$ функсијасы да $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ функсијасынын ибтидаи функсијасы олар. Бурадан, Нјутон-Лејбнис дүстуруна көрә

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

вә ја тәләб олунан

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

дүстуру алыныр.

Мисал 3. $J=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ интегралыны дәјишәни әвәзетмә дүстуру васитәсилә һесаблајаг.

$x=a\sin t$ әвәзләмәсини көтүрсәк, t дәјишәни $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ парчасында дәјишдикдә $0\leq x\leq a$ олур. $t=0$ олдугда $x=0$, $t=\frac{\pi}{2}$ олдугда исә $x=a\sin\frac{\pi}{2}=a$ олур. Онда $dx=a\cos t\,dt$ вә (3) дүстуруна көрә

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Гејд. Теоремин бүтүн шәртләри мүһүмдүр. Онлардан һәр һансы бири өдәнилмәдикдә (3) дүстуру доғру олмаја биләр. Буна көрә дә теоремин бү-

түн шәртләринин өдәнилдијини јохламадан (3) дүстуруну тәтбиг етмәк олмаз. Мәсәлән,

$$\int_0^{\pi} dx = \pi$$

бәрабәрлијинин сол тәрәфиндәки интегралы

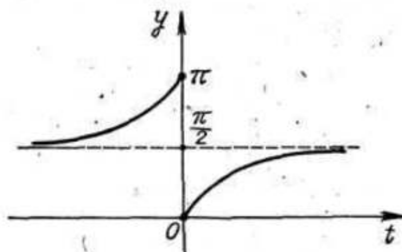
$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)}$$

кими јазараг, ахырынчы интегралда $t = \operatorname{tg} x$ әвәзләмәсини апарсаг ($\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}\pi = 0$), онда

$$\pi = \int_0^{\pi} dx = \int_0^{0} \frac{dt}{1 + t^2}, \quad \pi = 0?$$

кими мә'насыз бәрабәрлик аларыг.

Бунун сәбәби одур ки, $t = \operatorname{tg} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ бәрабәрлији илә тә'јин олунан $x = \varphi(t)$ функсијасы кәсиләндир (шәкил 198). Буна көрә дә теоремин шәртләри өдәнилмир вә (3) дүстуруну тәтбиг етмәк олмаз.



Шәкил 198

III. Тәк вә чүт функсијанын симметрик парча үзрә интегралы.

Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы симметрик $[-a, a]$ парчасында тә'јин олунмуш чүт функсијадыр, јә'ни x-ин $[-a, a]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f(-x) = f(x)$$

бәрабәрлији өдәнилир. Һәмин функсијанын $[-a, a]$ парчасы үзрә көтүрүлмүш интегралыны

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(x)\,dx$$

кими јазаг. Сағ тәрәфдәки биринчи интегралда $x = -t$ әвәзләмәсини апарсаг

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

вә ја

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \qquad (4)$$

мүнасибәтини аларыг. Демәли, чүт функсијанын симметрик

парча үзрә интегралы, һәмин функсијанын парчанын јарысы үзрә интегралынын ики мислинә бәрабәрдир.

Инди фәрз едәк ки, $[-a, a]$ парчасында $f(x)$ тәк функсијадыр. Онда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt +$$

$$+ \int_0^a f(x)\,dx = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

вә ја

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \qquad (5)$$

Мисал 4.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = 2\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 2\,[\sin x]_0^{\pi} = 0.$$

Мисал 5.

$$\int_{-a}^{a} x^{2n+1}\,dx = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Мисал 6.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \sin x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx =$$

$$= 2\pi + 2\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = 2\pi + 2\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = 2\pi + \pi -$$

$$- \int_0^{\pi} \cos 2x\,dx = 3\pi - \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi} = 3\pi.$$

§ 10. ТЕЈЛОР ДҮСТУРУ ГАЛЫГ ҺӘДДИНИН ИНТЕГРАЛ ШӘКЛИ

Фәрз едәк ки, $y = f(x)$ функсијасынын $x = a$ нөгтәсини өз дахилинә алан һәр һансы интервалда $n+1$ тәртибли кәсилмәз төрәмәси вардыр. Онда һәмин интервалда $f(x)$ функсијасы үчүн

$$f(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(x - a)^{\kappa} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad (1)$$

Тејлор дүстуру доғру олар.

Бу дүстуру исбат етмәк үчүн

$$R(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad (2)$$

интегралыны ардычыл олараг hиссә-hиссә интегралла]аг:

$$R(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n d[f^{(n)}(t)] = \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_a^x +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t)\Big|_a^x + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)\,dt =$$

$$= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} +$$

$$+\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} d[f^{(n-2)}(t)] = \cdots =$$

$$= -\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(x-a)^\kappa + f(x)$$

вә ja

$$R(x) = -\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(x-a)^\kappa + f(x).$$

Бурадан (1) дүстуру алыныр.

(2) ифадәси Те]лор дүстуру галыг hәддинин интеграл шәкли адланыр Те]лор дүстуруну (XVI, § 5) бир сыра мәсәләләрә тәтбиг едәркән, галыг hәддини интеграл шәклиндә көтүрмәк чох вахт әлверишли олур.

§ 11. МҮӘJJӘН ИНТЕГРАЛЫН ТӘГРИБИ hЕСАБЛАНМАСЫ

$[a, b]$ парчасында кәсилмә]ән $f(x)$ функсиjасынын ибтидаи функсиjасы $F(x)$ мә'лум олдугда

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

интегралыны Нjутон-Лejбнисин

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

дүстуру илә hесабламаг олар. Лакин кәсилмә]ән функсиj анын ибтидаи функсиjасыны hәмишә тапмаг мүмкүн олмур вә ja ибтидаи функсиjа гejри-елементар функсиjа олур. Буна көрә дә (1) интегралыны тәгриби hесабламаг лазым кәлир.

Бир чох практики мәсәләләрин hәллиндә интегралалты функсиjа анчаг чәдвәл шәклиндә верилир. Белә hалларда да (1) интегралы тәгриби hесабланмалы олур.

Верилмиш мүәjjән интегралын тәгриби hесабланма дүстуруна *квадратур дүстур* дejилир.

Мүәjjән интегралын ән садә тәгриби hесабланма дүстурлары, jә'ни квадратур дүстурлары онун тә'рифинә әсасән алыныр. Бу дүстурларын бир нечәсини бурада көстәрәк.

$[a, b]$ парчасыны $x_\kappa = a + \kappa\cdot\frac{b-a}{n}$ $(\kappa=0, 1, \ldots, n)$ нөгтәләри васитәсилә n бәрабәр hиссәjә аjырсаг, онда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\kappa=0}^{n-1}\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x)\,dx. \qquad (2)$$

I. Дүзбучаглылар дүстуру. Jенә дә $[a, b]$ парчасыны $x_\kappa = a+\kappa\frac{b-a}{n}$ $(\kappa = \overline{0, n})$ нөгтәләри васитәсилә n бәрабәр hиссәjә бөләк вә $f(x)$ функсиjасынын бу нөгтәләрдәки гиjмәтләрини уjғун олараг

$$y_0 = f(x_0),\quad y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$$

илә ишарә едәк. Бу hалда n-ин бөjүк гиjмәтләриндә

$$\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x)\,dx \approx y_\kappa\cdot\Delta x_\kappa \qquad (3)$$

тәгриби бәрабәрлиjини көтүрмәк олар. Бурада

$$\Delta x_\kappa = x_{\kappa+1} - x_\kappa = \frac{b-a}{n}\quad (\kappa = 0, 1, \ldots n-1).$$

(3) тәгриби бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә топласаг, онда

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{\kappa=0}^{n-1} y_\kappa \qquad (4)$$

тәгриби бәрабәрлиjини аларыг. Буна (1) мүәjjән интегралынын тәгриби hесабланмасы үчүн *дүзбучаглылар дүстуру* дejилир.

(3) тәгриби бәрабәрлиjи әвәзинә

$$\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x)\,dx \approx y_{\kappa+1}\cdot\Delta x_\kappa,\qquad \int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{x_\kappa + x_{\kappa+1}}{2}\right)\Delta x_\kappa$$

вә с. кими тәгриби бәрабәрликләр көтүрсәк, онда дүзбучаглылар дүстуру уjғун олараг

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{\kappa=0}^{n-1} y_{\kappa+1},$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{\kappa=0}^{n-1} f\left(\frac{x_\kappa + x_{\kappa+1}}{2}\right) \qquad (5)$$

вә с. кими олар.

(4) дүзбучаглылар дүстурунун сағ тәрәфиндәки ифадә $f(x)$ функсијасынын интеграл чәмидир. Буна көрә дә

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left(\sum_{\kappa=0}^{n-1} y_\kappa\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

олар. Демәли, (4) дүзбучаглылар дүстурунун мүтләг хәтасы

$$R_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\left(\sum_{\kappa=0}^{n-1} y_\kappa\right) \qquad (6)$$

$n\to\infty$ шәртиндә сонсуз кичилән кәмијјәтдир. Бунун тәртиби һаггында нә демәк олар?

$f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында биртәртибли мәһдуд төрәмәси олдугда

$$|R_n| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n} \qquad (7)$$

бәрабәрсизлији доғру олар. Бурада

$$M_1 = \sup_{a<x<b}|f'(x)|.$$

(7) бәрабәрсизлијини исбат етмәк үчүн Лагранж дүстурундан алынан

$$|f(x) - f(x_\kappa)| = |f'(\xi)\,(x - x_\kappa)| \leqslant M_1\,|x - x_\kappa|$$

бәрабәрсизлијиндән истифадә едәк. Бу һалда

$$\left|\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x)\,dx - y_\kappa\,\Delta x_\kappa\right| = \left|\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}}[f(x) - f(x_\kappa)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_1\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}}(x - x_\kappa)\,dx = \frac{M_1(\Delta x_\kappa)^2}{2} = \frac{M_1(b-a)^2}{2n^2}$$

олар. Онда (7) хәтасы үчүн тәләб олунан

$$|R_n| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\left(\sum_{\kappa=0}^{n-1} y_\kappa\right)\right| = \left|\sum_{\kappa=0}^{n-1}\left(\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x)\,dx - y_\kappa\,\Delta x_\kappa\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\kappa=0}^{n-1}\left|\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x)\,dx - y_\kappa\,\Delta x_\kappa\right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n^2}\sum_{\kappa=0}^{n-1} 1 = \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$$

дүстуру алыныр.

II. Трапесијалар дүстуру. Бу һалда (3) əвəзинə

$$\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x)\,dx \approx \frac{y_\kappa + y_{\kappa+1}}{2}\,\Delta x_\kappa \qquad (8)$$

тәгриби бәрабәрлији көтүрүлүр. Бу тәгриби бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топламагла

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\,[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n] \qquad (9)$$

тәгриби бәрабәрлији алыныр. Буна (1) мүәјјән интегралынын тәгриби һесабланмасы үчүн *трапесијалар дүстуру* дејилир.

Трапесијалар дүстурунун мүтләг хәтасы һаггында ашағыдакы тәклифи сөјләмәк олар:

$f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында икитәртибли мәһдуд төрәмәси олдугда

$$|R_n^*| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{y_\kappa + y_{\kappa+1}}{2}\,\Delta x_\kappa\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \qquad (10)$$

бәрабәрсизлији доғру олар. Бурада

$$M_2 = \sup_{a<x<b}|f''(x)|.$$

(8) тәгриби бәрабәрлији $f_0(x) = Ax + B$ хәтти функсијасы үчүн дәгиг бәрабәрлијә чеврилир. Бурадан ајдындыр ки, (9) трапесијалар дүстуру хәтти функсијалар үчүн дәгигдир.

Бундан башга, n (бөлкү нөгтәләринин сајы) артдыгча (9) тәгриби бәрабәрлијинин мүтләг хәтасы азалыр, јә'ни һәмин тәгриби бәрабәрлијин дәгиглији артыр.

Гејд едәк ки, (10) бәрабәрсизлији (7) бәрабәрсизлијини исбат едәркән апардығымыз мүһакимә илә исбат олунур.

III. Параболалар (вә ја Симпсон) дүстуру. (1) интегралыны тәгриби һесабламаг үчүн бу һалда $[a, b]$ парчасыны

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

нөгтәләри васитәсилә $2n$ сајда бәрабәр һиссәләрә ајырырлар. Әввәлчә $[x_{2\kappa}, x_{2\kappa+2}]$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, n-1)$ парчасы үзрә көтүрүлмүш

$$\int_{x_{2\kappa}}^{x_{2\kappa+2}} f(x)\,dx \qquad (11)$$

интегралынын тәгриби гијмәтини һесаблајаг. Бу мәгсәдлә

$$F_\kappa(x) = Ax^2 + Bx + C \qquad (12)$$

квадрат үчһәдлисинин (параболасынын) әмсалларыны елә сечәк ки, онун графики $(x_{2\kappa}, y_{2\kappa})$, $(x_{2\kappa+1}, y_{2\kappa+1})$ вә $(x_{2\kappa+2}, y_{2\kappa+2})$ нөгтәләриндән кечсин. Онда

$$\int_{x_{2\kappa}}^{x_{2\kappa+2}} F_\kappa(x)\,dx = \frac{x_{2\kappa+2} - x_{2\kappa}}{6}\,[2A\,(x_{2\kappa}^2 + x_{2\kappa}\cdot x_{2\kappa+2} + x_{2\kappa+2}^2) +$$

$$+ 3B\,(x_{2\kappa} + x_{2\kappa+2}) + 6C] = \frac{x_{2\kappa+2} - x_{2\kappa}}{6}\,(y_{2\kappa} + 4y_{2\kappa+1} + y_{2\kappa+2}) =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\,(y_{2\kappa} + 4y_{2\kappa+1} + y_{2\kappa+2})$$

олар. $F_\kappa(x)$ функсијасынын $[x_{2\kappa}, x_{2\kappa+2}]$ парчасында графики

(парабола) $f(x)$ функсиjасынын һәмин парчадакы графикинә јахын олдуғундан

$$\int_{x_{2\kappa}}^{x_{2\kappa+2}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{2\kappa}}^{x_{2\kappa+2}} F_\kappa(x)\,dx$$

вә ја

$$\int_{x_{2\kappa}}^{x_{2\kappa+2}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\,(y_{2\kappa}+4y_{2\kappa+1}+y_{2\kappa+2}) \qquad (13)$$

тәгриби бәрабәрлиjини алмаг олар. Бу тәгриби бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топласаг,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{\kappa=0}^{n-1}(y_{2\kappa}+4y_{2\kappa+1}+y_{2\kappa+2}) =$$

$$=\frac{b-a}{6n}\,[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+$$

$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})] \qquad (14)$$

тәгриби бәрабәрлиjини аларыг. Буна мүәjjән интегралын тәгриби һесабланмасы үчүн параболалар дүстуру (вә ја Симпсон дүстуру) дејилир.

(14) параболалар дүстурунун мүтләг хәтасы һаггында ашағыдакы тәклиф мә'лумдур:

$f(x)$ функсиjасынын $[a,\ b]$ парчасында дөрдтәртибли мәһдуд төрәмәси олдугда

$$|R_n^{**}| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6n}\sum_{\kappa=0}^{n-1}(y_{2\kappa}+4y_{2\kappa+1}+y_{2\kappa+2})\right| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{180\cdot(2n)^4} \qquad (15)$$

бәрабәрсизлиjи доғру олар. Бурада

$$M_4=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(IV)}(x)|.$$

Бу бәрабәрсизлик көстәрир ки, параболалар дүстуру интегралалты $f(x)$ функсиjасы хәтти $(Ax+B)$, квадратик (Ax^2+Bx+C) вә кубик (Ax^3+Bx^2+Cx+D) функсиjа олдугда n-дән асылы олмајараг мүәjjән интегралын дәгиг гиjмәтини верир. Чүнки бу һалларда $f^{(IV)}(x)\equiv 0$, $M_4=0$ вә буна көрә дә (15) бәрабәрсизлиjинә әсасән $R_n^{**}=0$ олар.

Әкәр мүәjjән интегралын параболалар дүстуру васитәсилә ε дәгиглиjи илә тәгриби гиjмәтини тапмаг лазымдырса, онда

$$\frac{M_4(b-a)^5}{180\cdot(2n)^4}<\varepsilon$$

бәрабәрсизлиjиндән там n әдәди тапылыр:

$$n>\sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\cdot 16\cdot\varepsilon}}. \qquad (16)$$

Сонра исә $[a,\ b]$ парчасыны $2n$ саjда бәрабәр һиссәjә бөләрәк $y_\kappa(\kappa=0,\ 1,\ldots,\ 2n)$ кәмиjjәтләри һесабланыр вә беләликлә дә (14) дүстуру гурулур.

Мисал. $J=\int_0^2 e^{-x^2}dx$ интегралыны Симпсон дүстуру васитәсилә $\varepsilon=0{,}000005$ дәгиглиjи илә һесаблајаг.

(16) мүнасибәтиндән аjдындыр ки, бу һалда $n=10$ көтүрмәк олар. Онда $2n=20$ вә $b-a=2$ олар. $y=e^{-x^2}$ функсиjасынын $x_\kappa=\kappa\cdot\frac{1}{10}$ $(\kappa=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 19,\ 20)$ нөгтәләриндәки гиjмәтләрини ашағыдакы чәдвәл шәклиндә јазаг:

κ	x_κ	x_κ^2	$y_\kappa=e^{-x_\kappa^2}$ гиjмәтләри		
			$\kappa=0$ вә $\kappa=20$	κ тәк олдугда	κ чүт олдугда
0	0	0	1		
1	0,1	0,01		0,99005	
2	0,2	0,04			0,96079
3	0,3	0,09		0,91393	
4	0,4	0,16			0,85214
5	0,5	0,25		0,77880	
6	0,6	0,36			0,69768
7	0,7	0,49		0,61263	
8	0,8	0,64			0,52729
9	0,9	0,81		0,44486	
10	1,0	1,00			0,36788
11	1,1	1,21		0,29820	
12	1,2	1,44			0,23693
13	1,3	1,69		0,18452	
14	1,4	1,96			0,14086
15	1,5	2,25		0,10540	
16	1,6	2,56			0,07730
17	1,7	2,89		0,05558	
18	1,8	3,24			0,03916
19	1,9	3,61		0,02705	
20	2,0	4	0,01832		3,90003
			1,01832	4,41102	

Бурадан (14) дүстуруна әсасән

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{30}\,(1{,}01832+4\cdot 4{,}41102+2\cdot 3{,}90003)=0{,}88208$$

аларыг.

XXIII ФӘСИЛ

МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ТӘТБИГЛӘРИ

§ 1. ИНТЕГРАЛ НӘЈӘ ЛАЗЫМДЫР?

Ријазијјат елми чох гәдим дөврдән јаранмаға башламышдыр. Ф. Енкелс јазыр: „Бүтүн башга елмләр кими, ријазијјат да инсанларын әмәли еһтијачларындан: торпаг саһәләрини вә габларын тутумуну өлчмәкдән, вахтын һесабланмасындан вә механикадан әмәлә кәлмишдир."[1]

Ријазијјатда јаранмыш илк методларла анчаг чох садә фигурларын саһәсини, садә әјриләрин узунлуғуну, дүзкүн фигурларын һәчмини вә с. һесабламаг мүмкүн олурду. Бу заман һәмин әјри вә фигурларын хүсуси хассәләриндән истифадә едилирди. Ријазијјатын, физиканын, механиканын вә б. елмләрин инкишафыны исә бу тә'мин едә билмәзди. Буна көрә дә гаршыја чыхан һәјати мәсәләләри һәлл етмәк үчүн үмуми методларын јаранмасына бөјүк еһтијач вар иди.

Квадратын, үчбучағын вә с. саһәсини елементар һәндәсә методлары илә һесабламаг олур. Бәс ихтијари әјри илә әһатә олунмуш фигурун саһәсини, ихтијари сәтһлә әһатә олунмуш чисмин һәчмини нечә һесабламаг олар?

Бүтүн бу мәсәләләри һәлл етмәк үчүн јаранан үмуми метод—интеграл һесабыдыр. Интеграл һесабы, јарандығы илк дөврдән мүстәгил, диференсиал һесабындан асылы олмадан инкишаф етмишдир. Сонралар (XVII—XVIII әсрләрдә) диференсиал вә интеграл һесабынын чох дәрин әлагәси кәшф едилмишдир ки, бу да ријазијјат вә башга елмләрин сүр'әтли инкишафына сәбәб олмушдур.

Мүасир ријазијјатын әсас анлајышларындан бири олан мүәјјән интеграл ријазијјатда вә бүтүн башга елм саһәләриндә кениш тәтбиг олунур. Саһә, һәчм, иш, сүр'әт, әјринин узунлуғу, әталәт моменти вә с. кими кәмијјәтләр мүәјјән интеграл васитәсилә һесабланыр.

Мүәјјән интегралын тәтбиг олунмасынын әсас схеми беләдир: Тутаг ки, һәр һансы $[a, b]$ парчасы илә бағлы олан сабит A кәмијјәтини һесабламаг лазымдыр. $[a, b]$ парчасыны $[x_i, x_i+\Delta x_i]$ кими кичик һиссәләрә ајырдыгда A кәмијјәти дә ΔA_i кими кичик һиссәләрә ајрылыр. Мәсәләнин шәртиндән вә дикәр вериләнләрдән истифадә едәрәк ΔA_i үчүн тәгриби гијмәт тапылыр:

$$\Delta A_i \approx q(x_i)\,\Delta x_i.$$

Онда ахтарылан кәмијјәт үчүн

$$A \approx \sum_{(i)} q(x_i)\,\Delta x_i \qquad (1)$$

---
[1] Ф. Енкелс, „Анти-Дүрнинг", Азәрнәшр, 1953, сәһ. 34.

тәгриби бәрабәрлијини алмаг олур. Верилмиш парчаны даһа кичик һиссәләрә бөлдүкчә (1) тәгриби бәрабәрлијинин хәтасы азалыр вә нәтичәдә лимитә кечмәклә

$$A = \int_a^b q(x)\,dx \qquad (2)$$

кими дәгиг бәрабәрлик алыныр.

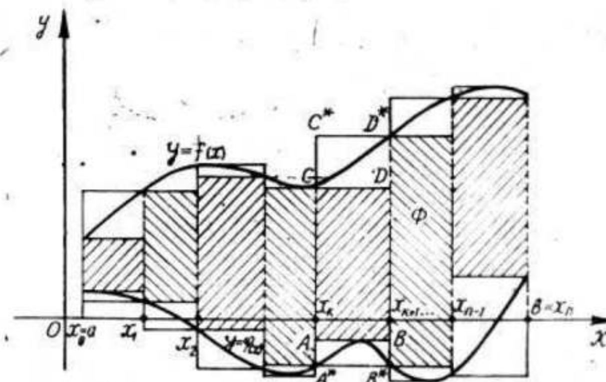
Бир даһа гејд етмәк лазымдыр ки, ахтарылан A кәмијјәти үчүн тапылан (1) гијмәти, үмумијјәтлә, онун тәгриби гијмәтидир. Һәмин бәрабәрликдә лимитә кечдикдә исә хәта кетдикчә азалыр вә нәтичәдә дәгиг (2) гијмәти алыныр.

Буна көрә дә (1) чәминдән (2) интегралына кечмәк чох мүһүм әмәлијјат олуб, мүәјјән интеграл анлајышынын јаранмасына сәбәб олмушдур. Ријазијјат тарихиндә дә белә олмуш вә „S" чәм ишарәси (әvvәлләр чәми „Summa" (чәм) латын сөзүнүн биринчи S һәрфи илә ишарә едирдиләр) дәјишәрәк индики $\int$ (интеграл) ишарәси шәклини алмышдыр.

§ 2. МҮСТӘВИ ФИГУРУН САҺӘСИ ВӘ ОНУН ДҮЗБУЧАГЛЫ КООРДИНАТ СИСТЕМИНДӘ ҺЕСАБЛАНМАСЫ

Тутаг ки, јухарыдан $y=f(x)$ әјриси вә ашағыдан $y=\varphi(x)$ әјриси ($\varphi(x)\leqslant f(x)$) илә вә јанлардан $x=a$ вә $x=b$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш мүстәви фигуру верилмишдир (шәкил 199). $[a, b]$ парчасыны

$$T = T(a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b)$$



Шәкил 199

нөгтәләри (T бөлкүсү) илә кичик $[x_\kappa, x_{\kappa+1}]$ ($\kappa=0, 1, \ldots, n-1$) парчаларына ајыраг. $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијаларынын $[x_\kappa, x_{\kappa+1}]$ парчасында ән кичик вә ән бөјүк гијмәтләрини ујғун олараг

$m_к(f)$, $m_к(\varphi)$, $M_к(f)$ вә $M_к(\varphi)$ илә ишарә едәк. Һәр бир $[x_к, x_{к+1}]$ парчасына ујғун ики дүзбучаглы гурмаг олар:

I. $y=m_к(f)$, $y=M_к(\varphi)$, $x=x_к$, $x=x_{к+1}$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш $ABCD$ дүзбучаглылары. Бу дүзбучаглылар чызыгланмышдыр вә Φ фигурунун дахилиндә јерләшир.

II. $y=M_к(f)$, $y=m_к(\varphi)$, $x=x_к$, $x=x_{к+1}$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш $A^*B^*C^*D^*$ дүзбучаглылары. Бу дүзбучаглылар Φ фигурунун ујғун һиссәсини өз дахилинә алыр.

Биринчи нөв дүзбучаглыларын саһәләринин чәмини

$$S_n(T)=\sum_{к=0}^{n-1}[m_к(f)-M_к(\varphi)]\,\Delta x_к \qquad (1)$$

илә вә икинчи нөв дүзбучаглыларын саһәләринин чәмини

$$S_n^*(T)=\sum_{к=0}^{n-1}[M_к(f)-m_к(\varphi)]\,\Delta x_к \qquad (2)$$

илә ишарә едәк. T бөлкүсүнүн параметри (XXII, § 1) $\lambda=\lambda(T)$ олсун.

Тә'риф. *(1) вә (2) чәмләринин $\lambda(T)\to 0$ шәртиндә бир-биринә бәрабәр олан лимитләри варса, һәмин лимитә Φ фигурунун саһәси дејилир вә $S(\Phi)$ илә ишарә олунур:*

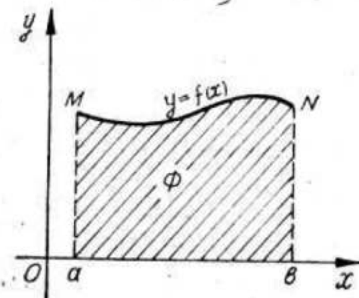
$$S(\Phi)=\lim_{\lambda(T)\to 0}S(T)=\lim_{\lambda(T)\to 0}S_n^*(T). \qquad (3)$$

Сонлу саһәси олан мүстәви фигура квадратланан фигур дејилир.

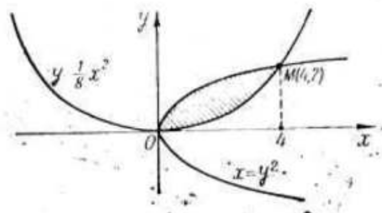
$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары һәмин парчада интегралланандыр (XXII, § 4). Буна көрә дә

$$S(\Phi)=\lim_{\lambda\to 0}S_n(T)=\lim_{\lambda\to 0}S_n^*(T)=\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]\,dx \qquad (4)$$

олар. $y=\varphi(x)=0$ олдугда Φ фигуруна (шәкил 200) әјрихәтли трапесија дејилир.



Шәкил 200



Шәкил 201

(4) дүстуруна әсасән $aMNb$ әјрихәтли трапесијасынын саһәсини һесабламаг үчүн

$$S(\Phi)=\int_a^b f(x)\,dx \qquad (5)$$

дүстуруну $(f(x)\geqslant 0)$ аларыг.

Мисал 1. $y=\frac{1}{8}x^2$ вә $x=y^2$ параболалары илә әһатә олунмуш фигурун саһәсини тапмалы (шәкил 201).

Шәкилдән ајдындыр ки, параболаларын кәсишмә нөгтәләри $O(0, 0)$ вә $M(4, 2)$ олар. Онда (4) дүстуруна көрә:

$$S=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{8}x^2\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{24}x^3\right]_0^4=\frac{8}{3}.$$

Верилмиш әјрихәтли трапесијаны әһатә едән $y=f(x)$ $(x>0)$ әјриси параметрик шәкилдә верилдикдә дә онун саһәсини һесабламаг олар. Доғрудан да, тутаг ки, $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ функсијасы

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

параметрик шәкилдә верилмишдир. Бурада $x=\varphi(t)$ функсијасы монотондур, $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәјән төрәмәси вардыр вә $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ бәрабәрликләрини өдәјир. Онда (5) интегралында $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$ әвәзләмәсини апарсаг вә $y=f(x)=f[\varphi(t)]=\psi(t)$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$S(\Phi)=\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt \qquad (6)$$

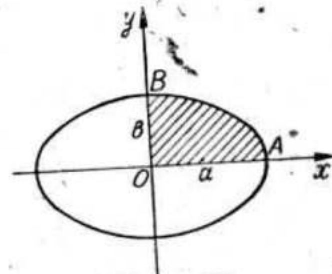
олар.

Мисал 2. Јарымохлары a вә b олан еллипслә әһатә олунмуш фигурун саһәсини тапмалы.

Бу еллипсин (шәкил 202) параметрик тәнлији

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos t,\\ y&=b\sin t\end{aligned}\right\}\quad(0\leqslant t<2\pi)$$

шәклиндә јазылыр (XX, § 3). Еллипсин биринчи квадрантда јерләшән һиссәсинин саһәсини (6) дүстуру илә һесаблајаг:



Шәкил 202

$$S_1=\int_0^a y\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t)\,x'(t)\,dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt=$$

$$= + ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = + \frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}.$$

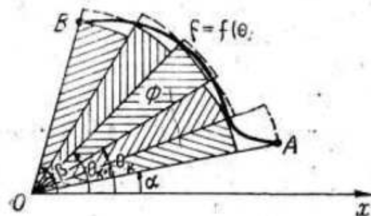
Бурадан еллипсин саһәси үчүн

$$S = 4S_1 = \pi ab$$

ифадәсини аларыг.

§ 3. ӘЈРИХӘТЛИ СЕКТОРУН САҺӘСИ

Мүстәви үзәриндә OA вә OB радиус-векторлары вә AB әјриси илә һүдудланмыш Φ фигуруна бахаг (шәкил 203). Белә фигура мәркәзи координат башланғычында олан әјрихәтли сектор дејилир.



Шәкил 203

Полјар координат системиндә AB әјрисинин $\rho=f(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ тәнлији верилдикдә OAB әјрихәтли секторунун саһәсини һесаблајаг.

Бу мәгсәдлә $[\alpha, \beta]$ парчасынын $T[\theta_0=\alpha<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{n-1}<<\theta_n=\beta]$ бөлкүсүнү көтүрәк вә $\theta=\theta_0=\alpha$, $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2, \ldots$, $\theta==\theta_n=\beta$ шүалары илә верилмиш сектору n һиссәјә бөләк.

Тутаг ки, $\rho=f(\theta)$ функсијасы $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәјәндир. $[\theta_\kappa, \theta_{\kappa+1}]$ парчасында $f(\theta)$ функсијасынын ән кичик гијмәти m_κ вә ән бөјүк гијмәти M_κ олсун.

Инди $\theta_\kappa \leqslant \theta < \theta_{\kappa+1}$ бучағында радиуслары $\rho=m_\kappa$ вә $\rho=M_\kappa$ олан ики даирәви сектор гураг. Бу даирәви секторларын саһәси, ујғун олараг

$$\frac{1}{2}m_\kappa^2\Delta\theta_\kappa \quad \text{вә} \quad \frac{1}{2}M_\kappa^2\Delta\theta_\kappa \quad (\Delta\theta_\kappa = \theta_{\kappa+1} - \theta_\kappa)$$

олар. Онда биринчи нөв бүтүн даирәви секторларын (чызыгланмыш вә Φ фигуру дахилиндә јерләшәнләрин) саһәләринин чәми

$$s_n(T) = \frac{1}{2}\sum_{\kappa=0}^{n-1} m_\kappa^2\Delta\theta_\kappa \qquad (1)$$

вә икинчи нөв бүтүн даирәви секторларын саһәләринин чәми

$$S_n(T) = \frac{1}{2}\sum_{\kappa=0}^{n-1} M_\kappa^2\Delta\theta_\kappa \qquad (2)$$

олар. T бөлкүсүнүн параметри $\lambda=\lambda(T)=\max|\Delta\theta_\kappa|$ олсун.

Тә'риф. *(1) вә (2) чәмләринин $\lambda(T)\to 0$ шәртиндә бир-биринә бәрабәр олан лимитләри варса, онда һәмин лимитә әјрихәтли Φ секторунун саһәси дејилир:*

$$S(\Phi) = \lim_{\lambda\to 0} s_n(T) = \lim_{\lambda\to 0} S_n(T).$$

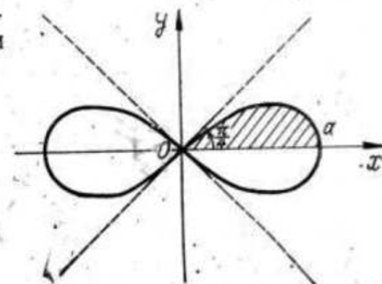
(1) вә (2) чәмләри $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәјән $\frac{1}{2}[f(\theta)]^2$ функсијасынын ујғун олараг ашағы вә јухары Дарбу чәмләри (XXII, § 4) олдуғундан

$$S(\Phi) = \lim_{\lambda\to 0} s_n(T) = \lim_{\lambda\to 0} S_n(T) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\, d\theta$$

вә ја

$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\, d\theta.$$



Шәкил 204

Мисал. $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ лемнискаты (XI, § 4) илә әһатә олунмуш фигурун саһәсини һесабламалы (шәкил 204).

Шәкилдән ајдындыр ки,

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\, d\theta = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\, d\theta = a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

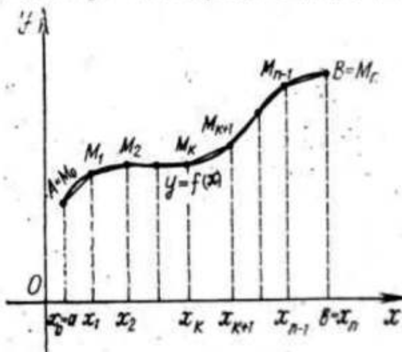
олар.

§ 4. ӘЈРИ ГӨВСҮНҮН УЗУНЛУҒУ

Тутаг ки, $\Gamma=(AB)$ мүстәви әјриси дүзбучаглы координат системиндә $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ тәнлији илә верилмишдир. $[a, b]$ парчасынын ихтијари

$$T = T(a = x_0 < x_1 < < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b)$$

бөлкүсүнә, әјри үзәриндә, координатлары ујғун олараг x_κ вә $y_\kappa=f(x_\kappa)$ $(\kappa=0,1,\ldots n)$, олан $A=M_0, M_1,\ldots,M_{n-1}$, $M_n=B$ нөгтәләри ујғун олар (шәкил 205). Бу нөгтәләри ардычыл олараг дүз хәтт парчалары илә бирләшдирдикдә Γ әјриси дахилинә чәкилмиш $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$ сыныг хәтти



Шәкил 205

алыныр. Әјринин $M_кM_{к+1}$ вәтәринин узунлуғуну $\Delta l_к$ илә ишарә едәк. Онда Γ әјриси дахилинә чәкилмиш сыныг хәттин узунлуғу

$$P_n = \sum_{к=0}^{n-1} \Delta l_к \tag{1}$$

олар. Сыныг хәттин ән бөјүк тәрәфинин узунлуғу λ олсун:

$$\lambda = \max(\Delta l_0, \Delta l_1, \ldots, \Delta l_{n-1}).$$

Тә'риф. *Γ әјриси дахилинә чәкилмиш сыныг хәтт узунлуғунун $\lambda \to 0$ шәртиндә сонлу лимити варса, һәмин әјријә сонлуузунлуглу әјри вә*

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{к=0}^{n-1} \Delta l_к \tag{2}$$

лимитинә онун узунлуғу дејилир.

Һамар Γ әјриси (XX, § 3) үчүн (јә'ни $f(x)$ функсијасы вә онун $f'(x)$ төрәмәси $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олдугда) (2) лимити вар. Доғрудан да, $\Delta x_к = x_{к+1} - x_к$ вә $\Delta y_к = f(x_{к+1}) - f(x_к)$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\Delta l_к = \sqrt{(\Delta x_к)^2 + (\Delta y_к)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_к}{\Delta x_к}\right)^2}\, \Delta x_к$$

олар. Лагранж теореминә әсасән

$$\frac{\Delta y_к}{\Delta x_к} = \frac{f(x_{к+1}) - f(x_к)}{x_{к+1} - x_к} = f'(\xi_к), \quad \xi_к \in (x_к, x_{к+1})$$

олдуғундан (1) чәми

$$P_n = \sum_{к=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_к)]^2}\, \Delta x_к$$

шәклиндә јазылыр. Бу ифадә $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функсијасынын интеграл чәмидир. Буна көрә дә муәјјән интегралын тә'рифинә әсасән

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{к=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_к)]^2}\, \Delta x_к = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

олар. Демәли, һәр бир һамар Γ әјриси сонлуузунлуглу әјридир вә онун узунлуғу

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{3}$$

дүстуру илә һесабланыр.

Инди, фәрз едәк ки, һамар Γ әјриси

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \tag{4}$$

параметрик тәнликләри васитәсилә верилмишдир (XX, § 3) вә $\varphi'(t)$ төрәмәси $[\alpha, \beta]$ парчасында һеч јердә сыфра чеврилмир. Онда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

олдуғуну (XIV, § 10) нәзәрә алараг, (3) интегралында $x = \varphi(t)$ әвәзләмәсини ($a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$) апармаг олар:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\, \varphi'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Бурадан, (4) параметрик шәкилдә верилмиш һамар Γ әјрисинин узунлуғуну һесабламаг үчүн

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \tag{5}$$

дүстуру алыныр.

Ејни мүһакимә илә

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \gamma(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

параметрик шәкилдә верилмиш һамар Γ фәза әјрисинин (XX, § 6) узунлуғуну һесабламаг үчүн

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\gamma'(t)]^2}\, dt \tag{6}$$

дүстуруну алмаг олар.

Мисал 1. R радиуслу чеврәнин (шәкил 206) узунлуғуну һесабламалы.

Чеврәнин параметрик тәнлији

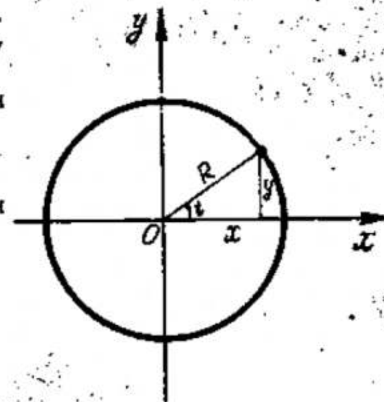
$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t, \\ y &= R\sin t \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

олдуғундан (5) дүстуруна әсасән алырыг:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$



Шәкил 206

Мисал 2. Тсиклоид әјрисинин (XX, § 3) бир будағынын узунлуғуну һесабламалы.

Бу әјринин параметрик тәнлији

$$\left.\begin{array}{l} x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{array}\right\}\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

олдуғундан (5) дүстуруна көрә алырыг:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a.$$

Әјринин тәнлији полјар координатларла $\rho=f(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ шәклиндә верилдикдә, јенә дә онун тәнлијини

$$\left.\begin{array}{l} x=f(\theta)\cos\theta,\\ y=f(\theta)\sin\theta\end{array}\right\}\quad (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

параметрик шәкилдә јазмаг олар (XX, § 3). Бу һалда

$$x'_\theta=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,$$
$$y'_\theta=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$$

олар вә (5) дүстурундан

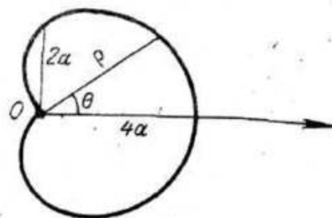
$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}\,d\theta \qquad (7)$$

мүнасибәти алынып.

Мисал 3. $\rho=2a(1+\cos\theta)$ кардиоида әјрисинин (шәкил 207) узунлуғуну һесабламалы.

Кардиоида әјриси полјар оха нәзәрән симметрик олдуғундан (7) дүстуруна көрә аларыг:

$$l=2\int_0^\pi\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\theta=$$
$$=4a\int_0^\pi\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=$$
$$=8a\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}d\theta=16a.$$



Шәкил 207

(3), (5), (6) вә (7) дүстурларында интеграллары јухары сәрһәдини дәјишән көтүрмәклә гөвсүн узунлуғунун һәмин дәјишәнә нәзәрән төрәмәсини тапмаг олар. Доғрудан да, (3) дүстурунда интегралын јухары сәрһәдини x илә әвәз етдикдә гөвсүн узунлуғу x-ин функсијасы олар:

$$l(x)=\int_a^x\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt$$

(интеграллама дәјишәни t илә әвәз едилмишдир).

Бу интегралын јухары сәрһәдә нәзәрән төрәмәси вар:

$$\frac{dl(x)}{dx}=\sqrt{1+[f'(x)]^2}.$$

Бурадан гөвс диференсиалынын мә'лум ифадәси (XX, § 6) алынып:

$$dl(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (8)$$

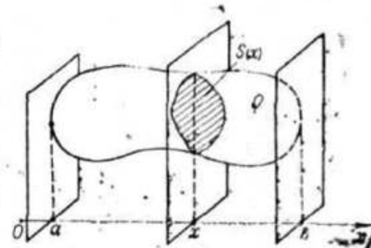
Ејни мүһакимә илә (5) вә (7) дүстурларындан гөвс диференсиалынын параметр вә полјар координатлар васитәсилә ашағыдакы мә'лум ифадәләри дә алынып:

$$dl(t)=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$
$$dl(\theta)=\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}\,d\theta.$$

§ 5. ЧИСИМЛӘРИН ҺӘЧМИНИН ҺЕСАБЛАНМАСЫ

Тутаг ки, фәзада Q чисми верилмишдир. Бу чисмин, Ox охуна перпендикулјар олан мүстәвиләрлә кәсијинин саһәси мә'лум олдугда, һәчмини һесабламаг олар. Q чисминин нөгтәләри абсисләринин ән кичији a, ән бөјүјү исә b олсун (шәкил 208).

Q чисминин $[a, b]$ парчасынын x нөгтәсиндә $(a\leqslant x\leqslant b)$ Ox охуна перпендикулјар кечирилмиш мүстәви илә кәсијинин саһәсини $S(x)$ илә ишарә едәк. Фәрз едәк ки, $S(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјәндир.



Шәкил 208

Инди $[a, b]$ парчасынын истәнилән

$$T=T[a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b]$$

бөлкүсүнү көтүрәк вә $x=x_k$ $(k=\overline{0,n})$ бөлкү нөгтәләриндән Ox охуна перпендикулјар мүстәвиләр кечирәк. Бу мүстәвиләр Q чисмини лајлара бөлүр. Һәр бир лаја кичик бир силиндр кими бахсаг, онда $[x_k, x_{k+1}]$ парчасына ујғун лајын отурачағынын саһәси $S(\xi_k)$ $(x_k\leqslant\xi_k\leqslant x_{k+1})$, һүндүрлүјү $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ вә һәчми тәгрибән $S(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ әдәдинә бәрабәр олар.

Онда бүтүн силиндрләрин һәчми үчүн

$$V_n(T)=\sum_{k=0}^{n-1}S(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (1)$$

ифадәсини аларыг. T бөлкүсүнүн параметрини $\lambda=\lambda(T)$ илә ишарә едәк.

Тә'риф. *(1) cәминин $\lambda(T)\to 0$ шәртиндә лимити варса, һәмин лимитә Q чисминин һәчми дејилир вә $V(Q)$ илә ишарә едилир:*

$$V(Q)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}S(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (2)$$

Сонлу һәчми олан чисмә кубланан чисим дејилир.

(1) чәми $S(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасынын истәнилән T бөлкүсүнә ујғун интеграл чәмидир. Буна көрә дә, (2) бәрабәрлијиндән мүәјјән интегралын тә'рифинә әсасән Q чисминин һәчмини һесабламаг үчүн

$$V(Q)=\int_a^b S(x)\,dx \tag{3}$$

дүстуруну аларыг.

Әкәр Q чисми $y=f(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ әјрисинин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынмышса, онда онун Ox охуна перпендикулјар мүстәвиләрлә кәсикләри даирәләр олар. Бу һалда

$$S(x)=\pi y^2=\pi[f(x)]^2$$

олар вә буна көрә дә (3) дүстурундан

$$V(Q)=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx \tag{4}$$

алынар.

Хүсуси һалда, $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $f(x)\geqslant\varphi(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ әјриләри вә $x=a$, $x=b$ дүз хәтләри илә әһатә олунмуш фигурун Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчми

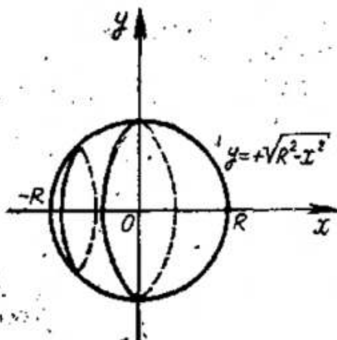
$$V(Q)=\pi\int_a^b [f^2(x)-\varphi^2(x)]\,dx \tag{5}$$

дүстуру илә һесабланар.

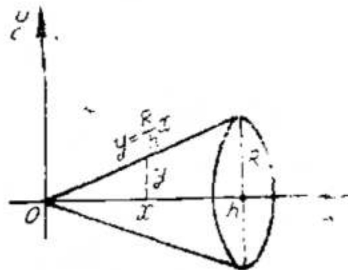
Мисал 1. R радиуслу күрәнин һәчмини һесабламалы.

Белә күрә, тәнлији $y=+\sqrt{R^2-x^2}$ $(-R\leqslant x\leqslant R)$ олан R радиуслу јарымчеврәнин Ox оху әтрафында фырланмасындан алыныр (шәкил 209). Буна көрә дә, (4) дүстуруна әсасән

$$V(Q)=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\pi\,\frac{4R^3}{3}.$$



Шәкил 209



Шәкил 210

Мисал 2. Һүндүрлүјү h вә отурачағынын радиусу R олан конусун һәчмини һесабламалы.

Белә конус $y=\frac{R}{h}x$ $(0\leqslant x\leqslant h)$ дүз хәтт парчасынын Ox оху әтрафында фырланмасындан алыныр (шәкил 210). Демәли, (4) дүстуруна көрә

$$V(Q)=\pi\int_0^h\left(\frac{R}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{1}{3}\pi R^2h.$$

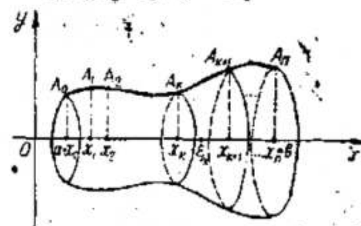
§ 6. ФЫРЛАНМАДАН АЛЫНАН СӘТҺИН САҺӘСИ

Фәрз едәк ки, $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасы һәмин парчада кәсилмәјәндир вә кәсилмәјән төрәмәси вардыр. $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ әјрисинин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин саһәсини һесаблајаг.

Бу мәгсәдлә $[a, b]$ парчасынын ихтијари

$$T=T[a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b]$$

бөлкүсүнү көтүрәк. $x=x_k$ $(k=0, 1,\ldots, n)$ бөлкү нөгтәләринә әјри үзәриндә ујғун олан нөгтәләр $A_k[x_k, f(x_k)]$ $(k=0, 1,\ldots, n)$ олсун (шәкил 211). Бу нөгтәләри дүз хәтт парчалары илә бирләшдирдикдә $A_0A_1\ldots A_n$ сыныг хәтти алыныр.



Шәкил 211

Һәмин сыныг хәттин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин саһәси (кәсик конусларын јан сәтһләринин саһәләри чәми)

$$P_n(T)=2\pi\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y_k+y_{k+1}}{2}\,l_k=\pi\sum_{k=0}^{n-1}(y_k+y_{k+1})l_k \tag{1}$$

олар. Бурада $y_k=f(x_k)$ $(k=0, 1,\ldots, n)$ вә

$$l_k=|\overline{A_kA_{k+1}}|=\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}=$$
$$=\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2},$$
$$(k=0, 1,\ldots, n-1).$$

Тә'риф. *(1) чәминин $\lambda(T)\to 0$ шәртиндә лимити варса, һәмин лимитә σ сәтһинин саһәси дејилир вә $P(\sigma)$ илә ишарә едилир:*

$$P(\sigma)=\lim_{\lambda\to 0}P_n(T)=\lim_{\lambda\to 0}\pi\sum_{k=0}^{n-1}(y_k+y_{k+1})\,l_k, \tag{2}$$

$$\lambda=\lambda(T)=\max(\Delta x_0, \Delta x_1,\ldots, \Delta x_{n-1}).$$

Сәтһин саһәси сонлу олдуғда она квадратланан сәтһ дејилир.

Инди σ сәтһинин саһәсини һесаблајаг.

Лагранж дүстуруна (XVI, § 2) көрә

$$\Delta y_k=y_{k+1}-y_k=f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\xi_k)\Delta x_k,\quad \xi_k\in[x_k, x_{k+1}]$$

олдуғундан (1) ифадәсини

$$P_n(T) = \pi \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k =$$

$$= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k + \qquad (3)$$

$$+ \pi \sum_{k=0}^{n-1} \{[f(x_k) - f(\xi_k)] + [f(x_{k+1}) - f(\xi_k)]\} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k$$

кими јазмаг олар. Бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки биринчи

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k$$

чәми $f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ функсијасынын интеграл чәмидир. Буна көрә дә

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad (4)$$

олар. (3) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндә јерләшән икинчи һәддин $\lambda \to 0$ шәртиндә лимитинин сыфра бәрабәр олдуғуну исбат едәк.

$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы һәмин парчада мүнтәзәм кәсилмәјән (XIII, § 10) олдуғундан, ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $|\lambda(T)| < \delta$ олдугда $|f(x_k) - f(\xi_k)| < \varepsilon$ вә $|f(x_{k+1}) - f(\xi_k)| < \varepsilon$ бәрабәрсизликләри өдәниләр. Онда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \{[f(x_k) - f(\xi_k)] + [f(x_{k+1}) - f(\xi_k)]\} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k \right| <$$

$$< 2M\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = 2M(b-a)\varepsilon \qquad (M = \sup_{a<x<b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2})$$

олар ки, бу да (3) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки икинчи һәддин $\lambda \to 0$ шәртиндә лимитинин сыфра бәрабәр олдуғуну көстәрир.

Беләликлә, (3) бәрабәрлијиндә $\lambda \to 0$ шәртиндә лимитә кечсәк, σ сәтһинин саһәсини һесабламаг үчүн

$$P(\sigma) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad (5)$$

дүстуруну аларыг.

Верилмиш әјри

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

параметрик тәнликләри илә верилдикдә (5) дүстурундан истифадә етмәклә онун фырланмасындан алынан сәтһин саһәсини һесабламаг олар. Бу мәгсәдлә һәмин дүстурда $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ јазмаг лазымдыр. Онда

$$P(\sigma) = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \qquad (6)$$

олар.

Мисал 1. R радиуслу сфера сәтһинин саһәсини һесабламалы.

Белә сфера R радиуслу јарымчеврәнин Ox оху әтрафында фырланмасындан алыныр. Јарымчеврәнин параметрик тәнлији

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos t, \\ y &= R \sin t \end{aligned} \right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi)$$

кими јазылыр. Онда (6) дүстуруна әсасән

$$P(\sigma) = 2\pi \int_0^\pi R \sin t \cdot \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2\pi R^2 (-\cos t)\Big|_0^\pi = 4\pi R^2$$

аларыг.

Мисал 2. $\rho = 2a(1 + \cos\theta)$ кардиоида әјрисинин (§ 4, шәкил 207) полјар ох әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин саһәсини һесабламалы.

Кардиоида әјрисинин полјар охун јухары тәрәфиндә јерләшән һиссәсинин тәнлијини

$$\left. \begin{aligned} x &= 2a(1 + \cos\theta)\cos\theta, \\ y &= 2a(1 + \cos\theta)\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

кими јазмаг олар. Онда (6) дүстуруна көрә

$$P(\sigma) = 8\pi a^2 \int_0^\pi (1 + \cos\theta) \sin\theta \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 64\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{128}{5}\pi a^2$$

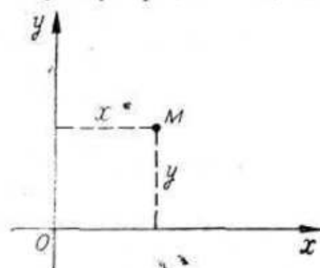
аларыг.

§ 7. МАДДИ НӨГТӘЛӘР СИСТЕМИНИН СТАТИК МОМЕНТИ ВӘ АҒЫРЛЫГ МӘРКӘЗИ

Тутаг ки, Oxy мүстәвиси үзәриндә јерләшән вә күтләси m олан M мадди нөгтәси верилмишдир.

Мадди нөгтә нәдир? Мүәјјән күтләси олуб, һәндәси өлчүләри чох кичик олан һәр бир чисим (һиссәчик) ријазијјатда мадди нөгтә кими көтүрүлүр. Үмумијјәтлә, бир чисмин бүтүн күтләсини бир нөгтәдә јығылмыш (чәмләнмиш) һесаб етмәк мүмкүн олдугда, о ну мадди нөгтә һесаб едирләр.

Мадди M нөгтәсинин һәр һансы оха нәзәрән статик моменти онун күтләси илә һәмин охдан олан мәсафәсинин һасилинә бәрабәрдир. Демәли, M нөгтәсинин Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моменти уjғун олараг my вә mx олар (шәкил 212).



Шәкил 212

Инди Oxy мүстәвисиндә jерләшән вә күтләләри уjғун олараг $m_1, m_2, \ldots, m_n$ олан $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$ мадди нөгтәләр системи көтүрәк. Мадди нөгтәләр системинин һәр һансы оха нәзәрән статик моменти системин бүтүн нөгтәләринин һәмин оха нәзәрән статик моментләринин чәминә деjилир. Бурадан аjдындыр ки, верилмиш нөгтәләр системинин Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләри уjғун олараг

$$C_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \quad C_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k \tag{1}$$

олар. Бурада C_x вә C_y илә верилмиш мадди нөгтәләр системинин уjғун олараг Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләри ишарә олунмушдур.

Верилмиш $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$ мадди нөгтәләр системинин ағырлыг мәркәзини $A(x_A, y_A)$ илә ишарә едәк. Механикадан мә'лумдур ки, мадди нөгтәләр системинин ағырлыг мәркәзинин x_A вә y_A координатлары

$$x_A \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \quad y_A \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k$$

бәрабәрликләрини өдәjир. Бурадан верилмиш мадди нөгтәләр системинин ағырлыг мәркәзинин координатларыны тә'jин етмәк үчүн

$$x_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad y_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

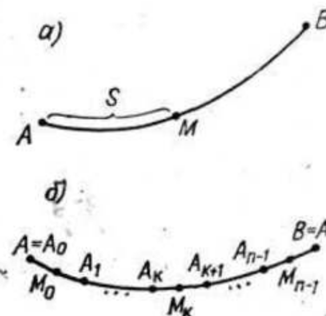
дүстурларыны аларыг.

§ 8. МАДДИ ӘJРИНИН СТАТИК МОМЕНТИ ВӘ АҒЫРЛЫГ МӘРКӘЗИ

Фәрз едәк ки, Oxy мүстәвиси үзәриндә jерләшән вә мадди нөгтәләрдән ибарәт олан кәсилмәз AB әjриси верилмишдир. Әjринин ваһид узунлуғунда олан гөвсүнүн күтләсинә *хәтти сыхлыг* деjилир вә μ илә ишарә олунур.

Тутаг ки, $\breve{AB}$ әjриси сонлуузунлуглу әjридир вә онун үзәриндәки ихтиjари $M(x, y)$ нөгтәсинин вәзиjјәти $\breve{AM}$ гөвсүнүн s узунлуғу илә тә'jин олунур (шәкил 213, *а*). Бу һалда һәмин әjринин параметрик тәнлиjи

$$\left.\begin{array}{l} x = x(s), \\ y = y(s) \end{array}\right\} (0 \leqslant s \leqslant S) \tag{1}$$



Шәкил 213

кими jазылар (XX, § 3). Бурада S=узунлуг $\breve{AB}$. Онда әjринин M нөгтәсиндә хәтти сыхлығы да $\breve{AM}$ гөвсүнүн узунлуғундан асылы олар, jә'ни $\mu = \mu(s)$ олар.

Мадди $\breve{AB}$ әjрисинин бүтүн нөгтәләриндә хәтти сыхлыг еjни олдугда она *бирчинсли әjри*, әкс һалда исә *бирчинсли олмаjан әjри* деjилир.

Инди бирчинсли олмаjан мадди $\breve{AB}$ әjрисинин координат охларына нәзәрән статик моментләрини вә ағырлыг мәркәзинин координатларыны тә'jин едәк. Бу мәгсәдлә $\breve{AB}$ әjрисини $A = A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n y_n) = B$ нөгтәләри илә n һиссәjә бөләк (шәкил 213, *б*)). Буна уjғун олараг $[0, S]$ парчасы да n һиссәjә бөлүнәр:

$$T\ (s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} < s_n = S)$$

вә

$$x_k = x(s_k), \ y_k = y(s_k) \ (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Онда $\breve{A_k A_{k+1}}$ гөвсүнүн узунлуғу $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$ олар. Бу гөвс үзәриндә бир $M_k(x_k^*, y_k^*)$ нөгтәси көтүрәк $(x_k^* = x(s_k^*), y_k^* = y(s_k^*), s_k \leqslant s_k^* \leqslant s_{k+1})$ вә фәрз едәк ки, $\breve{A_k A_{k+1}}$ гөвсүнүн бүтүн нөгтәләриндә сыхлыг еjни олуб, M_k нөгтәсиндәки $\mu = \mu(s_k^*)$ сыхлыға бәрабәрдир. Бу һалда мадди $\breve{A_k A_{k+1}}$ гөвсүнүн күтләси тәгрибән $m_k \approx \mu(s_k^*)\Delta s_k$ ифадәсинә бәрабәр олар. Инди һәр бир мадди $\breve{A_k A_{k+1}}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ гөвсү күтләсинин уjғун $M_k(x_k^*, y_k^*)$ нөгтәсиндә чәмләндиjини тәсәввүр едәк. Онда мадди $\breve{AB}$ әjрисинин Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләри уjғун олараг әввәлки параграфдакы (1) дүстурларына әсасән

$$C_x \approx \sum_{k=0}^{n-1} y(s_k^*)\mu(s_k^*)\Delta s_k, \quad C_y \approx \sum_{k=0}^{n-1} x(s_k^*)\mu(s_k^*)\Delta s_k$$

тәгриби бәрабәрликләри илә тә'jин олунар. Бу бәрабәрлик-

ләрин сағ тәрәфиндәки чәмләр $y(s)\mu(s)$ вә $x(s)\mu(s)$ функсиjаларынын $[0, S]$ парчасындакы уjғун интеграл чәмидир, һәмин бәрабәрликләрдә $\lambda = \lambda(T) \to 0$ шәртиндә лимитә кечсәк, мүәjjән интегралын тә'рифинә әсасән

$$C_x = \int_0^S y(s)\mu(s)\,ds, \quad C_y = \int_0^S x(s)\mu(s)\,ds \qquad (2)$$

дүстурларыны аларыг.

Мадди $M_k(x_k^*, y_k^*)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ нөгтәләри системинин ағырлыг мәркәзинин координатлары исә

$$x_A^* = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x(s_k^*)\mu(s_k^*)\Delta s_k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mu(s_k^*)\Delta s_k}, \quad y_A^* = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} y(s_k^*)\mu(s_k^*)\Delta s_k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mu(s_k^*)\Delta s_k}$$

бәрабәрликләри илә тә'јин олунар. Бу бәрабәрликләрдә $\lambda(T) \to 0$ шәртиндә лимитә кечсәк, мадди $\overset{\frown}{AB}$ әjрисинин ағырлыг мәркәзинин координатларыны тә'јин етмәк үчүн

$$x_A = \frac{\int_0^S x(s)\mu(s)\,ds}{\int_0^S \mu(s)\,ds}, \quad y_A = \frac{\int_0^S y(s)\mu(s)\,ds}{\int_0^S \mu(s)\,ds} \qquad (3)$$

дүстурларыны аларыг.

Хүсуси һалда, мадди $\overset{\frown}{AB}$ әjриси бирчинсли олдугда, jә'ни $\mu(s) = \mu$ сабит олдугда, (3) дүстурлары ашағыдакы кими садә шәкилдә jазылар:

$$x_A = \frac{1}{S}\int_0^S x(s)\,ds, \quad y_A = \frac{1}{S}\int_0^S y(s)\,ds. \qquad (4)$$

Бу һалда мадди $\overset{\frown}{AB}$ әjрисинин ағырлыг мәркәзинин координатлары әjринин сыхлығындан асылы олмур.

Демәли, мадди $\overset{\frown}{AB}$ әjриси бирчинсли олдугда онун ағырлыг мәркәзинин координатлары jалныз әjринин һәндәси хассәләриндән асылыдыр (сыхлығындан исә асылы деjилдир).

Әкәр $\overset{\frown}{AB}$ әjрисинин тәнлиjи $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ шәклиндә верилсә, онда $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ олдуғуну (XX, § 6) нәзәрә алараг, (4) дүстурларыны

$$x_A = \frac{1}{S}\int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,$$

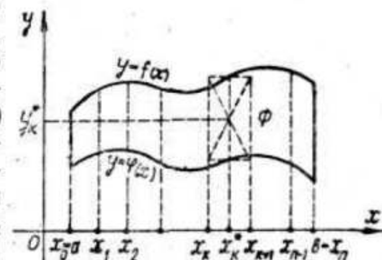
$$y_A = \frac{1}{S}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \qquad (5)$$

кими jазмаг олар.

§ 9. МАДДИ МҮСТӘВИ ФИГУРУН СТАТИК МОМЕНТИ ВӘ АҒЫРЛЫГ МӘРКӘЗИ

Мүәjjән күтләси олан чох назик (вә галынлығы сабит олан) лөвһә риjазиjjатда *мадди мүстәви фигур* һесаб едилир. Бу фигурун бир сәтһ өлчүсү ваһидинә дүшән күтләсинә онун *сәтһи сыхлығы* деjилир вә μ илә ишарә олунур.

Тутаг ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәjән $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ $(\varphi(x) \le f(x))$ әjриләри вә $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ дүз хәтләри илә әһатә олунмуш Φ бирчинсли (jә'ни сәтһи сыхлығы сабит олан) мадди мүстәви фигуру верилмишдир. Бу фигурун статик моментини вә ағырлыг мәркәзини һесабламаг үчүн ону $x = x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n,\ x_0 = a,\ x_n = b)$ дүз хәтләри васитәсилә n золаға аjыраг (шәкил 214). Золаглар чох кичик олдугда онлары тәгриби олараг дүзбучаглыларла әвәз етмәк мүмкүндүр. Мәсәлән, k-чы золағы отурачағы $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ вә һүндүрлүjү $f(x_k^*) - \varphi(x_k^*)$ олан $\left(x_k^* = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$ дүзбучаглы илә әвәз едәк. Онда k-чы дүзбучаглынын күтләси



Шәкил 214

$$m_k = \mu\,[f(x_k^*) - \varphi(x_k^*)]\,\Delta x_k$$

вә ағырлыг мәркәзинин (механикадан мә'лумдур ки, дүзбучаглынын ағырлыг мәркәзи онун диагоналларынын кәсишмә нөгтәсидир) координатлары

$$x_k^* = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \text{ вә } y_k^* = \frac{1}{2}[\varphi(x_k^*) + f(x_k^*)]$$

олар. Фәрз едәк ки, k-чы дүзбучаглынын күтләси онун (x_k^*, y_k^*) ағырлыг мәркәзиндә jерләшир. Онда k-чы золағын Ox вә

Oy охларына нәзәрән статик моментләри ујғун олараг

$$\mu[f(x_k^*)-\varphi(x_k^*)]\,\Delta x_k\,\frac{1}{2}\,[\varphi(x_k^*)+f(x_k^*)]=$$

$$=\frac{\mu}{2}\,f^2(x_k^*)-\varphi^2(x_k^*)]\,\Delta x_k$$

вә

$$\mu\,[f(x_k^*)-\varphi(x_k^*)]\,\Delta x_k\cdot x_k^*$$

олар. Бу ифадәләрин һәр биринин, κ-нын $0, 1, \ldots, n-1$ гијмәтләринә ујғун гијмәтләрини ајрылыгда топласаг, Φ фигурунун Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләринин ујғун тәгриби гијмәтләрини аларыг:

$$M_x\approx\frac{1}{2}\mu\sum_{k=0}^{n-1}[f^2(x_k^*)-\varphi^2(x_k^*)]\,\Delta x_k \tag{1}$$

вә

$$M_y\approx\mu\sum_{k=0}^{n-1}x_k^*\,[f(x_k^*)-\varphi(x_k^*)]\,\Delta x_k. \tag{2}$$

(1) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки чәм $[f^2(x)-\varphi^2(x)]$ функсијасынын $[a, b]$ парчасынын

$$T=T\,[a=x_0<x_1<x_2\ldots<x_{n-1}<x_n=b]$$

бөлкүсүнә ујғун интеграл чәми, (2) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки чәм исә $x\,[f(x)-\varphi(x)]$ функсијасынын интеграл чәмидир. Онда $\lambda(T)\to 0$ шәртиндә (1) вә (2) бәрабәрликләриндә лимитә кечсәк, Φ фигурунун Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләрини һесабламаг үчүн

$$M_x=\frac{1}{2}\mu\int_a^b[f^2(x)-\varphi^2(x)]\,dx, \tag{3}$$

$$M_y=\mu\int_a^b x\,[f(x)-\varphi(x)]\,dx \tag{4}$$

дүстурларыны аларыг.

Φ фигурунун күтләси онун сыхлығы илә саһәсинин һасилинә бәрабәрдир:

$$m=\mu\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]\,dx=\mu\cdot S(\Phi). \tag{5}$$

Механикадан мә'лумдур ки, Φ фигурунун ағырлыг мәркәзинин координатлары (x_A, y_A), күтләси m вә статик моментләри (M_x, M_y) арасында

$$x_A\cdot m=M_y,\quad y_A\cdot m=M_x$$

мүнасибәтләри вардыр. Бурадан, (3), (4) вә (5) бәрабәрликләринә әсасән, Φ фигурунун ағырлыг мәркәзинин координатлары үчүн

$$x_A=\frac{M_y}{m}=\frac{1}{S(\Phi)}\int_a^b x\,[f(x)-\varphi(x)]\,dx, \tag{6}$$

$$y_A=\frac{M_x}{m}=\frac{1}{2S(\Phi)}\int_a^b[f^2(x)-\varphi^2(x)]\,dx \tag{7}$$

дүстурларыны аларыг.

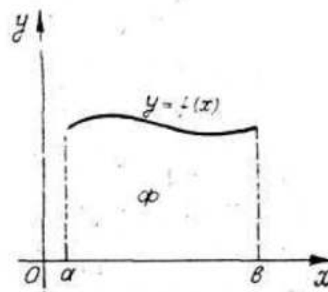
Хүсуси һалда, Φ фигуру јухарыдан $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ әјриси илә, јанлардан исә $x=a$, $x=b$ дүз хәтләри илә әһатә олунмуш әјрихәтли трапесија оларса (шәкил 215), онда (6) вә (7) дүстурлары ашағыдакы кими јазылар:

$$x_A=\frac{1}{S(\Phi)}\int_a^b xf(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{S(\Phi)}\int_a^b xy\,dx,$$

$$y_A=\frac{1}{2S(\Phi)}\int_a^b f^2(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2S(\Phi)}\int_a^b y^2\,dx.$$



Шәкил 215

§ 10. КУЛДЕН ТЕОРЕМЛӘРИ

Мә'лумдур ки, тәнлији $y=f'(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ олан $\overset{\frown}{AB}$ әјрисинин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан σ сәтһинин саһәси

$$P(\sigma)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

дүстуру илә һесабланыр (§ 6). Бу бәрабәрлији § 8-дә исбат етдијимиз (5) дүстурларынын икинчиси

$$y_A=\frac{1}{S}\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

илә мүгајисә етсәк,

$$S\cdot 2\pi\,y_A=P(\sigma) \tag{1}$$

мүнасибәтини аларыг. Бурада y_A илә бирчинсли $\overset{\frown}{AB}$ әјрисинин ағырлыг мәркәзинин ординаты, S илә исә $\overset{\frown}{AB}$ әјрисинин узунлуғу ишарә олунмушдур.

(1) бәрабәрлији ашағыдакы теоремин доғрулуғуну көстәрир:

Кулденин[1] биринчи теореми. ***Мүстәви әјрисинин, ону кәсмәјән ох әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин саһәси, һәмин әјринин узунлуғу илә онун ағыр-***

[1] Паул Кулден (1577—16 3) Исвечрә ријазијјатчысыдыр.

лыг мәркәзинин чыдыгы чеврәнин узунлугу һасилинә бәрабәрдир.

Мисал 1. $x^2+y^2=R^2 (y\geq 0)$ јарымчеврәсинин ағырлыг мәркәзинин координатларыны тапмалы.

(1) дүстурундан истифадә етсәк вә $S=\pi R$, $P(a)=4\pi R^2$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$y_A = \frac{4\pi R^2}{2\pi\cdot\pi R} = \frac{2}{\pi}R$$

олар. $x_A=0$ олмасы исә верилмиш јарымчеврәнин Oy охуна нәзәрән симметрик јерләшмәсиндән аjдындыр.

Инди фырланма чисминин һәчми үчүн § 5-дә исбат етдијимиз (5) дүстуруну

$$V(\ ) = \pi\int_a^b [f^2(x)-\varphi^2(x)]\,dx$$

вә әввәлки параграфда чыхарылмыш (7) дүстуруну

$$y_A = \frac{1}{2S(\Phi)}\int_a^b [f^2(x)-\varphi^2(x)]\,dx$$

муғајисә едәк. Бурадан

$$V(\ ) = 2\pi y_A\cdot S(\Phi) \qquad (2)$$

мүнасибәти алыныр. Демәли, ашағыдакы теорем доғрудур:

Гулденин икинчи теореми. *Мүстәви фигурун, ону кәсмәјән ох әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчми, һәмин фигурун саһәси илә онун ағырлыг мәркәзинин чыдыгы чеврәнин узунлугу һасилинә бәрабәрдир.*

Мисал 2. $x^2+y^2\leq R^2 (y\geq 0)$ јарымдаирәсинин ағырлыг мәркәзинин координатларыны тапмалы.

Јарымдаирә Oy охуна нәзәрән симметрик јерләшдијиндән онун (x_A, y_A) ағырлыг мәркәзи һәмин ох үзәриндә олар. Демәли, $x_A=0$. y_A әдәдини исә (2) бәрабәрлијиндән тапаг $S(\Phi)=\frac{1}{2}\pi R^2$ вә $V(\ )=\frac{4}{3}\pi R^3$ олдуғундан

$$y_A=\frac{V(O)}{2\pi S(\Phi)} = \frac{4}{3\pi}R.$$

§ 11. МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛ ВАСИТӘСИЛӘ ҸӘМЛӘРИН ҺЕСАБЛАНМАСЫ

Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы $[a,b]$ парчасында интеграллаиан функсијадыр. $[a,b]$ парчасыны $x_k = a+k\frac{b-a}{n}$ $(k=0,$

$1, \ldots, n)$ нөгтәләри васитәсилә n бәрабәр һиссәјә бөләк вә $f(x)$ функсијасы үчүн

$$J_n(T)=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

кими интеграл ҹәми дүзәлдәк.

Мүәјјән интегралын тә'рифинә әсасән

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)=\int_a^b f(x)\,dx$$

вә ја

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

олар. Бурада

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(b)}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, (1) бәрабәрлијини

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

кими јазмаг олар.

(1) вә (2) бәрабәрликләриндән истифадә едәрәк бир сыра ҹәмләрин лимитини һесабламаг олар.

Мисал 1. Ашағыдакы лимити һесабламалы:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^\gamma+3^\gamma+\cdots+n^\gamma}{n^{\gamma+1}} \quad (\gamma\geq 0).$$

(1) бәрабәрлијиндә $a=0$, $b=1$ вә $f(x)=x^\gamma$ һесаб етсәк,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})}{n}=\int_0^1 x^\gamma\,dx=\frac{1}{\gamma+1}$$

вә ја

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^\gamma+3^\gamma+\cdots+n^\gamma}{n^{\gamma+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^\gamma+\cdots+(n-1)^\gamma}{n^{\gamma+1}} = \frac{1}{\gamma+1}$$

алыныр. Хүсуси һалда,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}[1+2+\cdots+n] = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[1+2^2+\cdots+n^2] = \frac{1}{3}.$$

Мисал 2. Ашағыдакы лимити һесабламалы:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

(1) дүстурунда $a=0$, $b=\pi$ вә $f(x)=\sin x$ һесаб етсәк,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \sin\frac{\kappa\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}$$

вә ја

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right] = 2.$$

XXIV ФӘСИЛ

ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЛАР

§ 1. МУӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ҮМУМИЛӘШМӘСИ

Верилмиш $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында муәјјән интегралы тә'јин едиләркән $[a, b]$ парчасынын сонлу вә $f(x)$ функсијасынын мәһдуд олмасы тәләб олунур (XXII, § 1, § 3). Интеграллама парчасы гејри-мәһдуд олдугда ону сонлу сајда $[x_\kappa, x_{\kappa+1}]$ кими сонлу һиссәләрә бөләрәк,

$$J_n(T) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} f(\xi_\kappa)\,\Delta x_\kappa \qquad (1)$$

интеграл чәмини дүзәлтмәк мүмкүн дејилдир. Әкәр сонсуз парчаны сонлу сајда һиссәјә бөлсәк, онда бу һиссәләрин һеч олмаса биринин узунлуғу сонсуз олар. Бу һалда (1) чәми сонсузлуға чевриләр вә буна көрә дә һәмин чәмин лимити сонлу ола билмәз. $[a, b]$ парчасы сонлу олуб, $f(x)$ функсијасы һәмин парчада гејри-мәһдуд олдугда да дүзәлдилән (1) интеграл чәми гејри-мәһдуд олар. Бу һалда да, (1) интеграл чәмининин лимити сонлу ола билмәз. Башга сөзлә, $f(x)$ функсијасынын сонлу $[a, b]$ парчасында муәјјән интегралынын варлығы үчүн һәмин парчада мәһдуд олмасы зәрури шәртдир (XXII, § 1).

Бунунла белә, бир чох мәсәләләрдә муәјјән интегралын сонсуз областлар вә гејри-мәһдуд функсијалар үчүн үмумиләшмәси тәләб олунур. Белә үмумиләшмә исә бир чох һалларда мүмкүндүр.

Муәјјән интегралын сонсуз областлар вә гејри-мәһдуд функсијалар үчүн үмумиләшмәси олан интеграллара гејри-мәхсуси интеграллар дејилир. Гејри-мәхсуси интеграллар ики нөв олур: сонсуз сәрһәдли интеграллар вә гејри-мәһдуд функсијаларын интегралы.

§ 2. СОНСУЗ СӘРҺӘДЛИ ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЛАР

Тутаг ки, $y = f(x)$ функсијасы $[a, +\infty)$ областында тә'јин олунмуш вә истәнилән сонлу $[a, N]$ $(N > a)$ парчасында интегралланан функсијадыр. Онда истәнилән N үчүн

$$J(N) = \int_a^N f(x)\,dx \qquad (1)$$

интегралы сонлудур вә $N \to +\infty$ шәртиндә онун лимитиндән данышмаг олар.

Тә'риф. *Әкәр сонлу*

$$\lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx \qquad (2)$$

лимити варса, онда һәмин лимитә $f(x)$ функсијасынын $[a, +\infty)$ областында гејри-мәхсуси интегралы дејилир вә

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx \qquad (3)$$

кими ишарә олунур. Бу һалда, јә'ни (2) лимити сонлу олдугда $f(x)$ функсијасына $[a, +\infty)$ областында гејри-мәхсуси мә'нада интегралланан (вә ја интегралана билән) *функсија дејилир.*

(2) лимити варса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ гејри-мәхсуси интегралы јығылан, экс һалда, јә'ни (2) лимити олмадыгда исә һәмин гејри-мәхсуси интеграл дағылан адланыр.

Мисал $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ $(a > 0)$ гејри-мәхсуси интегралы $\lambda > 1$ олдугда јығылан, $\lambda \leqslant 1$ олдугда исә дағыландыр. Доғрудан да, $\lambda > 1$ олдугда

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{N\to+\infty} \left[\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_a^N = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{N^{\lambda-1}} - \frac{1}{a^{\lambda-1}}\right) = \frac{1}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{a^{\lambda-1}}$$

вә ја

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{a^{\lambda-1}}$$

олар. $\lambda \leqslant 1$ олдугда исә гејри-мәхсуси интегралын дағылан олмасы ашағыдакы мүнасибәтләрдән ајдындыр:

$\lambda = 1$ олдугда

$$\lim_{N\to+\infty} \int_a^N \frac{dx}{x} = \lim_{N\to+\infty} [\ln N - \ln a] = +\infty,$$

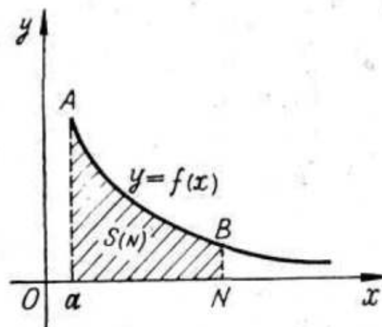
$\lambda < 1$ олдугда

$$\lim_{N\to+\infty} \int_a^N \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{1-\lambda}\left(N^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}\right) = +\infty.$$

$y = f(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x < +\infty)$ олдугда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ гејри мәхсуси

интегралыны һәндәси олараг сонсуз узун әјрихәтли трапесијанын $\{(x, y) \mid a \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ саһәси һесаб етмәк олар (шәкил 216). Доғрудан да, $aABN$ әјрихәтли трапесијасынын саһәси

$$S(N) = \int_a^N f(x)\,dx \qquad (4)$$



Шәкил 216

олар. $N \to +\infty$ шәртиндә (4) интегралынын лимити олса, онда һәмин лимити сонсуз узун әјрихәтли трапесијанын саһәси һесаб етмәк олар ки, бу да гејри-мәхсуси

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_a^N f(x)\,dx$$

интегралы илә ифадә олунур. $N \to +\infty$ шәртиндә (4) ифадәсинин лимитинин олмамасы һәмин сонсуз узун әјрихәтли трапесијанын саһәсинин сонсуз олдуғуну, јә'ни сонлу саһәсинин олмадығыны көстәрир. Бу һалда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ гејри-мәхсуси интегралы дағыландыр.

Гејд едәк ки,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (5)$$

вә истәнилән $b > a$ үчүн

$$\int_b^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (6)$$

гејри-мәхсуси интеграллары ејни заманда јығылан вә ја дағылан олар. Доғрудан да,

$$\int_a^N f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^N f(x)\,dx$$

вә $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы сонлу әдәд олдуғундан (5) вә (6) гејри-мәхсуси интеграллары ејни заманда јығылан вә ја дағылан олар.

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \quad \text{вә} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

гејри-мәхсуси интеграллары да ејни гајда илә тә'јин олунур:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^a f(x)\,dx, \qquad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (8)$$

Ахырынчы $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралыны

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N_1\to\infty}\int_{-N_1}^b f(x)\,dx + \lim_{N_2\to\infty}\int_b^{N_2} f(x)\,dx = \lim_{\substack{N_1\to\infty\\ N_2\to\infty}}\int_{-N_1}^{N_2} f(x)\,dx$$

кими дә тә'јин етмәк олар.

Верилмиш $f(x)$ функсијасынын (5), (7) вә (8) гејри-мәхсуси интеграллары илә бәрабәр онун мүтләг гијмәтинин

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx, \quad \int_{-\infty}^a |f(x)|\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

гејри-мәхсуси интегралларына да бахмаг олар.

(5) вә $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ гејри-мәхсуси интеграллары ејни заманда јығыландырса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралына *мүтләг јығылан гејри-мәхсуси интеграл* дејилир. Бу һалда дејирләр ки, $f(x)$ функсијасы $[a, +\infty)$ областында *мүтләг интегралланандыр*.

(5) интегралы јығылан, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ интегралы дағылан оларса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралына *шәрти јығылан гејри-мәхсуси интеграл* дејилир.

$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ вә $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралларынын да мүтләг вә шәрти јығылмасындан данышмаг олар.

§ 3. СОНСУЗ СӘРҺӘДЛИ ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЛАРЫН ХАССӘЛӘРИ

Бурада $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралынын бир сыра хассәләриндән данышылыр. Һәмин хассәләр $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ вә $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграллары үчүн дә ујғун шәкилдә доғрудур.

Хассә 1. *$[a, +\infty)$ областында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијасы $F(x)$ оларса, онда*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} \qquad (1)$$

бәрабәрлији (Нјутон—Лејбнис дүстуру) *доғрудур. Бурада*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) \qquad (2)$$

гәбул олунур вә (1) бәрабәрлији ашағыдакы кими баша дүшүлүр: бәрабәрлијин һәр ики тәрәфинин ејни заманда ја мә'насы вар (сонлудур) вә бу һалда бәрабәрлик доғрудур, ја да һәр ики тәрәфин мә'насы јохдур.

Доғрудан да, тә'рифә көрә

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_a^N f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}[F(N) - F(a)] =$$
$$= \lim_{N\to+\infty} F(N) - F(a) = F(+\infty) - F(a)$$

олар. $F(+\infty)$ ифадәси сонлу әдәд оларса, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы јығылан олар вә о у (1) дүстуру илә һесабламаг мүмкүндүр. (2) лимити јохдурса (вә ја сонсузлуға бәрабәрдирсә), $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы дағыландыр.

Хассә 2. *$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ вә $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ интеграллары јығыландырса, онда истәнилән һәгиги λ вә μ әдәдләри үчүн $\int_a^{+\infty} [\lambda f(x) + \mu\varphi(x)]\,dx$ интегралы да јығыландыр.*

Доғрудан да, тә'рифә көрә

$$\int_a^{+\infty} [\lambda f(x) + \mu\varphi(x)]\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_a^N [\lambda f(x) + \mu\varphi(x)]\,dx =$$

$$= \lambda\lim_{N\to+\infty}\int_a^N f(x)\,dx + \mu\lim_{N\to+\infty}\int_a^N \varphi(x)\,dx =$$
$$= \lambda\int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \mu\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx.$$

Ашағыдакы хассәләри дә ејни гајда илә исбат етмәк олар.

Хассә 3. *$U = f(x)$ вә $V = \varphi(x)$ функсијаларынын $[a, +\infty)$ областында кәсилмәз төрәмәләри варса вә $\int_a^{+\infty} UdV$, $UV\Big|_a^{+\infty}$, $\int_a^{+\infty} VdU$ ифадәләринин һәр һансы икиси сонлудурса, онда*

$$\int_a^{+\infty} UdV = UV\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} VdU \qquad (3)$$

дүстуру доғрудур.

Хассә 4. *Тутаг ки $f(x)$ функсијасы $[a, +\infty)$ областында кәсилмәјәндир, $x = \varphi(t)$ функсијасынын исә $[\alpha, \beta)$, $\alpha < \beta \leqslant +\infty$ јарыминтервалында кәсилмәз төрәмәси вардыр вә $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < \lim_{t\to\beta}\varphi(t) = +\infty$ мүнасибәти өдәнилир. Бу һалда, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы јығыландырса, онда*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \qquad (4)$$

дүстуру доғрудур.

Бу хассәләрдән истифадә етмәклә бир чох гејри-мәхсуси интеграллары һесабламаг олур.

Мисал. $J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$

$$J_1 = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1,$$
$$J_2 = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 2 = 2!,$$
$$J_3 = \int_0^{+\infty} x^3e^{-x}\,dx = -x^3e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 3\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx = 6 = 3!$$

вә үмумијјәтлә,

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = n!$$

§ 4. СОНСУЗ СӘРҺӘДЛИ ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЛАРЫН ЈЫҒЫЛМА ӘЛАМӘТЛӘРИ

Бә'зи мәсәләләрин тәдгигиндә чох заман гејри-мәхсуси интегралларын гијмәтини дејил, он арын јығылан вә ја дағылан олмасыны билмәк лазым олур. $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијасы мә'лум оларса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ геј и-мәхсуси интегралынын јығылан олмасыны әввәлки параграфда көстәрилән тәклифләр васитәсилә јохламаг олар. Интегралалты функсијанын ибтидаи функсијасы мә'лум олмадыгда исә гејри-мәхсуси интегралларын јығылма мәсәләси чох зам н ашағыда көстәрилән әламәтләри тәтбиг етмәклә өјрәнилир.

Фәрз едәк ки, $f(x)$ функсиј сы $[a, +\infty)$ областында кәсилмәјән вә мәнфи гијмәтләр алмајан функсијадыр. Онда

$$J(N) = \int_a^N f(x)\,dx$$

функс јасы $[a, +\infty)$ јарыминтервалында монотон азалмајан олар. Буна көрә дә $N \to +\infty$ шәртиндә $J(N)$ функсијасы монотон артараг ја сонлу лимитә, ја да сонсузлуға јахынлашыр. Мә'лумдур ки, монотон артан $J(N)$ функсијасынын $N \to +\infty$ шәртиндә сонлу л митинин олмасы үчү онун мәһдуд, јә'ни

$$|J(N)| \leqslant M, \quad a \leqslant N < +\infty \tag{1}$$

олмасы зәрури вә кафи шәртдир (XII, § 11).

Бурадан г јри-мәхсуси интегралларын јығылмасы үчүн ашағыдакы теорем алыныр:

Теорем 1. *$f(x)$ функсијасы $[a, +\infty)$ јарыминтервалында кәсилмәјән вә мәнфи гијмәтләр алмајан функсија олдугда (1) мүнасибәтинин өдәнилмәси $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралынын јығылан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәртдир.*

Гејд едәк ки, (1) шәрти өдәнилмәдикдә

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx = +\infty$$

олар.

Теорем 2. *$[a, +\infty)$ јарыминтервалында кәсилмәјән $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары үчүн*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant C\varphi(x) \tag{2}$$

($C > 0$ сабит әдәддир) бәрабәрсизлији өдәнилирсә, онда $J_1 = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ интегралы јығылан олдугда $J_2 = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы да јығылыр, J_2 интегралы дағылан олдугда J_1 интегралы да дағылыр.

Исбаты. Фәрз едәк ки, J_1 интегралы јығылыр. Онда $\varphi(x) \geqslant 0$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ олдуғундан

$$J_1(N) = \int_a^N \varphi(x)\,dx$$

интегралы артараг $N \to +\infty$ шәртиндә сонлу лимитә јахынлашыр:

$$\int_a^N \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx = J_1. \tag{3}$$

Бурадан вә (2) бәрабәрсизлијиндән

$$J_2(N) = \int_a^N f(x)\,dx \leqslant C\int_a^N \varphi(x)\,dx \leqslant CJ_1 \tag{4}$$

аларыг. $J_2(N)$ интегралы јухарыдан мәһдуд олдуғундан 1-чи теоремә көрә J_2 интегралы јығылыр.

J_2 интегралы дағылан олдугда (4) бәрабәрсизлијинә көрә J_1 интегралы да дағылыр.

Теорем 3. *$[a, +\infty)$ јарыминтервалында кәсилмәјән $\varphi(x)$ вә $f(x) \geqslant 0$ функсијалары үчүн*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \gamma \tag{5}$$

лимити варса, онда $0 < \gamma < +\infty$ олдугда $J_1 = \int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ вә $J_2 = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграллары ејни заманда ја јығылыр, ја да дағылыр.

Исбаты. Лимитин тә'рифинә көрә истәнилән $0 < \varepsilon < \frac{\gamma}{2}$ әдәди үчүн елә $N_0 > 0$ вар ки, x-ин бүтүн $x > N_0$ гијмәтләриндә

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \gamma\right| < \varepsilon$$

вә ја

$$(\gamma - \varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (\gamma + \varepsilon)\varphi(x) \quad (N_0 \leqslant x < +\infty) \tag{6}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

J_1 интегралы јығылан олдугда $\int_{N_0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ интегралы да јығылыр. Онда (6) бәрабәрсизлијинә көрә $\int_{N_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы

јығылыр, буғалан да, J_2 интегралынын јығылан олмасы ајдындыр.

Исбатын арды ејни мүһакимә илә тамамланыр.

Нәтиҹә. Тутаг ки, $[a, +\infty)$ јарыминтервалында мәнфи гијмәтләр алмајан $f(x)$ функсијасы үчүн

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\lambda} f(x) = \gamma$$

мүнасибәти өдәнилир. Онда 1) $0<\gamma<\infty$ вә $\lambda\leq 1$ олдугда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{7}$$

интегралы дағылыр, 2) $0\leq\gamma<\infty$ вә $\lambda>1$ олдугда исә (7) интегралы јығылыр.

Нәтиҹәнин доғрулуғуна инанмаг үчүн $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ интегралынын $\lambda>1$ олдугда јығылан, $\lambda\leq 1$ олдугда исә дағылан олдуғуну (§ 2, мисал 1) нәзәрә алмаг лазымдыр.

Хүсуси һалда,

$$f(x)\approx\frac{1}{x^{\lambda}}$$

оларса, онда $\lambda>1$ олдугда (7) интегралы јығылыр, $\lambda\leq 1$ олдугда исә дағылыр.

§ 5. КОШИ КРИТЕРИСИ ВӘ АБЕЛ ӘЛАМӘТИ

Тутаг ки, $J=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы јығылыр. Бу, о демәкдир ки,

$$F(N)=\int_a^{N} f(x)\,dx$$

функсијасынын $N\to+\infty$ шәртиндә сонлу J лимити вар. Коши критерисинә (XII, § 11) көрә бу, ашағыдакы шәртин өдәнилмәсинә еквивалентдир:

истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $N_0=N_0(\varepsilon)$ вар ки, истәнилән $N_1>N_0$ вә $N_2>N_0$ үчүн

$$\left|\int_{N_1}^{N_2} f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{N_2} f(x)\,dx - \int_a^{N_1} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Бурадан $f(x)$ функсијасынын $[a, +\infty)$ јарыминтервалында интегралланан олмасы үчүн ашағыдакы зәрури вә кафи шәрт алыныр.

Теорем 1 (Коши критериси). *$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралынын*

јығылан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт беләдир: истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә N_0 вар ки, истәнилән $N_1>N_0$ вә $N_2>N_0$ үчүн

$$\left|\int_{N_1}^{N_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon \tag{1}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Инди фәрз едәк ки, $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ интегралы јығылыр. Онда Коши критерисинә көрә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә N_0 вар ки, истәнилән $N_1>N_0$ вә $N_2>N_0$ әдәдләри үчүн

$$\left|\int_{N_1}^{N_2}|f(x)|\,dx\right|<\varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан,

$$\left|\int_{N_1}^{N_2} f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_{N_1}^{N_2}|f(x)|\,dx\right|$$

бәрабәрсизлијинә әсасән,

$$\left|\int_{N_1}^{N_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon \quad (N_1>N_0,\ N_2>N_0)$$

алыныр ки, бу да $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралынын јығылан олдуғуну көстәрир.

Беләликлә, ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг:

Теорем 2. *Гејри-мәхсуси $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ интегралы јығылырса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы да јығылыр.*

Теорем 3. (Абел әламәти). *Тутаг ки, $\varphi(x)$ функсијасы $[a, +\infty)$ јарыминтервалында дифференсиалланандыр, монотон азалыр, $x\to+\infty$ шәртиндә исә сыфра јахынлашыр вә истәнилән $N>a$ үчүн*

$$\left|\int_a^{N} f(x)\,dx\right|\leq M_0<+\infty \tag{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда гејри-мәхсуси

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{3}$$

интегралы јығылыр.

Исбаты. $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ олдугда истәнилән N_1 вә N_2 әдәдләри үчүн

$$\int_{N_1}^{N_2} f(x)\varphi(x)\,dx = [F(x)\varphi(x)]_{N_1}^{N_2} - \int_{N_1}^{N_2} F(x)\varphi'(x)\,dx \qquad (4)$$

дүстуруну аларыг. $\varphi(x)$ функсиjасы монотон азалан олдуғундан $\varphi'(x)\leqslant 0$ олар.

Инди $\int_{N_1}^{N_2} F(x)\varphi'(x)\,dx$ интегралына орта гиjмәт теоремини (XXII, § 6) тәтбиг едәк:

$$\int_{N_1}^{N_2} F(x)\varphi'(x)\,dx = F(\xi)\int_{N_1}^{N_2}\varphi'(x)\,dx = F(\xi)\,[\varphi(N_2)-\varphi(N_1)],\ [\xi\in(N_1,\ N_2)].$$

Бурадан (2) бәрабәрсизлиjинә вә (4) бәрабәрлиjинә әсасән

$$\left|\int_{N_1}^{N_2} f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant 2M_0\,[\,|\varphi(N_1)|+|\varphi(N_2)|\,]$$

мүнасибәти алыныр. Шәртә көрә $\varphi(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$ олдуғундан

$$\lim_{\substack{N_1\to+\infty\\ N_2\to+\infty}}\int_{N_1}^{N_2} f(x)\varphi(x)\,dx=0$$

олар. Демәли, (3) интегралы jығылыр (Коши критерисинә көрә).

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралынын jығылмасы һаггында сөjләдиjимиз бу тәклифләр уjғун шәкилдә

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{вә} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

интеграллары үчүн дә доғрудур.

Мисал 1. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^\lambda}\,dx$ вә $\int_1^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^\lambda}\,dx$ интеграллары $\lambda>1$ олдугда мүтләг jығылыр.

Доғрудан да,

$$\left|\frac{\sin ax}{x^\lambda}\right|\leqslant\frac{1}{x^\lambda} \quad \text{вә} \quad \left|\frac{\cos ax}{x^\lambda}\right|\leqslant\frac{1}{x^\lambda}\quad(1\leqslant x<+\infty)$$

бәрабәрсизликләри өдәнилдиjиндән вә $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$ $(\lambda>1)$ интегралы jығылан олдуғундан (§ 2, мисал 1) 2-чи теоремә (§ 4) көрә

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin ax|}{x^\lambda}\,dx \quad \text{вә} \quad \int_1^{+\infty}\frac{|\cos ax|}{x^\lambda}\,dx$$

интеграллары jығыландыр. Онда jухарыда исбат етдиjимиз 2-чи теоремә көрә

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^\lambda}\,dx \quad \text{вә} \quad \int_1^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^\lambda}\,dx \qquad (5)$$

интеграллары мүтләг jығылан олур.

Мисал 2. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}$ интегралы шәрти jығыландыр.

Бу интеграла һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну (§ 3, хассә 3) тәтбиг етсәк, аларыг:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,d(\cos x) = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\cos x\,d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \cos 1 - \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Сағ тәрәфдәки һәдләрин икиси дә сонлудур (интегралын jығылан олмасы 1-чи мисалдан аjдындыр), буна көрә дә сол тәрәфдәки интеграл jығыландыр.

Инди көстәрәк ки, $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ интегралы дағыландыр.

Бу мәгсәдлә

$$|\sin x|\geqslant\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

бәрабәрсизлиjиндән истифадә едәк. Онда истәнилән $N>0$ үчүн

$$\int_1^N\frac{|\sin x|}{x}\,dx\geqslant\int_1^N\frac{1}{2x}\,dx-\int_1^N\frac{\cos 2x}{2x}\,dx \qquad (6)$$

бәрабәрсизлиjини jазмаг олар. Сағ тәрәфдәки биринчи интеграл $N\to+\infty$ шәртиндә сонсузлуға jахынлашыр, jә'ни $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ интегралы дағыландыр: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\,dx=+\infty$. Икинчи интеграл исә jығыландыр. Демәли, $N\to+\infty$ шәртиндә (6) бәрабәрсизлиjиндә лимитә кечсәк, сағ тәрәф вә буна көрә дә сол тәрәф сонсузлуға jахынлашыр. Бу исә $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ интегралынын дағылан олдуғуну көстәрир:

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx=+\infty.$$

§ 6. ГЕЈРИ-МӘҺДУД ФУНКСИЈАЛАРЫН ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЫ

Тутаг ки, $[a, b]$ парчасы сонлудур, $f(x)$ функсијасы исә истәнилән $[a, b-\delta]$, $0<\delta<b-a$ парчасында интегралланандыр вә $[a, b]$ парчасында гејри-мәһдуддур (демәли, $x=b$ нөгтәсинин истәнилән әтрафында $f(x)$ функсијасы гејри-мәһдуддур). Онда истәнилән кичик $\delta>0$ әдәди үчүн $\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ интегралы сонлу олар. Әкәр сонлу

$$\lim_{\delta\to+0}\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx \qquad (1)$$

лимити варса, онда һәмин лимитә $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында гејри-мәхсуси интегралы дејилир вә

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0}\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx \qquad (2)$$

кими ишарә олунур.

Гејд едәк ки, (2) бәрабәрлијини

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b-0}\int_a^{b'} f(x)\,dx,\quad a<b'<b$$

кими јазмаг олар.

Демәли, (1) лимити сонлу әдәд олдугда, һәмин лимит $\int_a^b f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралынын гијмәти олараг көтүрүлүр. Бу һалда, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралына јығылан, әкс һалда, јә'ни (1) лимити олмадыгда вә ја $\pm\infty$-а бәрабәр олдугда һәмин гејри-мәхсуси интеграла дағылан дејилир.

Әкәр $f(x)$ функсијасы $x=a$ нөгтәсинин әтрафында гејри-мәһдуд вә истәнилән $[a+\delta, b]$ $(0<\delta<b-a)$ парчасында интегралланан олса, онда онун $[a, b]$ парчасында гејри-мәхсуси интегралы

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

кими тә'јин олунур. $f(x)$ функсијасы истәнилән $[a, c-\delta_1]$ $(0<\delta_1<c-a)$ вә $[c+\delta_2, b]$ $(0<\delta_2<b-c)$ парчаларында интегралланан вә $[a, b]$ парчасынын дахили $x=c$ нөгтәсинин әтрафында гејри-мәһдуд олдугда, онун $[a, b]$ парчасында гејри-мәхсуси интегралы $\int_a^c f(x)\,dx$ вә $\int_c^b f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси

интегралларынын ҹәми кими

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \qquad (4)$$

вә ја

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_1\to+0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx+\lim_{\delta_2\to+0}\int_{c+\delta_2}^b f(x)\,dx$$

кими тә'јин олунур.

$f(x)$ функсијасы a вә b нөгтәләринин икисиндә дә ејни заманда гејри-мәһдуд оларса, онда онун (a, b) интервалында гејри-мәхсуси интегралы да (4) бәрабәрлији илә тә'јин олунур. Бу һалда c нөгтәси олараг (a, b) интервалынын истәнилән нөгтәси көтүрүлә биләр.

Нәһајәт, $f(x)$ функсијасы сонлу сајда

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$$

нөгтәләриндә гејри-мәһдуддурса вә

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx\quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

гејри-мәхсуси интегралларынын һамысы јығыландырса, онда $\int_a^b f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \qquad (5)$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур.

$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуддурса вә һәмин парчада ади мүәјјән интегралы варса, онда онун (2)—(5) бәрабәрликләри илә тә'јин олунан „гејри-мәхсуси интеграллары" ади мүәјјән интегралы илә үст-үстә дүшүр. Буна көрә дә гејри-мәһдуд функсијанын (1) гејри-мәхсуси интегралыны $\int_a^b f(x)dx$ илә (мүәјјән интеграл кими) ишарә етмәк гарышыглыға сәбәб олмур.

Гејри-мәхсуси интегралын ади мүәјјән интегралын (мәхсуси интегралын) үмумиләшмәси олмасы да бурадан ајдындыр. Буна көрә дә „$\int_a^b f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы" әвәзинә „$\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы" демәк һеч бир долашыглыға сәбәб олмур.

Гејри-мәһдуд функсијаларын гејри-мәхсуси интегралынын да мүтләг вә шәрти јығылмасындан данышмаг олар.

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (6)$$

интегралы јығылан олдугда $\int_a^b f(x)dx$ интегралына мүтләг јығылан интеграл дејилир. (6) интегралы дағылан, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы јығылан олдугда исә $\int_a^b f(x)\,dx$ шәрти јығылан интеграл адланыр.

Мисал. Гејри-мәхсуси $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu}$ вә $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\gamma}$ интегралларынын јығылмасыны тәдгиг етмәли.

$\mu \neq 1$ олдугда

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{(x-a)^{-\mu+1}}{-\mu+1}\Bigg|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{(b-a)^{-\mu+1}}{-\mu+1} - \frac{\varepsilon^{-\mu+1}}{-\mu+1}\right] = \begin{cases}\frac{(b-a)^{-\mu+1}}{-\mu+1}, & \mu<1 \text{ олдугда}\\ \infty, & \mu>1 \text{ олдугда}\end{cases}$$

олур. $\mu=1$ олдугда исә

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b\frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon\to+0}[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]=\infty.$$

Демәли, $\mu<1$ олдугда $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu}$ интегралы јығылан, $\mu\geq1$ олдугда исә дағыландыр. Јығылан интегралын гијмәти ашағыдакы кими тапылыр:

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\mu} = \frac{1}{1-\mu}(b-a)^{1-\mu} \quad (\mu<1).$$

Икинҹи интеграл да $\gamma<1$ олдугда јығылыр, $\gamma\geq1$ олдугда исә дағылыр.

§ 7. ГЕЈРИ-МӘҺДУД ФУНКСИЈАЛАРЫН ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЫНЫН ХАССӘЛӘРИ ВӘ ЈЫҒЫЛМА ӘЛАМӘТЛӘРИ

Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш вә $x=b$ нөгтәси әтрафында гејри-мәһдуд олан функ-

сијадыр. Онда онун $\int_a^b f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралындан данышмаг олар.

Гејри-мәхсуси интегралларын, мүәјјән интегралын мә'лум хассәләринә (хәттилик, дәјишәни әвәзетмә вә с.) охшар хассәләри вардыр. Бурада онларын анҹаг бир нечәси верилир.

Хассә 1. *$[a, b)$ јарыминтервалында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијасы $F(x)$ олдугда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0)-F(a) \qquad (1)$$

$$\left(F(b-0)=\lim_{x\to b-0}F(x)\right)$$

бәрабәрлији (Нјутон—Лејбнис дүстуру) доғрудур.

Бу һалда (1) бәрабәрлији ашағыдакы кими баша дүшүлүр: ја бәрабәрлијин һәр ики тәрәфи сонлудур вә (1) доғрудур, ја да бәрабәрлијин һәр ики тәрәфинин мә'насы јохдур.

(1) бәрабәрлијини исбат етмәк үчүн $[a, b-\delta]$ парчасы үчүн

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx = F(b-\delta)-F(a)$$

Нјутон—Лејбнис дүстуруну (XXII, § 8) јазмаг, сонра да ахырынҹы бәрабәрликдә $\delta\to+0$ шәртиндә лимитә кечмәк лазымдыр.

Хассә 2. *$U=f(x)$ вә $V=\varphi(x)$ функсијаларынын $[a, b)$ јарыминтервалында кәсилмәз төрәмәләри варса вә $\int_a^b UdV$, $UV\Big|_a^b$, $\int_a^b VdU$ ифадәләринин һәр һансы икиси сонлудурса, онда*

$$\int_a^b UdV=UV\Big|_a^b-\int_a^b VdU \qquad (2)$$

дүстуру доғрудур.

(2) бәрабәрлији мүәјјән интегралын һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна (XXII, § 9) әсасән исбат олунур.

Мисал. $J_n=\int_0^1(\ln x)^n dx$ интегралыны һесабламалы.

$\lim_{x\to+0} x(\ln x)^n=0$ олдуғундан (2) дүстуруна әсасән аларыг:

$$J_n=\int_0^1(\ln x)^n dx = x(\ln x)^n\Big|_0^1 - n\int_0^1(\ln x)^{n-1}dx =$$

$$= -nJ_{n-1},\quad n=1, 2, \ldots$$

Бурадан, $J_0 = \int_0^1 dx = 1$ олдуғуна көрә

$$J_n = -nJ_{n-1} = -n[-(n-1)J_{n-2}] = (-1)^2 n(n-1)J_{n-2} = \dots = (-1)^n n!$$

вә ја

$$J_n = (-1)^n n!$$

алыныр.

Гејри-мәхсуси интегралын башга хассәләрини дә ејни гајда илә исбат етмәк олар.

Инди интегралын бир сыра јығылма әламәтләрини гејд едәк.

Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш, мәнфи гијмәтләр алмајан вә истәнилән $[a, b-\delta]$ $(0 < \delta \leqslant b-a)$ парчасында интегралланан функсијадыр. Онда

$$F(\delta) = \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx \qquad (3)$$

функсијасы $\delta \to +0$ шәртиндә монотон артан олар. Буна көрә дә сонлу вә ја сонсуз $\lim_{\delta\to+0} F(\delta)$ лимити һәмишә вар. Бу лимитин сонлу олмасы үчүн (3) интегралынын бүтүн $0 < \delta \leqslant b-a$ әдәдләри үчүн мәһдуд олмасы зәрури вә кафи шәртдир:

$$|F(\delta)| \leqslant M \ (0 < \delta \leqslant b-a). \qquad (4)$$

Бурадан ашағыдакы тәклифи аларыг:

Теорем 1. ***$f(x)$ функсијасы $[a, b)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш вә мәнфи гијмәтләр алмајан функсија олдуғда (4) мүнасибәтинин өдәнилмәси $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралынын јығылан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәртдир.***

Демәли, (4) шәрти өдәнилмәдикдә

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx = \infty$$

олар.

Бу теоремдән истифадә едәрәк гејри-мәхсуси интегралларын јығылмасы үчүн мүгајисә әламәтини исбат етмәк олар.

Теорем 2. ***$[a, b)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш вә истәнилән $[a, b-\delta]$ $(0<\delta<b-a)$ парчасында интегралланан $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары үчүн***

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \qquad (5)$$

бәрабәрсизлији өдәнилирсә, онда $J_1 = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ интегралы јығылан олдуғда $J_2 = \int_a^b f(x)\,dx$ интегралы да јығылыр. J_2 интегралы дағылан олдуғда J_1 интегралы да дағылыр.

Исбаты. Тутаг ки, J_1 интегралы јығылыр. Онда 1-чи теоремә көрә

$$\int_a^{b-\delta} \varphi(x)\,dx \leqslant M \ (0 < \delta \leqslant b-a) \qquad (6)$$

олар. Бурадан, (5) бәрабәрсизлијинә әсасән,

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{b-\delta} \varphi(x)\,dx \leqslant M \ (0<\delta \leqslant b-a)$$

алыныр ки, бу да J_2 интегралынын јығылан олдуғуну көстәрир.

J_2 интегралы дағылан олдугда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx = +\infty$$

олар. Бу һалда (5) бәрабәрсизлијинә көрә

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{b-\delta} \varphi(x)\,dx$$

олдуғундан

$$+\infty = \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx \leqslant \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx = +\infty.$$

Теорем 3. ***$[a, b)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш, мәнфи гијмәтләр алмајан вә истәнилән $[a, b-\delta]$ парчасында интегралланан $f(x)$ вә $\varphi(x)>0$ функсијалары үчүн***

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \gamma \ (0 < \gamma < \infty). \qquad (7)$$

лимити варса, онда J_1 вә J_2 интеграллары ејни заманда ја јығылыр, ја да дағылыр.

Исбаты. Лимитин тә'рифинә көрә истәнилән $0 < \varepsilon < \gamma$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, x-ин $b-\delta < x < b$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$\gamma - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \gamma + \varepsilon$$

вә ја

$$(\gamma - \varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (\gamma + \varepsilon)\varphi(x) \qquad (8)$$
$$(b - \delta < x < b)$$

бәрабәрсизликләри өдәнилир.

$J_1 = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ интегралы јығылан олдугда $\int_{b-\delta}^b \varphi(x)\,dx$ интегралы да јығылар. Онда 2-чи теоремә вә (8) бәрабәрсизликлә-

ринин сағ тәрәфинә көрә $\int_{b-\delta}^{b} f(x)\,dx$ интегралы јығылар. Бурадан J_2 интегралынын јығылмасы ајдындыр.

$J_2=\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы јығылан олдугда $\int_{b-\delta}^{b} f(x)\,dx$ интегралы вә (8) бәрабәрсизлијинә көрә $\int_{b-\delta}^{b}(\gamma-\varepsilon)\varphi(x)\,dx=$ $=(\gamma-\varepsilon)\int_{b-\delta}^{b}\varphi(x)\,dx$ интегралы јығылан олар. Бурадан J_1 интегралынын јығылан олмасы ајдындыр.

Нәтичә. Тутаг ки, $[a, b)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш вә мәнфи гијмәтләр алмајан $f(x)$ функсијасы үчүн

$$\lim_{x\to b-0}(b-x)^{\mu}f(x)=\gamma \tag{9}$$

өдәнилир. Онда 1) $0\leqslant\gamma<+\infty$ вә $\mu<1$ олдугда

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{10}$$

интегралы јығылыр, 2) $0<\gamma<+\infty$ вә $\mu\geqslant 1$ олдугда исә (10) интегралы дағылыр.

Нәтичәнин доғрулуғуна инанмаг үчүн

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\mu}} \tag{11}$$

интегралынын $\mu<1$ олдугда јығылан, $\mu\geqslant 1$ олдугда исә дағылан олдуғуну нәзәрә алмаг лазымдыр.

Хүсуси һалда, $x\to b-0$ шәртиндә

$$f(x)\approx\frac{1}{(b-x)^{\mu}}$$

оларса, онда $\mu<1$ олдугда (10) интегралы јығылар, $\mu\geqslant 1$ олдугда исә дағылар.

Бурада исбат олунан тәклифләр ујғун шәкилдә башга гејри-мәхсуси интеграллар (интегралалты функсија a нөгтәси вә ја башга дахили $c\,(a<c<b)$ нөгтәси әтрафында гејри-мәһдуд олдугда) үчүн дә доғрудур.

Мисал 1. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1-x^2}$ интегралы дағылыр.

Доғрудан да,

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{1}{2}$$

олдуғундан 3-чү теоремин нәтичәсинә көрә интеграл дағылыр.

Мисал 2. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегралы јығылыр.

Доғрудан да,

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

олдуғундан нәтичәјә көрә интеграл јығылыр.

§ 8. КОШИ КРИТЕРИСИ ВӘ ИНТЕГРАЛЫН МҮТЛӘГ ЈЫҒЫЛМА ӘЛАМӘТИ

Фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш вә истәнилән $[a, b']$ $(a\leqslant b'<b)$ парчасында интегралланан функсијадыр. Онда истәнилән $a\leqslant x<b$ үчүн

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

интегралы сонлу олар. Ајдындыр ки, $x\to b-0$ шәртиндә $F(x)$ функсијасынын сонлу лимитинин варлығы

$$\int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

гејри-мәхсуси интегралынын јығылмасына еквивалентдир.

Коши критерисинә (XII, § 11) көрә исә $F(x)$ функсијасынын $x\to b-0$ шәртиндә сонлу лимитинин варлығы үчүн зәрури вә кафи шәрт беләдир: истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ вар ки, x-ин $b-\delta<x'<b$, $b-\delta<x''<b$ бәрабәрсизликләрини өдәјән ихтијари x' вә x'' гијмәтләриндә

$$|F(x'')-F(x')|<\varepsilon \tag{3}$$

мүнасибәти өдәнилир. Бурада

$$F(x'')-F(x')=\int_a^{x''} f(t)\,dt-\int_a^{x'} f(t)\,dt=\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, (3) бәрабәрсизлијини

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right|<\varepsilon \tag{4}$$

кими јаза биләрик.

Бурадан (2) интегралынын варлығы үчүн ашағыдакы теорем алыныр:

Теорем 1 (Коши критериси). *(2) интегралынын јығылан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт беләдир: истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $\delta=\delta(\varepsilon)$ вар ки, x-ин $b-\delta<x'<b$ вә $b-\delta<x''<b$ бәрабәрсизликләрини өдәјән*

ихтијари x' вә x'' гијмәтләриндә

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

мүнасибәти өдәнилир.

Инди (2) интегралынын мүтләг јығылмасы һаггында теореми исбат едәк.

Теорем 2. *Гејри-мәхсуси $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ интегралы јығылырса, онда (2) интегралы да јығылыр.*

Доғрудан да, $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ интегралы јығылан олдуғундан Коши критерисинә көрә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $\delta=\delta(\varepsilon)$ вар ки, $b-\delta<b'<b$ вә $b-\delta<b''<b$ бәрабәрсизликләрини өдәјән истәнилән b' вә b'' әдәдләри үчүн

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$$

өдәнилир. Онда

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx\right|$$

олдуғундан көстәрилән ихтијари b' вә b'' әдәдләри үчүн

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәниләр. Бурадан, Коши критерисинә көрә, (2) интегралынын јығылмасы ајдындыр.

Гејд едәк ки, (2) интегралы јығылдығда $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ интегралы дағылан да ола биләр. Бу һалда (2) интегралына шәрти јығылан интеграл дејилир.

Мисал. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ интегралы јығылыр.

Доғрудан да, $0<x<1$ олдугда

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Сағ тәрәфдәки функсијанын $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ интегралы јығылан олдуғундан (§ 6, мисал), 2-чи теоремә (§ 7) көрә $\int\limits_0^1 \left|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\right| dx$ интегралы да јығыландыр. Онда, индиси исбат етдијимиз 2-чи теоремә көрә $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ интегралы јығылыр.

§ 9. ИНТЕГРАЛЫН БАШ ГИЈМӘТИ

I. Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $(-\infty, +\infty)$ интервалында тә'јин олунмуш вә истәнилән сонлу $[-N_1, N_2]$ парчасында интегралланан функсијадыр. Бу һалда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{N_1\to\infty \\ N_2\to\infty}} \int\limits_{-N_1}^{N_2} f(x)\,dx \qquad (1)$$

кими тә'јин олунур. Бурада N_1 вә N_2 кәмијјәтләри бир-бириндән асылы олмајараг сонсузлуға јахынлашыр. Ола биләр ки, (1) лимити јохдур, лакин $N_1=N_2=N\to\infty$ шәртиндә һәмин лимит вар. Онда бу лимитә, јә'ни

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N} f(x)\,dx \qquad (2)$$

ифадәсинә $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ интегралынын *Коши мә'нада баш гијмәти* дејилир вә ашағыдакы шәкилдә јазылыр:

$$V.\,P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N} f(x)\,dx \qquad (3)$$

($V.\,P.$ һәрфләри „valeur principale“ (франсызча—баш гијмәт) сөзләринин баш һәрфләридир).

Тутаг ки, $\int\limits_0^{\infty} [f(x)+f(-x)]\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы јығыландыр вә (3) баш гијмәти сонлудур. Онда $f(x)$ функсијасыны тәк гә чүт функсијанын чәми шәклиндә

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

кими көстәрсәк,

$$V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\int\limits_{-N}^{N}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx + \int\limits_{-N}^{N}\frac{f(x)-f(-x)}{2}\,dx\right] = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx =$$

$$= 2\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^{N}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx = \int\limits_0^{\infty}[f(x)+f(-x)]\,dx$$

вә ја

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} [f(x)+f(-x)]\,dx \qquad (4)$$

олар. Хүсуси һалда, $f(x)$ функсијасы чүт функсија оларса, онда (4) дүстуруну

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

кими јазмаг олар.

Мисал 1.

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\sin x\,dx = \lim_{N\to\infty}[-\cos N+\cos(-N)]=0.$$

Гејд едәк ки, $\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,dx$ гејри-мәхсуси интегралы дағылыр.

Мисал 2.

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$$

II. $f(x)$ функсијасы истәнилән $[a,\ c-\delta_1]$ $(0<\delta_1<c-a)$ вә $[c+\delta_2,\ b]$ $(0<\delta_2<b-c)$ парчаларында интегралланан вә $[a,\ b]$ парчасынын дахили $x=c$ нөгтәсинин әтрафында гејри-мәһдуд олдугда, онун $[a,\ b]$ парчасында гејри-мәхсуси интегралы ашағыдакы кими тә'јин олунур.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_1\to+0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \lim_{\delta_2\to+0}\int_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\left[\int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \int_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx\right]. \qquad (5)$$

Бурада δ_1 вә δ_2 кәмијјәтләри бир-бириндән асылы олмајараг сыфра јахынлашыр. Бу һалда (5) лимити олмаја да биләр. Лакин $\delta_1=\delta_2=\delta\to0$ шәртиндә бә'зән һәмин лимит сонлу олур. Онда бу лимитә, јә'ни

$$\lim_{\delta\to+0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx\right]$$

ифадәсинә $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралынын Коши мә'нада баш гијмәти дејилир вә

$$V.P.\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx\right] \qquad (6)$$

кими ишарә олунур.

Мисал 3. $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ $(a<c<b)$ гејри-мәхсуси интегралы дағылыр. Доғрудан да,

$$\int_a^{c-\delta_1}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta_2}^{b}\frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\delta_1}{\delta_2} \qquad (7)$$

бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки ифадәнин δ_1 вә δ_2 кәмијјәтләри бир-бириндән асылы олмајараг сыфра јахынлашдыгда лимити јохдур.

Инди (7) бәрабәрлијиндә $\delta_1=\delta_2=\delta$ һесаб едәк. Онда

$$\lim_{\delta\to+0}\left[\int_a^{c-\delta}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta}^{b}\frac{dx}{x-c}\right] = \ln\frac{b-c}{c-a} = V.P.\int_a^b\frac{dx}{x-c}$$

олар. Демәли, верилмиш гејри-мәхсуси интеграл дағыландыр, лакин онун Коши мә'нада баш гијмәти вар.

Гејд едәк ки, верилмиш гејри-мәхсуси интеграл јығылан олдугда, онун Коши мә'нада баш гијмәти дә вар вә һәмин интегралын гијмәти илә үст-үстә дүшүр.

IV ҺИССӘ

ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАЛАРЫН ДИФЕРЕНСИАЛ ҺЕСАБЫ

XXV ФӘСИЛ

ЧОХӨЛЧҮЛҮ ФӘЗАДА НӨГТӘЛӘР ЧОХЛУҒУ

§ 1. МЕТРИК ФӘЗАЛАР

Ријази анализин әсас анлајышлары лимит васитәсилә тә'јин олунур. Лимит анлајышынын тә'рифи исә әдәдләр фәргини мүтләг гијмәтинә, јә'ни һәгиги әдәдләр арасындакы мәсафә анлајышына әсасланыр.

Һәгиги әдәдләр арасындакы мәсафә анлајышыны истәнилән тәбиәтли елементләр чохлуғу үчүн үмумиләшдирмәк олар.

Тутаг ки, R илә истәнилән тәбиәтли $X, У, Z, U, \ldots$, елементләр чохлуғу ишарә олунмушдур.

Тә'риф 1. *Тутаг ки, R чохлуғунун истәнилән ики X вә $У$ елементинә, һәмин елементләр арасындакы мәсафә адланан вә ашағыдакы шәртләри (метрик фәзанын аксиомларыны) өдәјән бир һәгиги $\rho(X, У)$ әдәди ујғун гојулур:*

1. $\rho(X, У) = 0$ мүнасибәти ($X \in R$, $У \in R$) јалныз вә јалныз $X = У$ олдугда өдәнилир.

2. Истәнилән $X \in R$ вә $У \in R$ үчүн

$$\rho(X, У) = \rho(У, X)$$

бәрабәрлији (симметрија аксиому) өдәнилир.

3. Истәнилән $X \in R$, $У \in R$ вә $Z \in R$ үчүн

$$\rho(X, У) \leqslant \rho(X, Z) + \rho(Z, У)$$

мүнасибәти (үчбучаг бәрабәрсизлији) өдәнилир.

R чохлуғу илә $\rho(X, У)$ мәсафә функсијасынын (R, ρ) чүтүнә *метрик фәза* дејилир. $\rho(X, У)$ мәсафә функсијасы *метрика* адланыр вә метрик фәзанын гурулушуну тә'јин едир.

Метрик фәзаны, адәтән, бир һәрфлә $E = (R, \rho)$ вә ја метрик фәзаны тәшкил едән R нөгтәләр чохлуғунун ишарә едилдији „R һәрфи" илә ишарә едирләр. R чохлуғунун елементләри *метрик фәзанын нөгтәләри* адланыр.

Тә'рифдәки 3-чү аксиомда $X = У$ көтүрдүкдә $2\rho(X, Z) \geqslant 0 \to \rho(X, Z) \geqslant 0$ алыныр ки, бу да мәсафә функсијасынын һәмишә мәнфи олмајан гијмәтләр алдығыны көстәрир.

Һәр бир хәтти нормалашмыш фәзада (IV, § 9) метрика тә'јин етмәк олар. Бу мәгсәдлә истәнилән $X \in R$ вә $У \in R$ нөгтәләри арасындакы мәсафәни

$$\rho(X, У) = \| X - У \| = \| У - X \| \qquad (1)$$

кими тә'јин етмәк лазымдыр. Белә тә'јин олунмуш мәсафә функсијасы үчүн метрик фәза аксиомлары өдәнилир. Доғрудан да, биринчи ики аксиомун өдәнилмәси ашкардыр, үчүнчү аксиомун өдәнилмәси исә ашағыдакы мүнасибәтдән ајдындыр:

$$\rho(X, У) = \| X - У \| = \| (X - Z) + (Z - У) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| X - Z \| + \| Z - У \| = \rho(X, Z) + \rho(Z, У).$$

Демәли, (1) шәклиндә тә'јин олунмуш мәсафә функсијасы илә һәр бир хәтти нормалашмыш R фәзасы метрик фәзаја чеврилир, јә'ни (R, ρ) чүтү метрик фәза олур.

Мисал 1. Бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу, ихтијари X вә $У$ һәгиги әдәдләри арасындакы мәсафә $\rho(X, У) = |X - У|$ кими тә'јин едилдикдә метрик фәзаја чеврилир. Бу фәзаны E_1 илә ишарә едәк.

Бу һалда метрик фәза аксиомларынын өдәнилмәси мүтләг гијмәтин ујғун хассәләриндән ајдындыр.

Мисал 2. Тутаг ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $x = x(t)$ функсијалары чохлуғу R илә ишарә олунмушдур. Бу чохлугда метриканы (мәсафә функсијасыны)

$$\rho(x, y) = \max_{a < t < b} |x(t) - y(t)|$$

кими тә'јин етдикдә метрик (R, ρ) фәзасы алынар. Бу фәзаны $C[a, b] = (R, \rho)$ илә ишарә едирләр.

Мисал 3. n-өлчүлү R_n һесаби фәзасында (IV, § 2) истәнилән $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вә $У = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ нөгтәләри арасындакы мәсафәни

$$\rho(X, У) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

кими тә'јин етдикдә метрик (R_n, ρ) фәзасы алыныр. Бу фәзаны $E_n = (R_n, \rho)$[1] илә ишарә едирләр.

Гејд едәк ки, ејни бир чохлугда мүхтәлиф метрика тә'јин етмәк олар. Мәсәлән, n-өлчүлү R_n һесаби фәзасында (IV, § 2) истәнилән $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вә $У = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ нөгтәләри арасындакы мәсафәни

$$\rho_1(X, У) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

$$\rho_2(X, У) = \max_{1 < k < n} |x_k - y_k|,$$

$$\rho_3(X, У) = \begin{cases} 1, & X = У \text{ олдугда}, \\ 0, & X \neq У \text{ олдугда} \end{cases}$$

[1] n-өлчүлү Евклид фәзасы да E_n илә ишарә олунур (IV, § 6). Бу долашыглыга сәбәб олмур.

вә с. кими тә'јин етмәк олар. Бунларын һәр бири үчүн метрик фәза аксиомлары өдәнилир (буну јохламағы охучулара һәвалә едирик!). Беләликлә, ејни бир R_n нөгтәләр чохлуғу васитәсилә (R_n, ρ_1), (R_n, ρ_2), (R_n, ρ_3) вә с. кими мүхтәлиф метрик фәзалар тә'јин олунур.

E_n вә (R_n, ρ_1) метрик фәзалары R_n чохлуғунун нөгтәләри арасындакы мәсафәни

$$\rho_4(X, Y)=\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p < \infty)$$

кими тә'јин етдикдә алынан (R_n, ρ_4) метрик фәзасынын хүсуси һалларыдыр.

Тә'риф 2. *Метрик R фәзасынын $\rho(X, X_0) < \varepsilon$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн $X \in R$ нөгтәләри чохлуғуна һәмин фәзанын $X_0 \in R$ нөгтәсинин әтрафы (вә ја ε-әтрафы) дејилир. X_0 нөгтәси әтрафын мәркәзи, ε әдәди исә әтрафын радиусу адланыр.*

X_0 нөгтәсинин ε-әтрафыны $O_\varepsilon(X_0)$ илә ишарә едәҹәјик.

Тә'риф 3. *X_0 нөгтәсинин истәнилән $O_\varepsilon(X_0)$ әтрафында Q чохлуғунун һәмин нөгтәдән фәргли һеч олмаса бир нөгтәси варса, онда X_0 нөгтәсинә Q чохлуғунун лимит нөгтәси дејилир. Q чохлуғунун лимит нөгтәси олмајан $X_0 \in Q$ нөгтәсинә һәмин чохлуғун изолә едилмиш нөгтәси дејилир.*

Тә'риф 4. *Верилмиш $X_0 \in Q$ нөгтәсинин Q чохлуғуна дахил олан әтрафы олдугда, она Q чохлуғунун дахили нөгтәси дејилир.*

Бүтүн нөгтәләри дахили нөгтәләр олан чохлуға ачыг чохлуг дејилир.

Тә'риф 5. *Бүтүн лимит нөгтәләри өзүнә дахил олан чохлуға гапалы чохлуг дејилир.*

Метрик R фәзасынын өзү вә бош чохлуг ејни заманда һәм гапалы вә һәм дә ачыг чохлуглардыр.

Метрик R фәзасынын һәр бир Q алтчохлуғу һәмин фәзанын өзүнүн метрикасына нәзәрән метрик фәзадыр. Бу һалда, $Q \subset R$ чохлуғу гапалы олдугда она метрик R фәзасынын *алтфәзасы* дејилир.

Тутаг ки, R вә R_1 ики метрик фәзадыр вә онларын арасында елә гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг јарадылмышдыр ки, бу фәзаларын ујғун чүт елементләри арасындакы мәсафәләр бәрабәрдир:

$$X' \in R \leftarrow\rightarrow Y' \in R \text{ вә } X'' \in R \leftarrow\rightarrow Y'' \in R' \text{ оларса,}$$
$$\rho(X', X'') = \rho(Y', Y'').$$

Онда һәмин фәзалара *изометрик фәзалар* дејилир.

Бурадан ајдындыр ки, изометрик R вә R_1 фәзалары мүхтәлиф тәбиәтли үнсүрләрдән ибарәт олса да, онлар метрика (мәсафә) илә ифадә олунан хассәләр бахымындан ејни фәза-

лардыр. Буна көрә дә изометрик фәзалары чох заман ејниләшдирирләр.

Метрик фәзанын елементләри ардычыллығынын лимитиндән дә данышмаг олар. Тутаг ки,

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}, \ldots \tag{2}$$

вә ја $\{X^{(k)}\}$ метрик R фәзасынын елементләри ардычыллығыдыр,

Тә'риф 6. *Тутаг ки, метрик R фәзасынын $X \in R$ елементи вә (2) ардычыллығы үчүн $\lim_{k\to\infty} \rho(X^{(k)}, X) = 0$ бәрабәрлији өдәнилир. Онда, дејирләр ки, (2) ардычыллығы X нөгтәсинә јығылыр вә буну*

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X \text{ вә ја } X^{(k)} \to X \ (k \to \infty)$$

кими јазырлар.

Мәсәлән, метрик $C[a, b]$ фәзасында $\{x_n(t)\}$ елементләри ардычыллығы $x(t) \in C[a, b]$ нөгтәсинә јығылырса, онда

$$\lim_{k\to\infty} \left[\sup_{a<t<b} |x_k(t) - x(t)|\right] = 0$$

бәрабәрлији өдәниләр. Бу исә $\{x_k(t)\}$ функсијалар ардычыллығынын $[a, b]$ парчасында $x(t)$ функсијасына мүнтәзәм јығылмасы демәкдир (XXXVI, § 1).

Тә'риф 7. *Метрик R фәзасынын $\{X^{(k)}\}$ елементләри ардычыллығы үчүн $\rho(X^{(n)}, X^{(m)}) \to 0$ $(n \to \infty, \ m \to \infty)$ мүнасибәти өдәнилдикдә она фундаментал ардычыллыг дејилир.*

Һәр бир јығылан ардычыллыг фундаментал ардычыллыгдыр. Доғрудан да, (2) ардычыллығы X елементинә јығылырса, онда $\rho(X^{(n)}, X) \to 0$ олар. Бурадан вә истәнилән n вә m үчүн доғру олан

$$\rho(X^{(n)}, X^{(m)}) \leqslant \rho(X^{(n)}, X) + \rho(X, X^{(m)})$$

бәрабәрсизлијиндән

$$\rho(X^{(n)}, X^{(m)}) \to 0 \ (n \to \infty, \ m \to \infty).$$

Бу тәклифин тәрси доғру дејилдир. Фундаментал ардычыллыг јығылан олмаја да биләр. Мәсәлән, бүтүн расионал әдәдләр чохлуғу 1-ҹи мисалда көстәрилән мәсафә илә метрик фәзадыр. Бу фәзанын

$$r_1 = 2, \ r_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \ldots, r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

елементләри ардычыллығы фундаменталдыр, лакин һәмин фәзанын һеч бир елементинә јығылмыр (онун лимити иррасионал e әдәдидир!).

Тә'риф 8. *Метрик фәзанын һәр бир фундаментал ардычыллығы һәмин фәзанын бир елементинә јығылырса, она там фәза дејилир.*

Мисал 4. Бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғундан ибарәт олан (мисал 1) метрик фәза тамдыр.

Бу, бирдәјишәнли функсијанын лимитинин варлығы һаггында олан Коши критерисиндан (XII, § 11) ајдындыр.

Бүтүн расионал әдәдләр чохлуғу исә там олмајан метрик фәзадыр.

Там олмајан метрик фәзаја „јени елементләр" әлавә етмәклә ону тамамламаг, јә'ни там фәза һалына кәтирмәк олар. Мәсәлән, расионал әдәдләр чохлуғуна бүтүн иррасионал әдәдләри әлавә етмәклә бүтүн һәгиги әдәдләрдән ибарәт олан там метрик фәза алыныр.

Бу үсул үмуми һалда бөјүк һәчмли дәрсликләрдә шәрһ олунур.

§ 2. n-ӨЛЧҮЛҮ ЕВКЛИД ФӘЗАСЫНДА МӘСАФӘ ВӘ ӘТРАФ АНЛАЈЫШЫ

Бурада n-өлчүлү E_n һәгиги Евклид фәзасы һаггында бир сыра мә'лум фактлары јада салаг (IV, § 6,7).

E_n фәзасы бүтүн $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ елементләриндән вә ја n-өлчүлү нөгтәләрдән ибарәтдир. Бу фәзада истәнилән $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вә $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ елементләринин скалјар һасили ашағыдакы бәрабәрликлә тә'јин олунур:

$$(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{1}$$

E_n фәзасы хәтти нормалашмыш фәзадыр вә онун истәнилән $X \in E_n$ елементинин нормасы

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

кими тә'јин олунур. Истәнилән $X \in E_n$ вә $Y \in E_n$ елементләри үчүн

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Бундан башга, E_n Евклид фәзасында истәнилән X вә Y нөгтәләри арасындакы мәсафә

$$\rho(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \tag{2}$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур. Бу мәсафә үчүн метрик фәза аксиомлары өдәнилир (§ 1), јә'ни n-өлчүлү E_n Евклид фәзасы метрик фәзадыр. Бу фәзанын истәнилән X вә Y елементләри үчүн

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \tag{3}$$

Коши—Бунјаковски бәрабәрсизлији дә доғрудур.

Гејд едәк ки, $n=2$ олдугда (2) ифадәси мүстәви үзәриндә јерләшән (x_1, x_2) вә (y_1, y_2) нөгтәләри арасындакы мәсафә, $n=3$ олдугда исә фәзада јерләшән (x_1, x_2, x_3) вә (y_1, y_2, y_3) нөгтәләри арасындакы мәсафә дүстурудур. Бу исә E_2 вә E_3 Евклид фәзаларыны „ади мүстәви" вә „реал фәза" кими тәсәввүр етмәјә имкан верир. $n>3$ олдугда исә n-өлчүлү E_n Евклид фәзасыны әјани-һәндәси тәсәввүр етмәк мүмкүн дејилдир. Белә фәзалар анчаг ријази үмумиләшмәдир (абстраксијадыр) вә онлардан чохдәјишәнли функсијаларын үмуми нәзәријјәсини гурмаг үчүн истифадә олунур.

Евклид фәзасында истилаһлар вә анлајышлар ади һәндәсәдәки истилаһ вә анлајышлара охшар олараг кәтүрүлүр.

Тә'риф 1. *n-өлчүлү E_n Евклид фәзасынын*

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{k-1} = x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$$

мүнасибәтини өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәләри чохлуғуна һәмин фәзанын k-чы координат оху ($k = 1, 2, \ldots, n$) дејилир. $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ *нөгтәси координат башланғычы адланыр.*

Евклид фәзасы метрик фәза олдуғундан һәмин фәзада әтраф, лимит нөгтәси, дахили нөгтә, ачыг чохлуг, гапалы чохлуг вә с. анлајышлары тә'јин олунур.

Тә'риф 2. *E_n фәзасынын*

$$\rho(X, X^{(0)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^{(0)})^2} < \varepsilon \tag{4}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ нөгтәләри чохлуғуна мәркәзи $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in E_n$ нөгтәсиндә олан ε радиуслу n-өлчүлү (ачыг) күрә дејилир вә $O_\varepsilon(X^{(0)})$ илә ишарә олунур.

Мәркәзи $X^{(0)}$ нөгтәсиндә олан ε радиуслу n-өлчүлү гапалы күрә $\rho(X, X^{(0)}) \leq \varepsilon$ мүнасибәтини өдәјән бүтүн $X \in E_n$ нөгтәләри чохлуғуна дејилир.

E_n фәзасынын

$$|x_1 - x_1^{(0)}| < \delta_1, \ |x_2 - x_2^{(0)}| < \delta_2, \ldots, |x_n - x_n^{(0)}| < \delta_n \tag{5}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн $X \in E_n$ нөгтәләри чохлуғуна мәркәзи $X^{(0)}$ нөгтәсиндә олан n-өлчүлү *паралелепипед* дејилир вә $\Pi(X^{(0)}; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ илә ишарә олунур.

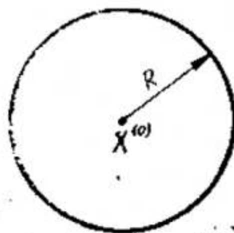
(5) бәрабәрсизликләрини

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leq \delta_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

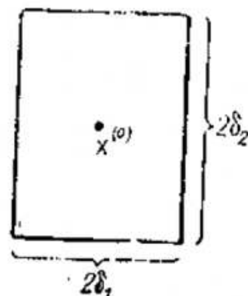
кими кәтүрдүкдә мәркәзи $X^{(0)}$ нөгтәсиндә олан n-өлчүлү гапалы паралелепипед аларыг.

Хүсуси һалда, $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = \delta$ оларса, онда $\Pi(X^{(0)}; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ чохлуғу мәркәзи $X^{(0)}$ нөгтәсиндә олан n-өлчүлү куб адланыр вә $\Pi(X^{(0)}; \delta)$ илә ишарә олунур. $\Pi(X^{(0)}; \delta)$ кубунун тилләринин узунлуғу 2δ-ја бәрабәрдир.

Мисал. $n = 2$ олдугда $O_R(X^{(0)})$ күрәси мүстәви үзәриндә мәркәзи $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ нөгтәсиндә вә радиусу R олан



Шәкил 217



Шәкил 218

даирә олар (шәкил 217). П $(X^{(0)};\ \delta_1, \delta_2)$ паралелепипеди исә мүстәви үзәриндә мәркәзи $X^{(0)}$ нөгтәсиндә вә тәрәфләринин узунлуғу ујғун олараг $2\delta_1$ вә $2\delta_2$ олан дүзбучаглыдыр (шәкил 218).

Тә'риф 3. *$O_\varepsilon(X^{(0)})$ күрәсинә $X^{(0)}$ нөгтәсинин ε-әтрафы (бә'зән күрәви әтрафы), П $(X^{(0)};\ \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ паралелепипединә исә $X^{(0)}$ нөгтәсинин дүзбучаглы әтрафы дејилир.*

Теорем 1. ***Верилмиш $X^{(0)}$ нөгтәсинин һәр бир ε-әтрафы дахилиндә онун мүәјјән дүзбучаглы әтрафы вә тәрсинә, һәр бир дүзбучаглы әтрафы дахилиндә мүәјјән ε-әтрафы јерләшир.***

Исбаты. Тутаг ки, $X^{(0)}$ нөгтәсинин $O_\varepsilon(X^{(0)})$ ε-әтрафы верилмишдир. $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ көтүрәрәк, мәркәзи $X^{(0)}$ нөгтәсиндә олан П $(X^{(0)};\ \delta)$ кубуна бахаг. Ајдындыр ки, П $(X^{(0)};\ \delta)$ кубуна дахил олан һәр бир X нөгтәси $X^{(0)}$ нөгтәсинин $O_\varepsilon(X^{(0)})$ ε-әтрафына да дахил олар. Доғрудан да, $|x_k - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ $(k = 1,2,\ldots, n)$ бәрабәрсизликләринә әсасән

$$\rho(X, X^{(0)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^{(0)})^2} < \sqrt{n\cdot\frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon$$

олар. Демәли, $X^{(0)}$ нөгтәсинин П $(X^{(0)};\ \delta)$ дүзбучаглы әтрафы онун $O_\varepsilon(X^{(0)})$ ε-әтрафынын тамамилә дахилиндә јерләшир.

Инди фәрз едәк ки, $X^{(0)}$ нөгтәсинин П $(X^{(0)};\ \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ дүзбучаглы әтрафы верилмишдир. Онда мәркәзи $X^{(0)}$ нөгтәсиндә вә радиусу $\varepsilon = \min_{1\le k\le n} \delta_k$ олан $O_\varepsilon(X^{(0)})$ күрәси һәмин дүз-

бучаглынын дахилиндә јерләшәр. Доғрудан да, истәнилән $X \in O_\varepsilon(X^{(0)})$ $(\rho(X, X^{(0)}) < \varepsilon)$ нөгтәси үчүн

$$|x_k - x_k^{(0)}| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^{(0)})^2} = \rho(X, X^{(0)}) < \varepsilon \le \delta_k$$

олар, јә'ни $X \in$ П $(X^{(0)};\ \delta_1, \ldots, \delta_n)$. Башга сөзлә, $X^{(0)}$ нөгтәсинин $O_\varepsilon(X^{(0)})$ ε-әтрафы онун П $(X^{(0)};\ \delta_1, \ldots, \delta_n)$ дүзбучаглы әтрафынын дахилиндә јерләшир.

Теорем көстәрир ки, кәләчәк мүһакимәләрдә нөгтәләрин анчаг ε-әтрафына бахмаг кифајәтдир. Буна көрә дә китабын сонракы бәндләриндә, верилмиш нөгтәнин әтрафы дедикдә, чох заман онун ε-әтрафы нәзәрдә тутулур.

Тә'риф 4. *$X^{(0)} \in E_n$ нөгтәсинин истәнилән әтрафында $E \subset E_n$ чохлуғунун һәмин нөгтәдән фәргли һеч олмаса бир нөгтәси варса, онда $X^{(0)}$ нөгтәси E чохлуғунун лимит нөгтәси адланыр.*

E чохлуғунун лимит нөгтәси олмајан $X^{(0)} \in E$ нөгтәсинә онун изолә едилмиш нөгтәси дејилир.

Лимит нөгтәсинин тә'рифиндән ајдындыр ки, $X^{(0)}$ нөгтәси E чохлуғунун лимит нөгтәсидирсә, онда онун истәнилән әтрафында һәмин чохлуғун сонсуз сајда нөгтәси јерләшәр.

Верилмиш чохлуғун лимит нөгтәси ола да биләр, олмаја да биләр.

Тә'риф 5. *E чохлуғу илә онун бүтүн лимит нөгтәләри чохлуғунун бирләшмәсинә һәмин чохлуғун гапанығы дејилир вә $\overline{E}$ илә ишарә олунур.*

$\overline{E} = E_n$ олдугда, дејирләр ки, E чохлуғу E_n фәзасында һәр јердә сыхдыр.

Мисал 1. E_n фәзасынын расионал координатлы бүтүн нөгтәләри чохлуғу һәмин фәзада һәр јердә сыхдыр.

Хүсуси һалда $(n=1)$, бүтүн расионал әдәдләр чохлуғу әдәд охунда һәр јердә сыхдыр.

Тә'риф 6. *$X^{(0)} \in E$ нөгтәсинин E чохлуғуна дахил олан әтрафы олдугда, она һәмин чохлуғун дахили нөгтәси дејилир.*

Тә'риф 7. *Бүтүн нөгтәләри дахили нөгтәләр олан чохлуға ачыг чохлуг дејилир.*

Бүтүн лимит нөгтәләри өзүнә дахил олан чохлуг гапалы чохлуг адланыр.

Гапалы E чохлуғу үчүн $E = \overline{E}$ олар.

Верилмиш чохлуг сонлу (јә'ни сонлу сајда нөгтәдән ибарәт) олдугда, онун һеч бир лимит нөгтәси олмаз. Белә чохлуг исә гапалы чохлугдур.

Мисал 2. Мәркәзи $O(0, 0, \ldots, 0)$ нөгтәсиндә вә радиусу R олан n-өлчүлү $O_R(0)$ ачыг күрәсинин, јә'ни

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < R^2 \qquad (6)$$

шәртини өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$ нөгтәләри чохлуғунун һәр бир нөгтәси дахили нөгтәдир.

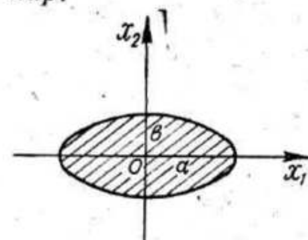
Белә чохлуг исә ачыг чохлугдур. Буна көрә дә, чох заман $O_R(0)$ күрәсинә n-өлчүлү *ачыг күрә* дејилир.

Мисал 3. Мәркәзи $O\ (0, 0, \ldots, 0)$ нөгтәсиндә, радиусу R вә

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2 \qquad (7)$$

шәртини өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәләриндән ибарәт олан n-өлчүлү гапалы күрә *гапалы чохлугдур.*

Тә'риф 8. *$X^{(0)} \in E_n$ нөгтәсинин истәнилән әтрафында E чохлуғуна һәм дахил олан вә һәм дә дахил олмајан нөгтәләр јерләшдикдә, она E чохлуғунун сәрһәд нөгтәси дејилир.*



Шәкил 219

E чохлуғунун бүтүн сәрһәд нөгтәләри чохлуғуна онун сәрһәди дејилир.

Мисал 4. n-өлчүлү E_n фәзасынын

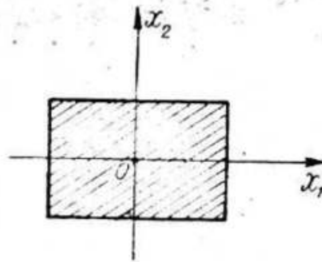
$$(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2 + \cdots + (x_n - x_n^{(0)})^2 = R^2$$

шәртини өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$ нөгтәләри чохлуғуна мәркәзи $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ нөгтәсиндә вә радиусу R олан $(n-1)$-өлчүлү сфера дејилир. Бу сфераны $S^{(n-1)}$ илә ишарә едәк.

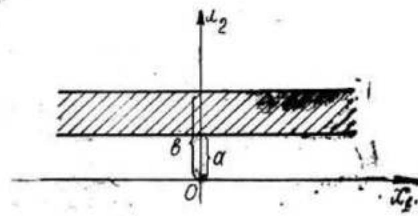
$S^{(n-1)}$ сферасынын һәр бир нөгтәси ачыг $O_R(X^{(0)})$ вә гапалы $\overline{O_R(X^{(0)})}$ күрәсинин сәрһәд нөгтәсидир. Бу сфера $O_R(X^{(0)})$ ачыг күрәсинин вә $\overline{O_R(X^{(0)})}$ гапалы күрәсинин сәрһәдидир.

$S^{(n-1)}$ сферасынын һеч бир дахили нөгтәси јохдур.

Хүсуси һалда, $n=2$ олдугда $S^{(1)}$ сферасы чеврә, $n=1$ олдугда исә $S^{(0)}$ сферасы бир чүт нөгтә олар.



Шәкил 220



Шәкил 221

Тә'риф 9. *Бүтүн нөгтәләрини, мәркәзи координат башланғычында вә радиусу сонлу әдәд олан һәр һансы күрә дахилиндә јерләшдирмәк мүмкүн олан чохлуға мәһдуд чохлуг дејилир.*

Әкс һалда, чохлуг гејри-мәһдуд чохлуг адланыр.

Мисал 5. Мүстәви үзәриндә $(n=2)$ јарымохлары a вә b әдәдләри олан еллипсин дахили (шәкил 219) вә тәрәфләринин узунлуғу сонлу олан дүзбучаглы (шәкил 220) мәһдуд чохлуг,

$$D = \{(x_1, x_2) \mid -\infty < x_1 < \infty,\ a \leqslant x_2 \leqslant b\}$$

золағы исә гејри-мәһдуд чохлугдур (шәкил 221).

§ 3. ЕВКЛИД ФӘЗАСЫНЫН НӨГТӘЛӘРИ АРДЫЧЫЛЛЫҒЫ

Һәр бир натурал k әдәдинә n-өлчүлү E_n Евклид фәзасынын бир $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ нөгтәси ујғун гојулдугда E_n фәзасынын

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}, \ldots \qquad (1)$$

вә ја

$$\{X^{(k)}\} \qquad (2)$$

нөгтәләри ардычыллығы алыныр. (Ардычыллығын һәдләри мүхтәлиф олмаја да биләр).

Тә'риф 1. *Тутаг ки, истәнилән мүсбәт ε әдәди вериликдә елә натурал N әдәди көстәрмәк олур ки, k-нын N-дән кичик олмајан бүтүн гијмәтләриндә*

$$\rho(X^{(k)}, X) < \varepsilon \ (k \geqslant N) \qquad (3)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәсинә $k \to \infty$ шәртиндә $\{X^{(k)}\}$ ардычыллығынын лимити дејилир вә

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X \qquad (4)$$

вә ја

$$X^{(k)} \to X\ (k \to \infty) \qquad (5)$$

кими јазылыр.

(1) ардычыллығы лимитинин X нөгтәси олмасы $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(X^{(k)}, X) = 0$ бәрабәрлијинин өдәнилмәси демәкдир.

Лимити олан ардычыллыға јығылан, лимити олмајан ардычыллыға исә дағылан ардычыллыг дејилир.

Ардычыллығын лимити X олдугда, дејирләр ки, һәмин ардычыллыг X нөгтәсинә јығылыр.

Тә'рифдән ајдындыр ки, $\{X^{(k)}\}$ ардычыллығы X нөгтәсинә јығылырса, онда һәмин ардычыллығын мүәјјән нөмрәдән сонра кәлән бүтүн һәдләри X нөгтәсинин ε-әтрафында јерләшир. Бу

һалда ардычыллығын анҹаг сонлу сајда һәдди һәмин ε-әтрафда јерләшмәјә биләр.

Инди фәрз едәк ки, $\{X^{(\kappa)}\}$ ардычыллығы X нөгтәсинә јығылыр. Онда тә'рифә көрә истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн (3) мүнасибәти, јә'ни

$$\rho(X^{(\kappa)}, X)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_i^{(\kappa)}-x_i)^2}<\varepsilon\ (\kappa\geqslant N)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан истәнилән $i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ үчүн

$$|x_i^{(\kappa)}-x_i|<\varepsilon\ (\kappa\geqslant N)$$

бәрабәрсизлији алыныр ки, бу да

$$\lim_{\kappa\to\infty}x_i^{(\kappa)}=x_i\ (i=1,2,\ldots,n) \qquad (6)$$

олдуғуну көстәрир.

Бу тәклифин тәрси дә доғрудур. (6) мүнасибәтләринин доғрулуғундан (4) бәрабәрлији алыныр. Доғрудан да, (6) бәрабәрлијинин доғрулуғу о демәкдир ки, истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн елә $N_i=N_i(\varepsilon)$ вар ки, κ-нын $\kappa\geqslant N_i$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|x_i^{(\kappa)}-x_i|<\varepsilon$$

мүнасибәти өдәнилир. ε әвәзинә $\frac{\varepsilon}{\sqrt n}$ әдәдини көтүрсәк, онда κ-нын $N=\max_{1\leqslant i\leqslant n}N_i\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt n}\right)$ әдәдиндән кичик олмајан бүтүн гијмәтләриндә

$$|x_i^{(\kappa)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt n}\ (i=1,2,\ldots,n)$$

бәрабәрсизликләри вә буна көрә дә

$$\rho(X^{(\kappa)},X)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(\kappa)}-x_i)^2}<\sqrt{\frac{n\cdot\varepsilon^2}{n}}=\varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәниләр. Демәли, $\{X^{(\kappa)}\}$ ардычыллығы $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ нөгтәсинә јығылыр.

Беләликлә ашағыдакы теорем исбат олунур:

Теорем 1. *$\{X^{(\kappa)}\}$ ($X^{(\kappa)}=(x_1^{(\kappa)},x_2^{(\kappa)},\ldots,x_n^{(\kappa)})\in E_n$) ардычыллығынын $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E_n$ нөгтәсинә јығылан олмасы үчүн*

$$\lim_{\kappa\to\infty}x_i^{(\kappa)}=x_i\ (i=1,2,\ldots,n)$$

бәрабәрликләринин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

Бу теорем көстәрир ки, n-өлчүлү фәза нөгтәләринин $\{X^{(\kappa)}\}$ ардычыллығынын X нөгтәсинә јығылма мәсәләси, онларын

үјғун координатлары олан $\{x_i^{(\kappa)}\}$ әдәди ардычыллығынын үјғун x_i әдәдинә јығылмасына кәтирилир. Бурадан ашағыдакы тәклифләрин доғрулуғу ајдындыр:

1. Јығылан $\{X^{(\kappa)}\}$ ардычыллығы мәһдуддур.
2. Јығылан ардычыллығын анҹаг бир лимити вар.
3. $\{X^{(\kappa)}\}$ ардычыллығы X нөгтәсинә јығылырса, онда онун истәнилән $\{X^{(\kappa_i)}\}$ алтардычыллығы да һәмин нөгтәјә јығылыр.

Чохөлчүлү фәзанын нөгтәләри ардычыллығы үчүн Коши критериси вә Болсано—Вејерштрасс теореми дә доғрудур.

Теорем 2. (Болсано—Вејерштрасс). *Истәнилән мәһдуд $\{X^{(\kappa)}\}$ ардычыллығындан јығылан алтардычыллыг ајырмаг олар.*

Исбаты. $\{X^{(\kappa)}\}$ ардычыллығынын мәһдуд олмасындан чыхыр ки, $\{x_i^{(\kappa)}\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ әдәди ардычыллыгларынын һамысы мәһдуддур. Буна көрә дә әдәди ардычыллыглар һаггында олан Болсано—Вејерштрасс теореминә (XII, § 4) көрә мәһдуд $\{x_1^{(\kappa)}\}$ ардычыллығындан јығылан алтардычыллыг ајырмаг олар: $x_1^{(\kappa_{l_1})}\to x_1\ (l_1\to\infty)$. $X^{(\kappa_{l_1})}$ нөгтәләринин икинҹи координатларындан ибарәт олан $\{x_2^{(\kappa_{l_1})}\}$ әдәди ардычыллығы да мәһдуд олдуғундан ондан јығылан алтардычыллыг ајырмаг олар: $x_2^{(\kappa_{l_2})}\to x_2\ (l_2\to\infty)$.

Гејд едәк ки, $\{x_1^{(\kappa_{l_2})}\}$ әдәди ардычыллығы $\{x_1^{(\kappa_{l_1})}\}$ әдәди ардычыллығынын алтардычыллығы олдуғундан $x_1^{(\kappa_{l_2})}\to x_1\ (l_2\to\infty)$ олар (x_1 әдәдинә јығылан ардычыллығын истәнилән алтардычыллығы да һәмин әдәдә јығылыр, XII, § 2).

Беләликлә, $x_1^{(\kappa_{l_2})}\to x_1\ (l_2\to\infty)$ вә $x_2^{(\kappa_{l_2})}\to x_2\ (l_2\to\infty)$.

Бу мүһакимәни n дәфә давам етдирмәклә

$$x_i^{(\kappa_{l_n})}\to x_i\ (l_n\to\infty),\ i=1,2,\ldots,n$$

шәртини өдәјән $\{x_i^{(\kappa_{l_n})}\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ алтардычыллыглары аларыг. Бурадан, 1-ҹи теоремә көрә ајдындыр ки, ајрылан $\{X^{(\kappa_{l_n})}\}$ алтардычыллығы $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ нөгтәсинә јығылыр.

Ејни гајда илә исбат етмәк олар ки, $X^{(0)}$ нөгтәси $E\subset E_n$ чохлуғунун лимит нөгтәсидирсә, онда E чохлуғундан һәмин нөгтәјә јығылан ардычыллыг ајырмаг олар.

Тутаг ки, n-өлчүлү E_n Евклид фәзасынын нөгтәләр ардычыллығы $\{X^{(\kappa)}\}$ мүәјјән X нөгтәсинә јығылыр, јә'ни $\rho(X^{(\kappa)},X)\to 0\ (\kappa\to\infty)$. Онда метрик фәза аксиомларынын үчүнҹүсүнә (үчбуҹаг бәрабәрсизлијинә) көрә истәнилән m вә κ үчүн

$$\rho(X^{(m)},X^{(k)})\leqslant\rho(X^{(m)},X)+\rho(X,X^{(\kappa)})$$

олдуғундан

$$\rho(X^{(m)},X^{(k)})\to 0\ (m,\kappa\to\infty) \qquad (7)$$

олар. Бу, о демәкдир ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N_0 = N_0(\varepsilon)$ нөмрәси вар ки, m вә κ-ныи N_0-дан сонра кәлән бүтүн гијмәтләриндә

$$\rho(X^{(m)}, X^{(k)}) < \varepsilon (m, \kappa \geqslant N_0)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

(7) мүнасибәти өдәнилдикдә $\{X^{(k)}\}$ ардычыллығына *фундаментал* (вә ја өзүнә јығылан) *ардычыллыг* дејилир.

Беләликлә, биз көстәрдик ки, һәр бир јығылан ардычыллыг фундаменталдыр. Бунун тәрси дә доғрудур.

Нәтиҹәдә ашағыдакы теореми алырыг:

Теорем 3 (Коши критериси). $\{X^{(\kappa)}\}$ ***ардычыллығынын јығылан олмасы үчүн онун фундаментал олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

§ 4. ЕВКЛИД ФӘЗАСЫНДА ДҮЗ ХӘТТ, КӘСИЛМӘЗ ӘЈРИ ВӘ ОБЛАСТ АНЛАЈЫШЫ

n-өлчүлү E_n Евклид фәзасынын ихтијари $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ нөгтәсини вә гејд олунмуш $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ әдәдләрини көтүрәк.

Тә'риф 1. *E_n фәзасынын, координатлары*

$$x_i = x_i^{(0)} + \lambda_i t, \ -\infty < t < \infty, \ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

бәрабәрликләрини өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәләри чохлуғуна E_n Евклид фәзасында $X^{(0)}$ нөгтәсиндән $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ вектору истигамәтиндә кечән дүз хәтт дејилир. $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ вектору (1) дүз хәттинин *истигамәтләндириҹи вектору* адланыр. t параметри (1) бәрабәрлијиндә бүтүн һәгиги гијмәтләри алыр.

(1) дүз хәттинин, t параметринин $a < t < b$ гијмәтләринә ујғун һиссәсинә $A = (x_1^{(0)} + \lambda_1 a, x_2^{(0)} + \lambda_2 a, \ldots, x_n^{(0)} + \lambda_n a)$ вә $B = (x_1^{(0)} + \lambda_1 b, x_2^{(0)} + \lambda_2 b, \ldots, x_n^{(0)} + \lambda_n b)$ нөгтәләрини бирләшдирән дүз хәтт парчасы (AB парчасы) дејилир.

t параметри a-дан b-јә гәдәр артараг дәјишдикдә алынан M нөгтәси A-дан B-јә кими дәјишәрәк бүтүн AB парчасыны тәшкил едирсә, онда дејирләр ки, AB парчасы t параметринин артмасы үзрә истигамәтләнмишдир. Бу һалда, A нөгтәси парчанын башланғыҹ, B исә сон нөгтәси адланыр.

(1) бәрабәрлијиндә t параметри $a \leqslant t < \infty$ областында дәјишдикдә шүа, јә'ни һәмин дүз хәттин сонсуз һиссәси алыныр.

Инди E_n фәзасында $X_0, X_1, \ldots, X_m$ нөгтәләрини көтүрәк. $X_0X_1, X_1X_2, \ldots, X_{m-1}X_m$ парчаларынын бирләшмәсинә *сыныг хәтт* дејилир вә $X_0X_1 \ldots X_m$ илә ишарә олунур. X_0 вә X_m нөгтәләри сыныг хәттин *учлары*, X_κ нөгтәләри исә сыныг хәттин *тәпәләри* адланыр.

Тутаг ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ функсијалары верилмишдир. Онда t-нин һәр бир $t \in [a, b]$ гијмәтинә n-өлчүлү E_n фәзасынын бир $X = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ нөгтәси уј ғун олар.

Тә'риф 2. *Координатлары һәр һансы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функсијалар олан $X = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ нөгтәләри чохлуғуна E_n фәзасында кәсилмәз әјри дејилир.*

t әјринин *параметри*, $A = (x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a))$ нөгтәси әјринин *башланғычы*, $B = (x_1(b), x_2(b), \ldots, x_n(b))$ нөгтәси исә *сону* адланыр.

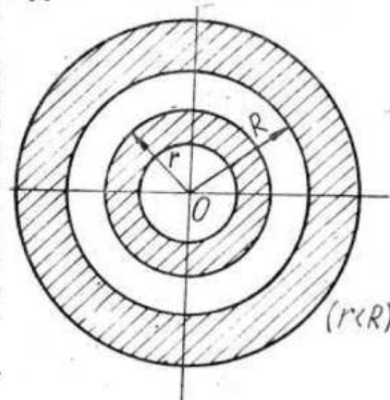
Параметрин $[a, b]$ парчасындан көтүрүлмүш мүхтәлиф гијмәтләринә әјринин мүхтәлиф нөгтәләринин уј ғун олмасы һәмин әјринин өз-өзү илә кәсишмәдијини көстәрир.

Тә'риф 3. *E чохлуғунун ихтијари ики нөгтәсини, бүтүн нөгтәләри һәмин чохлуға дахил олан бир кәсилмәз хәтлә (вә ја сыныг хәтлә) бирләшдирмәк мүмкүн олдуғда, она рабитәли чохлуг дејилир.*

Ачыг вә рабитәли чохлуг област адланыр. Областын сәрһәдини өзүнә бирләшдирдикдә гапалы област алыныр.

Гапалы област гапалы чохлугдур.

Мисал 1. 2-чи параграфын 5-чи мисалында көстәрилән чохлугларын һәр бири ајрылыгда (шәкил 219, 220, 221) рабитәли чохлугдур. Лакин ики мүхтәлиф консентрик һалгадан ибарәт олан чохлуг рабитәли чохлуг дејилдир. Чүнки ики мүхтәлиф консентрик һалганын нөгтәләрини тамамилә һәмин һалгаларда јерләшән кәсилмәз хәтлә бирләшдирмәк мүмкүн дејилдир (шәкил 222).



Шәкил 222

Тутаг ки, G ачыг вә ја гапалы областдыр.

Тә'риф 4. *G областынын нөгтәләри арасындакы мәсафәләрин дәгиг јухары сәрһәдинә һәмин областын диаметри дејилир.* G областынын диаметрини $d(G)$ илә ишарә етсәк, тә'рифә көрә

$$d(G) = \sup_{X_1, X_2 \in G} \rho(X_1, X_2).$$

Мисал 2. Мүстәви үзәриндә ($n = 2$) еллипсин диаметри бөјүк охуна, дүзбучаглынын диаметри диагоналына, дүзбучаглы үчбучағын диаметри һипотенузуна бәрабәрдир. Бундан башга,

$$d[O_R(X^{(0)})] = d[\overline{O_R(X^{(0)})}] = 2R.$$

XXVI ФӘСИЛ

ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈА, ОНУН ЛИМИТИ ВӘ КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

§ 1. ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАНЫН ТӘ'РИФИ

Тутаг ки, n-өлчүлү Евклид фәзасынын $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәләринин $E\subset E_n$ чохлуғу вә һәгиги W әдәдләринин $F\subset E_1$ чохлуғу верилмишдир.

Тә'риф 1. *E чохлуғунун һәр бир $X\in E$ нөгтәсинә F чохлуғундан мүәјјән $W=f(X)\in F$ әдәдини гаршы гојан f ујғунлуғуна E чохлуғунда тә'јин олунмуш вә гијмәтләри F чохлуғуна дахил олан функсија (вә ја E-нин F-ә ин'икасы) дејилир.*

E чохлуғу функсијанын тә'јин областы, F чохлуғу исә функсијанын гијмәтләри чохлуғу адланыр.

Бу һалда, f функсијасына n (һәгиги) дәјишәнли функсија да дејилир вә

$$f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

вә ја

$$W=f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

кими ишарә олунур. Бурада X нөгтәсинин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координатлары функсијанын аргументләри, W исә онун X нөгтәсиндә гијмәти (вә ја функсијанын асылы дәјишәни) адланыр.

Бир чәһәти хүсуси гејд етмәк лазымдыр. f функсијасы илә онун X нөгтәсиндәки $f(X)$ гијмәти мүхтәлиф олдуғуна бахмајараг онлары биз чох заман „ајырмырыг" вә f функсијасы әвәзинә $W=f(X)$ вә ја $W=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасы дејирик (әлбәттә, бу, гарышыглыға сәбәб олмур).

Бундан башга, $n=2$ олдугда $f(x_1, x_2)$ әвәзинә чох вахт $f(x, y)$ (икидәјишәнли функсија), $n=3$ олдугда исә $f(x_1, x_2, x_3)$ әвәзинә $f(x, y, z)$ јазылыр.

Бирдәјишәнли функсијалар кими чохдәјишәнли функсијалар да аналитик үсулла, чәдвәл шәклиндә, графики үсулла, програм васитәсилә вә с. шәклиндә верилә биләр. Функсија аналитик үсулла, јә'ни дүстур шәклиндә верилдикдә онун тә'јин областы бә'зән көстәрилмир. Буну функсијанын аналитик ифадәсинә әсасән тапмаг олур.

Верилмиш функсијанын аналитик ифадәсинин мә'насы олдуғу вә функсијанын сонлу һәгиги гијмәтләр алдығы нөгтәләр чохлуғуна һәмин функсијанын варлыг (вә ја тәбии варлыг) областы дејилир.

Мисал 1. Икидәјишәнли $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ функсијасынын варлыг областы мәркәзи координат башланғычында вә радиусу ваһид олан гапалы дәирә, јә'ни $x^2+y^2\leqslant 1$ шәртини өдәјән бүтүн (x, y) нөгтәләри чохлуғудур (шәкил 223).

Мисал 2. n-дәјишәнли $W=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ функсијасынын варлыг областы бүтүн $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәләри чохлуғудур (јә'ни бүтүн n-өлчүлү Евклид фәзасыдыр).

Мисал 3. n-дәјишәнли

$$W=\ln(r^2-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)$$

функсијасынын варлыг областы

$$r^2-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2>0$$

шәртиндән тә'јин олунур. Бу исә мәркәзи $O(0, 0, \ldots, 0)$ нөгтәсиндә вә радиусу r олан ачыг күрәдир.

Бирдәјишәнли функсијаларда олдуғу кими, чохдәјишәнли функсијаларын да „графикиндән" данышмаг олар.

Тә'риф 2. *$E\subset E_n$ чохлуғунда тә'јин олунмуш $W=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасынын графики $(n+1)$-өлчүлү фәза нөгтәләринин*

$$G_f=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, W)\in E_{n+1} \mid x= =(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E,\ W=f(X)\} \tag{2}$$

чохлуғуна дејилир.

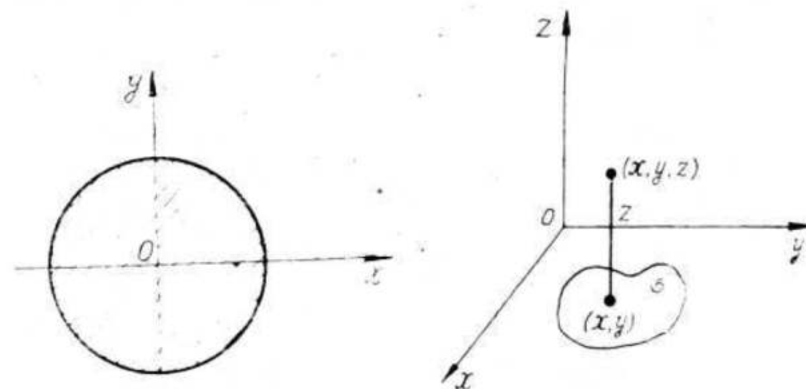
$n\geqslant 3$ олдугда бу графики һәндәси тәсвир етмәк чох „чәтиндир".

Икидәјишәнли $z=f(x, y)$ функсијасынын графикини исә һәндәси олараг көстәрмәк олар. Бу мәгсәдлә һәмин функсијанын тә'јин областыны σ илә ишарә едәк. Онда онун графики үчөлчүлү фәзада јерләшән

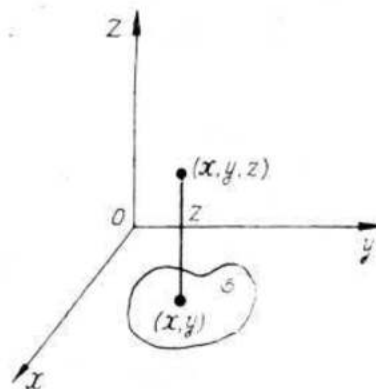
$$Q=\{(x, y, z)\in E_3 \mid (x, y)\in\sigma,\ z=f(x, y)\} \tag{3}$$

чохлуғу олар. Бу чохлуғун һәр бир (x, y, z) нөгтәсинин z аппликаты f функсијасынын $(x, y)\in\sigma$ нөгтәсиндә гијмәтидир (шәкил 224).

Q чохлуғуну тә'јин етмәк үчүн σ областынын һәр бир (x, y) нөгтәсиндә Oxy мүстәвисинә галдырылмыш перпендикулјар



Шәкил 223

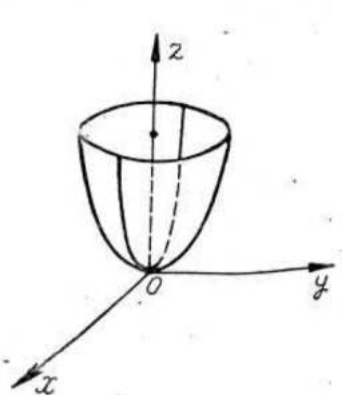


Шәкил 224

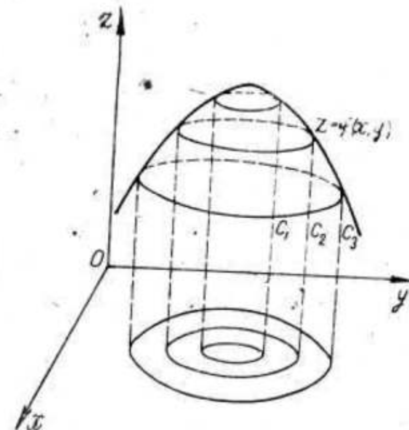
үзәриндә $z = f(x, y)$ әдәдинә бәрабәр һарча ајырмаг лазымдыр (шәкил 224). Алынан (x, y, z) нөгтәләри Q_f чохлуғуну тәшкил едир вә онларын һәндәси јери чох заман үчөлчүлү фәзада сәтһ олур. Бу сәтһин тәнлији $z = f(x, y)$ олар.

Демәли, икидәјишәнли $z = f(x, y)$ функсијасынын графики сәтһдир вә бу сәтһин (Oxy) мүстәвиси үзәринә пројексијасы һәмин функсијанын тә'јин областыдыр.

Мисал 4. $z = x^2 + y^2$ функсијасынын графики еллиптик параболоид (VII, § 10) олар (шәкил 225).



Шәкил 225



Шәкил 226

Икидәјишәнли функсијанын графики олан сәтһ онун дәјишмә характери һаггында мүәјјән тәсәввүр јарадыр.

Икидәјишәнли функсијаны һәндәси көстәрмәк үчүн сәвијјә хәтләриндән дә истифадә олунур. $z = f(x, y)$ функсијасынын ејни сабит „C" гијмәти алдығы (x, y) нөгтәләри чохлуғуна һәмин функсијанын *сәвијјә хәтти* дејилир. Бурадан ајдындыр ки, сәвијјә хәттинин тәнлији $f(x, y) = C$ олар.

C әвәзинә $c_1, c_2, c_3, \dots$ көтүрмәклә $f(x, y)$ функсијасы үчүн мүхтәлиф сәвијјә хәтләри аларыг. Бу сәвијјә хәтләрини, $z = f(x, y)$ сәтһини (Oxy) мүстәвисинә паралел олан $z = c_1$, $z = c_2$, $z = c_3, \dots$ мүстәвиләри илә кәсәрәк, кәсишмә хәтләрини (Oxy) мүстәвиси үзәринә пројексијаламагла да алмаг олар (шәкил 226).

Сәвијјә хәтләринин сыхлашдығы јердә $z = f(x, y)$ функсијасы сүр'әтлә артыр вә ја азалыр. Сәвијјә хәтләри сејрәк јерләшдији јердә исә функсија јаваш дәјишир. Функсијанын максимум вә минимум гијмәтләр алдығы нөгтәләрдә сәвијјә хәтләри нөгтәјә чеврилир, һәмин нөгтәнин јахын әтрафында исә сәвијјә хәтләри гапалы вә консентрик шәкилдә јерләшир.

Үчдәјишәнли функсијаларын дәјишмә характерини тә'јин етмәк үчүн сәвијјә сәтһләри гурулур.

Бирдәјишәнли функсијалар һаггында олан бир сыра анлајышлар чохдәјишәнли функсијалар үчүн дә вардыр.

Чохдәјишәнли функсијаларын лимитини, кәсилмәзлијини, диференсиалланмасыны, екстремумуну вә с. сонракы параграфларда әтрафлы өјрәнәчәјик.

§ 2. ФУНКСИЈАНЫН ЛИМИТИ

Тутаг ки, f функсијасы $E \subset E_n$ чохлуғунда тә'јин олунмушдур вә $X^{(0)} \in E_n$ нөгтәси бу чохлуғун лимит нөгтәсидир ($X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нөгтәси E чохлуғуна дахил ола да биләр, олмаја да биләр). Онда E чохлуғундан $X^{(0)}$ нөгтәсинә јығылан

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}, \dots \tag{1}$$

ардычыллығы ајырмаг олар.

Ајдындыр ки, E чохлуғундан $X^{(0)}$ нөгтәсинә јығылан чох ардычыллыг ајырмаг мүмкүндүр.

f функсијасынын (1) нөгтәләриндә алдығы гијмәтләр

$$f(X^{(1)}), f(X^{(2)}), \dots, f(X^{(k)}), \dots \tag{2}$$

ардычыллығыны әмәлә кәтирир.

Тә'риф 1. *E чохлуғунун $X^{(0)}$ нөгтәсинә јығылан истәнилән $\{X^{(k)}\}(X^{(k)} \neq X^{(0)})$ нөгтәләри ардычыллығына f функсијасынын ујғун олан (2) гијмәтләри ардычыллығынын һамысы ејни бир A әдәдинә јығылдыгда, һәмин A әдәдинә E чохлуғу үзрә $X \to X^{(0)}$ шәртиндә вә ја $X = X^{(0)}$ нөгтәсиндә f функсијасынын лимити дејилир.*

Тә'риф 2. *Тутаг ки, сонлу A әдәди, $X^{(0)}$ нөгтәси вә истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, E чохлуғунун*

$$0 < \rho(X, X^{(0)}) < \delta \tag{3}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ нөгтәләриндә

$$|f(X) - A| < \varepsilon \tag{4}$$

мүнасибәти өдәнилир. Онда A әдәдинә $X \to X^{(0)}$ шәртиндә E чохлуғу үзрә f функсијасынын лимити дејилир.

A әдәдинин E чохлуғу үзрә $X \to X^{(0)}$ шәртиндә f функсијасынын лимити олмасыны

$$\lim_{X \to X^{(0)},\ X \in E} f(X) = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ x_2 \to x_2^{(0)} \\ \dots\dots \\ x_n \to x_n^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \tag{5}$$

вә ја

$$f(X)\to A\ (X\to X^{(0)},\ X\in E) \qquad (6)$$

кими јазырлар.

Гејд едәк ки, A әдәди $X\to X^{(0)}$ шәртиндә f функсијасынын лимити олдугда (4) бәрабәрсизлијинин $X=X^{(0)}$ нөгтәсиндә өдәнилмәси тәләб олунмур. f функсијасы $X^{(0)}$ нөгтәсиндә тә'јин олундугда исә онун һәмин нөгтәдә лимити $f(X^{(0)})$ гијмәтинә бәрабәр ола да биләр, олмаја да биләр.

Бирдәјишәнли функсијаларда олдуғу кими (XII, § 6) чохдәјишәнли функсијаларын да лимитинин 1-чи вә 2-чи тә'рифләринин еквивалент олдуғуну көстәрмәк олар. Буна көрә дә, верилмиш функсијанын лимитини һесабламаг үчүн бу тә'рифләрин һансы мүнасибдирсә, ондан да истифадә етмәк лазымдыр.

Јухарыдакы тә'рифләрдә E чохлуғу олараг $X^{(0)}$ нөгтәсиндән кечән мүәјјән дүз хәтти вә ја әјринин нөгтәләри чохлуғуну да көтүрмәк олар.

Тә'риф 3. *E чохлуғу $X^{(0)}$ нөгтәсиндән кечән мүәјјән әјринин нөгтәләри чохлуғу олдугда, f функсијасынын E чохлуғу үзрә $X\to X^{(0)}$ шәртиндә лимитинә функсијанын һәмин әјри үзрә $X^{(0)}$ нөгтәсиндә лимити дејилир.*

Хүсуси һалда, E чохлуғу $X^{(0)}$ нөгтәсиндән мүәјјән истигамәтдә кечән дүз хәттин нөгтәләри чохлуғу олдугда, f функсијасынын E чохлуғу үзрә $X\to X^{(0)}$ шәртиндә лимитинә, функсијанын һәмин истигамәт үзрә $X^{(0)}$ нөгтәсиндә лимити дејилир.

Тә'риф 4. *E чохлуғу, $X^{(0)}$ нөгтәсини өз дахилинә алан һәр һансы ачыг чохлуг вә ја $X^{(0)}$ нөгтәсинин ε-әтрафы $O_\varepsilon(X^{(0)})$ олдугда ($X^{(0)}$ нөгтәси һәмин чохлуға дахил олмаја да биләр), f функсијасынын E чохлуғу үзрә $X\to X^{(0)}$ шәртиндә лимитинә һәмин функсијанын $X^{(0)}$ нөгтәсиндә лимити дејилир („E чохлуғу үзрә" ифадәси атылыр).*

Бу һалда, (5) вә (6) бәрабәрликләри ујғун олараг

$$\lim_{X\to X^{(0)}} f(X)=A$$

вә

$$f(X)\to A\ (X\to X^{(0)})$$

кими јазылыр.

Ајдындыр ки, f функсијасынын $X^{(0)}$ нөгтәсиндә сонлу лимити варса, онда онун һәмин нөгтәдә истәнилән әјри вә истәнилән истигамәт үзрә дә лимити вар вә бу лимитләрин һамысы функсијанын $X^{(0)}$ нөгтәсиндәки лимити илә үст-үстә дүшүр. Демәли, верилмиш функсијанын һеч олмаса ики истигамәт вә ја әјри үзрә $X^{(0)}$ нөгтәсиндә лимити мүхтәлифдирсә, онда һәмин функсијанын $X^{(0)}$ нөгтәсиндә лимити јохдур.

Мисал 1. Ашағыдакы кими тә'јин олунмуш икидәјишәнли f функсијасынын (0, 0) нөгтәсиндә лимити јохдур:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \text{ олдугда},\\ 0, & x=y=0 \text{ олдугда}.\end{cases} \qquad (7)$$

Доғрудан да, $y=\kappa x$ олдугда

$$f(x,\kappa x)=\frac{\kappa}{1+\kappa^2}$$

вә функсијанын $y=\kappa x$ дүз хәтти истигамәтиндә (0, 0) нөгтәсиндә лимити $\frac{\kappa}{1+\kappa^2}$ әдәдинә бәрабәр олур. Бурадан ајдындыр ки, (7) функсијасынын $y=x$ ($\kappa=1$) вә $y=2x$ ($\kappa=2$) истигамәтләриндә лимити ујғун олараг $\frac{1}{2}$ вә $\frac{2}{5}$ әдәдләридир. Демәли, f функсијасынын (0, 0) нөгтәсиндә лимити јохдур.

Мисал 2. $\varphi(x,y)=x^2+y^2$ бәрабәрлијилә тә'јин олунмуш φ функсијасынын (0, 0) нөгтәсиндә лимити вар вә сыфра бәрабәрдир.

Доғрудан да, (0, 0) нөгтәсинә јығылан истәнилән $\{(x_\kappa, y_\kappa)\}$ нөгтәләр ардычыллығы үчүн

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\varphi(x,y)=\lim_{\kappa\to\infty}\varphi(x_\kappa,y_\kappa)=\lim_{\kappa\to\infty}(x_\kappa^2+y_\kappa^2)=0.$$

Бирдәјишәнли функсијаларын лимити һаггында олан тәклифләр (XII, § 11, ...) ујғун шәкилдә чохдәјишәнли функсијалар үчүн дә доғрудур. Бу теоремләрин анчаг бирини бурада исбат едәк. Јердә галан тәклифләрин дејилиши вә исбаты охучулара һәвалә олунур.

Теорем 1. ***$X^{(0)}$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмуш f функсијасынын һәмин нөгтәдә сонлу***

$$\lim_{X\to X^{(0)}} f(X)=A\neq0$$

лимити варса, онда $X^{(0)}$ нөгтәсинин елә $O_\delta(X^{(0)})$ әтрафы вар ки, бу әтрафда $f(X)$ илә A-нын ишарәси ејнидир.

Исбаты. Функсија лимитинин тә'рифинә көрә $\varepsilon=|A|$ әдәди үчүн $X^{(0)}$ нөгтәсинин елә $O_\delta(X^{(0)})$ әтрафы вар ки, бүтүн $X\in O_\delta(X^{(0)})$ $(X\neq X^{(0)})$ нөгтәләриндә $|f(X)-A|<|A|$ вә ја

$$A-|A|<f(X)<A+|A|$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан ајдындыр ки, $A>0$ олдугда $f(X)>A-A=0$, $A<0$ олдугда исә $f(X)<A+|A|=0$ олар.

Гејд едәк ки, верилмиш $X^{(0)}$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында ($X^{(0)}$ нөгтәси мүстәсна олмагла) тә'јин олунмуш f вә φ функ-

сијаларı үчүн ујғун шәртләр дахилиндә

$$\lim_{X\to X^{(0)}}[f(X)\pm\varphi(X)]=\lim_{X\to X^{(0)}}f(X)+\lim_{X\to X^{(0)}}\varphi(X),$$

$$\lim_{X\to X^{(0)}}[f(X)\cdot\varphi(X)]=\lim_{X\to X^{(0)}}f(X)\cdot\lim_{X\to X^{(0)}}\varphi(X),$$

$$\lim_{X\to X^{(0)}}\frac{f(X)}{\varphi(X)}=\frac{\lim\limits_{X\to X^{(0)}}f(X)}{\lim\limits_{X\to X^{(0)}}\varphi(X)}\quad(\lim_{X\to X^{(0)}}\varphi(X)\neq 0)$$

вә б. мүнасибәтләр доғрудур.

Чохдәјишәнли функсијаларын лимитинин сонсузлуг $\lim\limits_{X\to X^{(0)}}f(X)=\infty$ олмасынын вә $X\to\infty$ шәртиндә ($X^{(0)}=\infty$) лимитинин тә'рифини бирдәјишәнли функсијаларын ујғун тә'рифләринә (XII, § 7, § 8) анaложи олараг сөјләмәк олар. Мәсәлән, $X^{(0)}$ нөгтәсинин мүәјјән $O_\delta(X^{(0)})$ әтрафында ($X^{(0)}$ нөгтәси мүстәснадыр) тә'јин олунмуш f функсијасы үчүн $\lim\limits_{X\to X^{(0)}}f(X)=\infty$ олмасы о демәкдир ки, истәнилән $N>0$ әдәди үчүн елә $\delta>0$ вар ки, $0<\rho(X,X^{(0)})<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн $X\in O_\delta(X^{(0)})$ нөгтәләриндә $|f(X)|>N$ мүнасибәти өдәнилир.

Тә'риф. *$X=X^{(0)}$ нөгтәсиндә лимити сыфра бәрабәр олан f функсијасына $X\to X^{(0)}$ шәртиндә сонсуз кичилән функсија дејилир.*

Чохдәјишәнли функсијалар үчүн

$$f(X)=O[\varphi(X)](X\to X^{(0)}),$$

$$f(X)=o[\varphi(X)](X\to X^{(0)})$$

вә

$$f(X)\sim\varphi(X)\ (X\to X^{(0)})$$

мүнасибәтләри бирдәјишәнли функсијаларда олдуғу кими (XII, § 15) тә'јин олунур.

§ 3. ТӘКРАР ЛИМИТ

Әввәлки параграфда функсија лимитинә $X\to X^{(0)}$ шәртиндә, јә'ни $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәсинин бүтүн x_i ($i=1, 2, \dots, n$) координатлары $X^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нөгтәсинин ујғун $x_i^{(0)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) координатларына ејни заманда јахынлашдыгда ($x_i\to x_i^{(0)}$ ($i=1, 2, \dots, n$)) тә'риф верилмишдир. Буна көрә дә һәмин лимитә бә'зән n-гат лимит ($n=2$ олдугда икигат, $n=3$ олдугда үчгат вә с.) дејилир.

Чохдәјишәнли функсијаларын, x_i аргументләри нөвбә илә ујғун $x_i^{(0)}$ әдәдләринә јахынлашдыгда да лимитиндән данышмаг олар. Белә алынан

$$\lim_{x_1\to x_1^{(0)}}\lim_{x_2\to x_2^{(0)}}\dots\lim_{x_n\to x_n^{(0)}}f(x_1, x_2, \dots, x_n)\qquad(1)$$

лимитинә f функсијасынын *тәкрар лимити* дејилир. (1) ифадәсиндә лимитләрин јерини дәјишмәклә мүхтәлиф тәкрар лимитләр алмаг олар.

Икидәјишәнли функсијаларын ики дәнә тәкрар лимити вардыр:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x, y),\ \lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x, y).\qquad(2)$$

Икидәјишәнли функсијанын икигат вә тәкрар лимитләринин варлығы вә бәрабәрлији һаггында мүхтәлиф вәзијјәтләр ола биләр.

Мисал 1.

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \text{ олдугда},\\ 0, & x=y=0 \text{ олдугда}\end{cases}\qquad(3)$$

функсијасынын (О, О) нөгтәсиндә лимити (икигат лимити) јохдур (§ 2), лакин нөгтәдә тәкрар лимитләри вар:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x, y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x, y)=0.$$

Мисал 2.

$$\varphi(x, y)=\begin{cases}y+x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0 \text{ олдугда},\\ 0, & y=0 \text{ олдугда}\end{cases}\qquad(4)$$

функсијасынын (O, O) нөгтәсиндә

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\varphi(x, y)=\lim_{y\to 0}y=0$$

тәкрар лимити вә икигат лимити

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varphi(x, y)=0$$

вар, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\varphi(x, y)$ тәкрар лимити исә јохдур.

$$\psi(x, y)=\begin{cases}x+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ олдугда},\\ 0, & x=0 \text{ олдугда}\end{cases}\qquad(5)$$

функсијасынын исә (О, О) нөгтәсиндә $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x, y)$ тәкрар лимити јохдур, јердә галан ики лимити исә вар:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\psi(x, y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\psi(x, y)=0.$$

Бурадан ајдындыр ки, икидәјишәнли функсијанын икигат вә тәкрар лимитләринин биринин варлығындан, о бири икисинин варлығы чыхмыр. Бунунла белә, һәмин лимитләрин варлығы вә бәрабәр олмасы һаггында ашағыдакы теореми исбат етмәк олар.

Теорем. ***(a, b) нөгтәсинин $\Pi((a, b); \delta_1, \delta_2)$ дүзбучаглы әтрафында тә'јин олунмуш f функсијасынын һәмин***

нөгтәдә икигат

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = A \qquad (6)$$

лимити вә y-ин $0<|y-b|<\delta_2$ гиjмәтләриндә ади $\varphi(y)=\lim_{x\to a} f(x, y)$ лимити варса, онда онун тәкрар $\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)$ лимити дә вар вә икигат лимитинә бәрабәрдир:

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y). \qquad (7)$$

Исбаты. (6) лимитинин варлығы көстәрир ки, истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн (a, b) нөгтәсинин елә дүзбуҹаглы $\Pi((a, b); \eta_1, \eta_2)$ $(0<\eta_1<\delta_1,\ 0<\eta_2<\delta_2)$ әтрафы вар ки, һәмин әтрафын бүтүн $(x, y)\in\Pi((a, b); \eta_1, \eta_2)$, $(x, y)\neq(a, b)$ нөгтәләриндә

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon \qquad (8)$$

бәрабәрсизлиjи өдәнилир. Бу бәрабәрсизликдә, y-ин $|y-b|<\eta_2$ бәрабәрсизлиjини өдәjән һәр бир гиjмәтини гејд едәрәк, $x\to a$ шәртиндә лимитә кечсәк,

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon$$

мүнасибәтини аларыг. Бурадан $A=\lim_{y\to b}\varphi(y)$ бәрабәрлиjи вә (6) бәрабәрлиjинә әсасән (7) мүнасибәти алыныр.

Нәтиҹә. (a, b) нөгтәсинин мүәjјән әтрафында тә'jин олунмуш f функсиjасынын һәмин нөгтәдә икигат лимити вә һәр ики тәкрар лимити варса, онда онларын үчү дә бир-биринә бәрабәр олар:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y). \qquad (9)$$

Јадда сахламаг лазымдыр ки, икидәjишәнли f функсиjасынын тәкрар лимитләринин варлығындан онларын бәрабәрлиjи чыхмыр.

Доғрудан да,

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \text{ олдуғда,}\\ 0, & x=y=0 \text{ олдуғда}\end{cases}$$

бәрабәрлиjи илә тә'jин олунмуш f функсиjасынын (0, 0) нөгтәсиндә тәкрар лимитләринин икиси дә вар:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y) = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{y^2}{y^2}\right) = -1,$$

лакин онлар бир-биринә бәрабәр дејилдир.

Бурадан ајдындыр ки, тәкрар лимитдә лимитләрин јерини һәмишә дәјишмәк олмаз. Буну нәзәрә алмадан

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)$$

бәрабәрлијиндән истифадә етмәк кобуд сәһвләрә сәбәб ола биләр.

§ 4. ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАНЫН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Тә'риф 1. $E\subset E_n$ чохлуғунда тә'јин олунмуш f функсијасы үчүн чохлуғун $X^{(0)}\in E$ лимит нөгтәсиндә

$$\lim_{X\to X^{(0)},\ X\in E} f(X) = f(X^{(0)}) \qquad (1)$$

бәрабәрлији өдәнилирсә, онда она һәмин $X^{(0)}$ нөгтәсиндә кәсилмәјән функсија дејилир.

Бундан башга, $E\subset E_n$ чохлуғунда тә'јин олунмуш f функсијасы һәмин чохлуғун һәр бир изолә едилмиш $X^{(0)}\in E$ нөгтәсиндә кәсилмәз һесаб олунур.

Верилмиш $X^{(0)}\in E$ нөгтәсиндә (1) бәрабәрлији өдәнилмәдикдә, дејирләр ки, f функсијасы һәмин нөгтәдә кәсилир вә $X^{(0)}$ нөгтәси f-ин *кәсилмә нөгтәси* адланыр.

Функсија лимитинин тә'рифинә әсасән функсијанын нөгтәдә кәсилмәзлијинә „$\varepsilon-\delta$ дилиндә" ашағыдакы кими дә тә'риф вермәк олар.

Тә'риф 2. Тутаг ки, f функсијасы $E\subset E_n$ чохлуғунда тә'јин олунмушдур вә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ вар ки, E чохлуғунун $\rho(X, X^{(0)})<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн $X\in E$ нөгтәләриндә

$$|f(X)-f(X^{(0)})|<\varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда f функсијасына $X^{(0)}\in E$ нөгтәсиндә кәсилмәјән функсија дејилир.

E чохлуғунун бүтүн нөгтәләриндә кәсилмәјән f функсијасына һәмин чохлуғда кәсилмәјән функсија дејилир. Буну белә јазырлар: $f\in C(E)$.

f функсијасынын $X\in E$ вә $X^{(0)}\in E$ нөгтәләриндәки гијмәтләринин $f(X)-f(X^{(0)})$ фәргини Δf (вә ја ΔW) илә ишарә етдикдә

$$\Delta f = f(X)-f(X^{(0)}). \qquad (2)$$

(1) бәрабәрлији ашағыдакы кими јазылар:

$$\lim_{X\to X^{(0)}} \Delta f = 0. \qquad (3)$$

Онда функсијанын нөгтәдә кәсилмәзлијинин тә'рифини белә дә сөјләмәк олар:

Тә'риф 3. *(3) бәрабәрлиҹи өдәнилдикдә f функсиҹасына $X^{(0)}$ нөгтәсиндә кәсилмәјән функсиҹа дејилир.*

$$\rho(X, X^{(0)}) = \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n} (x_\kappa - x_\kappa^{(0)})^2} \text{ вә } \Delta x_\kappa = x_\kappa - x_\kappa^{(0)} \ (\kappa = 1, 2, \dots, n)$$

олдуғундан $X \to X^{(0)}$ шәртини $\rho(X, X^{(0)}) \to 0$ вә ја $\Delta x_\kappa \to 0$ $(\kappa = 1, 2, \dots, n)$ илә дә әвәз етмәк олар. Онда (3) бәрабәрлиҹи

$$\lim_{\rho(x,x^{(0)}) \to 0} \Delta f = 0 \text{ вә ја } \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \dots\dots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta f = 0$$

кими јазылар.

(2) ифадәсинә f функсиҹасынын $X^{(0)}$ нөгтәсиндә *там артымы* дејилир. Чохдәјишәнли функсиҹанын һәр бир аргументинә нәзәрән хүсуси артымына да бахылыр. Мәсәлән,

$$\Delta_{x_i} f = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) -$$
$$- f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

фәргинә f функсиҹасынын x_i аргументинә нәзәрән $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нөгтәсиндә *хүсуси артымы* дејилир.

Чохдәјишәнли функсиҹаларын истәнилән сајда кәсилмә нөгтәси ола биләр. Верилмиш әјринин бүтүн нөгтәләри f функсиҹасынын кәсилмә нөгтәләри олдугда, она функсиҹанын *кәсилмә әјриси* дејилир. Чохдәјишәнли функсиҹанын кәсилмә нөгтәләри чохлуғу сәтһ дә тәшкил едә биләр.

Мисал 1. Мәркәзи (0, 0) нөгтәсиндә вә радиусу ваһидә бәрабәр олан $x^2 + y^2 = 1$ чеврәсинин бүтүн нөгтәләри

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}, & x^2 + y^2 \neq 1 \text{ олдугда,} \\ 0, & x^2 + y^2 = 1 \text{ олдугда} \end{cases}$$

шәклиндә тә'јин олунмуш f функсиҹасынын кәсилмә нөгтәләридир.

Мисал 2. Әввәлки параграфда тә'јин олунмуш (3) функсиҹасы (мисал 1) (0, 0) нөгтәсиндә кәсилир.

Тә'риф 4. *$X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмуш f функсиҹасы үчүн*

$$\lim_{x_i \to x_i^{(0)}} f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = f(X^{(0)})$$

бәрабәрлиҹи өдәнилдикдә, она x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ аргументинә нәзәрән $X^{(0)}$ нөгтәсиндә кәсилмәјән функсиҹа дејилир.

Ајдындыр ки, верилмиш нөгтәдә кәсилмәјән чохдәјишәнли функсиҹа өз аргументләринин һәр биринә нәзәрән дә кәсилмәјәндир. Бунун тәрси доғру дејилдир.

Һәр бир аргументинә нәзәрән кәсилмәјән чохдәјишәнли

функсиҹа $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ аргументинә (јә'ни аргументләр күллүсүнә) нәзәрән кәсилән дә ола биләр.

Мәсәлән,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 + y^2}{x - y}, & x \neq y \text{ олдугда,} \\ 0, & x = y \text{ олдугда} \end{cases}$$

бәрабәрлиҹи васитәсилә тә'јин олунан f функсиҹасы (O, O) нөгтәсиндә һәр бир аргументә нәзәрән кәсилмәјәндир:

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} 5x = 0 = f(0, 0)$$
$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} (-y) = 0 = f(0, 0).$$

Лакин һәмин нөгтәдә $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ лимити олмадығындан $X = (x, y)$ нөгтәсинә (вә ја аргументләр күллүсүнә) нәзәрән кәсиләндир.

Бирдәјишәнли кәсилмәјән функсиҹалар һаггында олан тәклифләр (XIII, § 3) ујғун шәкилдә чохдәјишәнли кәсилмәјән функсиҹалар үчүн дә доғрудур. Мәсәлән, верилмиш нөгтәдә кәсилмәјән ики функсиҹанын ҹәми, фәрги, һасили вә нисбәти (мәхрәҹ сыфырдан фәргли олдугда) һәмин нөгтәдә кәсилмәјәндир.

Һәмин тәклифләрин бири дә кәсилмәјән функсиҹанын өз ишарәсини сахламасы һаггындадыр.

Теорем 1. ***$X^{(0)} \in E_n$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмуш, һәмин нөгтәдә кәсилмәјән вә $f(X^{(0)}) \neq 0$ шәртини өдәјән f функсиҹасы $X^{(0)}$ нөгтәсинин јахын әтрафында өз ишарәсини сахлајыр.***

Бу теоремин доғрулуғу § 2-дә исбат едилмиш 1-ҹи теоремдән вә функсиҹанын нөгтәдә кәсилмәзлиҹинин тә'рифиндән ајдындыр.

Чохдәјишәнли кәсилмәјән функсиҹалар һаггында башга тәклифләри сөјләмәк вә исбат етмәк охуҹулара һәвалә олунур.

§5. МҮРӘККӘБ ФУНКСИЈА ВӘ ОНУН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Фәрз едәк ки,

$$x_1 = \varphi_1(T), \ x_2 = \varphi_2(T), \ \dots, \ x_n = \varphi_n(T) \qquad (1)$$
$$(T = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \sigma)$$

функсиҹалары $\sigma \in E_m$ областында тә'јин олунмушдур вә һәр бир $T \in \sigma$ нөгтәсинә ујғун олан $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\varphi_1(T), \varphi_2(T), \dots, \varphi_n(T))$ нөгтәси $E \subset E_n$ областына дахилдир. Онда E областында тә'јин олунмуш

$$W = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$$

функсиjасы васитәсилә σ областынын һәр бир $T \in \sigma$ нөгтәсинә бир

$$W = f[\varphi_1(T), \varphi_2(T), \ldots, \varphi_n(T)] = \psi(T) \qquad (2)$$

әдәди уjғун гоjмаг олар.

Белә тә'jин олунан ψ функсиjасына σ областында верилмиш *мүрәккәб функсиjа* деjилир. $\psi = f[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$ функсиjасы f вә $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ функсиjаларынын суперпозисиjасы да адланыр.

Теорем. ***$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ функсиjалары $T^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots, t_m^{(0)}) \in \sigma$ нөгтәсиндә вә f функсиjасы $X^{(0)} = (\varphi_1(T^{(0)}), \varphi_2(T^{(0)}), \ldots, \varphi_n(T^{(0)})) \in E$ нөгтәсиндә кәсилмәjәндирсә, онда $f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ мүрәккәб функсиjасы $T^{(0)}$ нөгтәсиндә кәсилмәjән олар.***

Исбаты. f функсиjасы $X^{(0)} \in E$ нөгтәсиндә кәсилмәjән олдуғундан, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $\rho(X, X^{(0)}) < \delta$ бәрабәрсизлиjини өдәjән бүтүн $X \in E$ нөгтәләриндә

$$|f(X) - f(X^{(0)})| < \varepsilon$$

мүнасибәти өдәнилир. φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ функсиjалары $T^{(0)}$ нөгтәсиндә кәсилмәjән олдуғуна көрә исә $\delta_1 = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ әдәди үчүн елә $\eta > 0$ тапмаг олар ки, $\rho(T, T^{(0)}) < \eta$ бәрабәрсизлиjини өдәjән бүтүн $T \in \sigma$ нөгтәләриндә

$$|x_i - x_i^{(0)}| = |\varphi_i(T) - \varphi_i(T^{(0)})| < \frac{\delta}{\sqrt{n}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

бәрабәрсизликләри өдәниләр. Онда бүтүн белә T нөгтәләриндә

$$\rho(X, X^{(0)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(T) - \varphi_i(T^{(0)}))^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\delta^2}{n}} = \delta$$

бәрабәрсизлиjи вә буна көрә дә

$$|\psi(T) - \psi(T^{(0)})| = |f(X) - f(X^{(0)})| < \varepsilon$$

мүнасибәти доғру олар. Бу исә $\psi = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ функсиjасынын $T^{(0)} \in \sigma$ нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну көстәрир.

Бирдәjишәнли елементар функсиjалар (XI, § 19) вә онларын кәсилмәзлиjи һаггында олан тәклифләр (XIII, § 5), уjғун шәкилдә чохдәjишәнли елементар функсиjалар үчүн дә доғрудур.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәjишәнләри вә сабитләр үзәриндә сонлу саjда топлама, чыхма, вурма, бөлмә әмәлләри вә суперпозисиjалар вә һәм дә бирдәjишәнли елементар функсиjадүзәлтмә әмәлләри тәтбиг етмәклә алынан функсиjалара *чохдәjишәнли елементар функсиjалар* деjилир.

Мәсәлән,

$$f_1 = x^2 + y^2 e^{xy}, \quad f_2 = \ln \frac{x^2 + y^2}{x - y} + \sin y,$$

$$f_3 = \sin^2 x + \cos^2(x + y), \quad f_4 = x^n + y^n + 3^x$$

елементар функсиjалардыр.

Елементар функсиjалар синфи чох кенишдир вә онлар риjази анализ курсунда өjрәнилир.

Jухарыда исбат етдиjимиз теоремә әсасән көстәрмәк олар ки, бүтүн чохдәjишәнли елементар функсиjалар тә'jин областларынын һәр бир нөгтәсиндә кәсилмәjәндир.

§ 6. ГАПАЛЫ ЧОХЛУГДА КӘСИЛМӘJӘН ФУНКСИJАНЫН ХАССӘЛӘРИ

Гапалы вә мәһдуд чохлугда кәсилмәjән чохдәjишәнли функсиjаларын бир сыра мараглы хассәләри вардыр. Бу хассәләр парчада кәсилмәjән бирдәjишәнли функсиjаларын уjғун хассәләринин (XIII, § 8) аналогудур.

Теорем 1. ***Мәһдуд вә гапалы $E \subset E_n$ чохлуғунда кәсилмәjән f функсиjасы һәмин чохлугда мәһдуддур.***

Исбаты. Әксини фәрз едәк ки, f функсиjасы E чохлуғунда мәһдуд деjилдир. Онда һәр бир k әдәди үчүн елә $X^{(k)} \in E$ нөгтәси вар ки,

$$|f(X^{(k)})| > k \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (1)$$

Бу $\{X^{(k)}\}$ ардычыллығы мәһдуддур $(X^{(k)} \in E)$. Буна көрә дә ондан һәр һансы $X^{(0)} \in E$ нөгтәсинә jығылан $\{X^{(k_m)}\}$ алтардычыллығы аjырмаг олар (XXV, § 3). f функсиjасы $X^{(0)} \in E$ нөгтәсиндә кәсилмәjән олдуғундан $\lim_{m \to \infty} f(X^{(k_m)}) = f(X^{(0)})$ бәрабәрлиjи өдәнилмәлидир. Бу исә (1) бәрабәрсизлиjинә зиддир.

Демәли, f функсиjасы E чохлуғунда мәһдуддур.

Теорем 2. ***Мәһдуд вә гапалы $E \subset E_n$ чохлуғунда кәсилмәjән f функсиjасы бу чохлуғун heч олмаса бир $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in E$ нөгтәсиндә өзүнүн һәмин чохлугда дәгиг ашағы сәрһәдини, heч олмаса бир $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in E$ нөгтәсиндә исә дәгиг jухары сәрһәдини алыр:***

$$f(\alpha) = \inf_{X \in E} f(X) = m_0, \quad f(\beta) = \sup_{X \in E} f(X) = M_0. \qquad (2)$$

Исбаты. Әксини фәрз едәк ки, f функсиjасы E чохлуғунун heч бир нөгтәсиндә M_0 гиjмәтини алмыр. Онда E чохлуғунун бүтүн $X \in E$ нөгтәләриндә $f(X) < M_0$ олар. Бу һалда мәһдуд вә гапалы E чохлуғунда кәсилмәjән

$$\varphi(X) = \frac{1}{M_0 - f(X)}$$

функсиjасы әввәлки теоремә көрә мәһдуд олар:
$$\varphi(X) \leqslant M_1 \, (M_1 > 0).$$
Бурадан
$$f(X) \leqslant M_0 - \frac{1}{M_1} \quad (X \in E)$$
алыныр ки, бу да M_0 әдәди f-ин E чохлуғунда дәгиг јухары сәрһәди олмадығыны көстәрир.

Алынан зиддиjjәт көстәрир ки, фәрзиjjәмиз доғру деjилдир, jә'ни heч олмаса бир $\beta \in E$ нөгтәсиндә $f(\beta) = M_0$ олар.

Функсиjанын heч олмаса бир $\alpha \in E$ нөгтәсиндә дәгиг ашағы сәрһәдини алмасы да еjни jолла исбат олунур.

Теорем 3. *Рабитәли $\sigma \subset E_n$ областында кәсилмәjән f функсиjасы бу областын ики нөгтәсиндә бәрабәр олмаjан $A = f(\alpha) \neq f(\beta) = B$ гиjмәтләрини алырса, онда hәмин A вә B әдәдләри арасында јерләшән hәр бир C әдәдини дә областын heч олмаса бир нөгтәсиндә алыр.*

Исбаты. σ областы рабитәли олдуғундан онун α вә β нөгтәләрини кәсилмәз l әjриси илә бирләшдирмәк олар (XXV, § 4). Бу әjри $X = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ нөгтәләринин һәндәси јеридир вә $\alpha = (x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a))$, $\beta = (x_1(b), x_2(b), \ldots, x_n(b))$ нөгтәләри онун учларыдыр.

Бу һалда, $f[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] = F(t)$ мүрәккәб функсиjасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәjән (§ 5) бирдәјишәнли функсиjа олар вә $F(a) = A \neq B = F(b)$. Онда верилмиш парчада кәсилмәjән бирдәјишәнли функсиjанын ујғун хассәсинә (XIII, § 8) көрә елә t^* нөгтәси вар ки, $F(t^*) = C$ олур. Бу t^* нөгтәси $[a, b]$ парчасында јерләшир $(a < t^* < b)$ вә тамамилә σ областында јерләшән l әjрисинин $\xi = (x_1(t^*), x_2(t^*), \ldots, x_n(t^*)) \in \sigma$ нөгтәсини тә'јин едир. Ајдындыр ки,
$$F(t^*) = f(x_1(t^*), \ldots, x_n(t^*)) = f(\xi) = C.$$

§ 7. ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАНЫН МҮНТӘЗӘМ КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Верилмиш f функсиjасынын $E \subset E_n$ чохлуғунда кәсилмәзлиjи ону чохлуғун аjры-аjры нөгтәләриндә характеризә едир. Бүтүн E чохлуғунда функсиjаны характеризә етмәк үчүн верилән анлаjышлардан бири дә мүнтәзәм кәсилмәзлик анлаjышыдыр.

Тә'риф 1. *Тутаг ки, f функсиjасы E чохлуғунда тә'јин олунмушдур вә истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ вар ки, E чохлуғунун $\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta$ бәрабәрсизлиjини өдәjән истәнилән $X^{(1)}$ вә $X^{(2)}$ нөгтәләриндә*
$$|f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| < \varepsilon \qquad (1)$$
мүнасибәти өдәнилир. Онда f функсиjасына E чохлуғунда мүнтәзәм кәсилмәjән функсиjа деjилир.

Теорем 1. *Мәһдуд вә гапалы E чохлуғунда кәсилмәjән f функсиjасы hәмин чохлугда мүнтәзәм кәсилмәjәндир.*

Исбаты. Әксини фәрз едәк ки, f функсиjасы E чохлуғунда мүнтәзәм кәсилмәjән деjилдир. Онда елә $\varepsilon_0 > 0$ әдәди вә E чохлуғунун $\rho(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}) < \frac{1}{k}$ бәрабәрсизлиjини өдәjән $X_k^{(1)}$ вә $X_k^{(2)}$ нөгтәләри вар ки,
$$|f(X_k^{(1)}) - f(X_k^{(2)})| \geqslant \varepsilon_0 > 0 \qquad (2)$$
мүнасибәти өдәнилир.

$X_k^{(1)}$ нөгтәләри мәһдуд гапалы E чохлуғуна дахил олдуғундан $\{X_k^{(1)}\}$ ардычыллығы мәһдудлур вә ондан hәр hансы $X^{(0)} \in E$ нөгтәсинә јығылан алтардычыллыг аjырмаг олар:
$$X_{k_m}^{(1)} \to X^{(0)} \ (m \to \infty).$$
$\rho(X_{k_m}^{(1)}, X_{k_m}^{(2)}) < \frac{1}{k_m}$ бәрабәрсизлиjинә әсасән $X_{k_m}^{(2)} \to X^{(0)}$ $(m \to \infty)$ олар. f функсиjасы E чохлуғунда кәсилмәjән олдуғундан $X^{(0)}$ нөгтәсиндә дә кәсилмәjәндир. Онда кәсилмәзлиjин тә'рифинә көрә
$$\lim_{m\to\infty} |f(X_{k_m}^{(1)}) - f(X_{k_m}^{(2)})| = |f(X^{(0)}) - f(X^{(0)})| = 0$$
олар ки, бу да (2) бәрабәрсизлиjинә зиддир.

Алынан зиддиjjәт теоремин доғру олдуғуну көстәрир.

Гејд едәк ки, E чохлуғунда мүнтәзәм кәсилмәjән f функсиjасы hәмин чохлуғун hәр бир нөгтәсиндә дә (jә'ни, E чохлуғунда да) кәсилмәjәндир. Бу тәклифин тәрси доғру деjилдир. E чохлуғунда кәсилмәjән f функсиjасы hәмин чохлугда мүнтәзәм кәсилмәjән олмаja да биләр.

Функсиjанын верилмиш нөгтәдә вә чохлугда характеристикаларындан бири дә онун рәгсидир.

Тутаг ки, f функсиjасы E чохлуғунда тә'јин олунмуш мәһдуд функсиjадыр. Онун E чохлуғунда дәгиг ашағы сәрһәдини $m(E)$ вә дәгиг јухары сәрһәдини $M(E)$ илә ишарә едәк.

Тә'риф 2.
$$\omega(E) = M(E) - m(E) \qquad (3)$$
фәргинә f функсиjасынын E чохлуғунда рәгси деjилир.

$m(E) \leqslant M(E)$ олдуғундан $\omega(E) \geqslant 0$ олар.

Верилмиш $X^{(0)} \in E$ нөгтәсинин $O_\delta(X^{(0)})$ әтрафы илә E чохлуғунун кәсишмәсини $E(\delta)$ илә ишарә едәк: $E(\delta) = O_\delta(X^{(0)}) \cap E$.

Онда сыфра јығылан
$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots; \ \delta_n \to 0 \ (n \to \infty)$$
монотон ардычыллығына ујғун
$$E(\delta_1), E(\delta_2), \ldots, E(\delta_n), \ldots$$

чохлуглары ардычыллығы алыныр. Бу һалда, монотон

$$M[E(\delta_1)] \geq M[E(\delta_2)] \geq \cdots \geq M[E(\delta_n)] \geq \ldots,$$
$$m[E(\delta_1)] \leq m[E(\delta_2)] \leq \cdots \leq m[E(\delta_n)] \leq \cdots$$

вә

$$\omega[E(\delta_1)] \geq \omega[E(\delta_2)] \geq \cdots \geq \omega[E(\delta_n)] \geq \cdots$$

ардычыллыгларынын сонлу лимитләри вар. Һәмин лимитләри

$$\lim_{n\to\infty} M[E(\delta_n)] = M(X^{(0)}), \quad \lim_{n\to\infty} m[E(\delta_n)] = m(X^{(0)})$$

вә

$$\lim_{n\to\infty} \omega[E(\delta_n)] = \omega(X^{(0)})$$

кими ишарә едәк.

Тә'риф 3. $M(X^{(0)})$, $m(X^{(0)})$ вә $\omega(X^{(0)})$ *әдәдләринә f функсијасынын ујғун оларaг* $X^{(0)}$ *нөгтәсиндә јухары сәрһәди, ашағы сәрһәди вә рәгси дејилир.*

Ајдындыр ки,

$$m(X^{(0)}) \leq f(X^{(0)}) \leq M(X^{(0)})$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Хүсуси һалда, $X^{(0)}$ нөгтәси E чохлуғунун изолә едилмиш нөгтәси олдугда

$$m(X^{(0)}) = f(X^{(0)}) = M(X^{(0)})$$

вә

$$\omega(X^{(0)}) = 0 \qquad (4)$$

бәрабәрликләри доғрудур.

Бундан башга, ашағыдакы теоремин дә доғрулуғуну исбат етмәк олар.

Теорем 2. ***E чохлуғунда тә'јин олунмуш f функсијасынын*** $X^{(0)} \in E$ ***нөгтәсиндә кәсилмәјән олмасы үчүн онун һәмин нөгтәдә рәгсинин сыфра бәрабәр олмасы (јә'ни,*** $\omega(X^{(0)}) = 0$ ***олмасы) зәрури вә кафи шәртдир.***

Бу теоремә әсасән f функсијасынын $X^{(0)} \in E$ нөгтәсиндә кәсилмәјән олмасына ашағыдакы кими дә тә'риф вермәк олар.

Тә'риф 4. *Верилмиш* $X^{(0)} \in E$ *нөгтәсиндә рәгси сыфра бәрабәр олан f функсијасына һәмин нөгтәдә кәсилмәјән функсија дејилир.*

Бу, *функсијанын нөгтәдә кәсилмәзлијинин БЕР тә'рифи адланыр.*

§ 8. КӘСИЛМӘЗЛИК МОДУЛУ

Тутаг ки, f функсијасы E чохлуғунда тә'јин олунмуш мәһдуд функсијадыр. Бу һалда,

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; f) = \sup_{\substack{\rho(X^{(1)},X^{(2)})<\delta \\ X^{(1)},X^{(2)}\in E}} |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| \qquad (1)$$

кәмијјәтинә f функсијасынын E чохлуғунда *кәсилмәзлик модулу* дејилир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, $\omega(\delta) \geq 0$ олар.

Бундан башга, истәнилән $0 < \delta_1 < \delta_2$ әдәдләри үчүн

$$\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2) \qquad (2)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир, јә'ни кәсилмәзлик модулу монотон азалмајан функсијадыр.–Доғрудан да,

$$\omega(\delta_1) = \sup_{\substack{\rho(X^{(1)},X^{(2)})<\delta_1 \\ X^{(1)},X^{(2)}\in E}} |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| \leq$$
$$\leq \sup_{\substack{\rho(X^{(1)},X^{(2)})<\delta_2 \\ X^{(1)},X^{(2)}\in E}} |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| = \omega(\delta_2).$$

Демәли, һәмишә

$$\lim_{\substack{\delta\to 0 \\ (\delta>0)}} \omega(\delta) = \omega(0+) = \mu \geq 0 \qquad (3)$$

лимити вар. Функсија E чохлуғунда мүнтәзәм кәсилмәјән олдугда (3) лимити сыфра бәрабәр олур.

Теорем. ***E чохлуғунда тә'јин олунмуш f функсијасынын һәмин чохлуғда мүнтәзәм кәсилмәјән олмасы үчүн***

$$\lim_{\delta\to +0} \omega(\delta; f) = 0 \qquad (4)$$

мүнасибәтинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

Шәртин кафилији. (4) шәртинин өдәнилмәси о демәкдир ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$ вар ки, $0<\delta<\delta_0$ бәрабәрсизлијини өдәјән истәнилән δ үчүн

$$\omega(\delta; f) < \varepsilon$$

мүнасибәти өдәнилир. Онда E чохлуғунун $\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta$ шәртини өдәјән ихтијари $X^{(1)}$ вә $X^{(2)}$ нөгтәләри үчүн

$$|f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| < \varepsilon \qquad (5)$$

олар. Бу исә f функсијасынын E чохлуғунда мүнтәзәм кәсилмәз олмасы демәкдир.

Шәртин зәрурилији. f функсијасы E чохлуғунда мүнтәзәм кәсилмәјән олдугда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ тапмаг олар ки, E чохлуғунун $\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари $X^{(1)}$ вә $X^{(2)}$ нөгтәләриндә (5) бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{\rho(X^{(1)},X^{(2)})<\delta \\ X^{(1)},X^{(2)}\in E}} |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| \leq \varepsilon$$

олар ки, бурадан да $\omega(\delta)$-нын азалмајан олдуғуна әсасән (4) бәрабәрлији алыныр.

Кәсилмәзлик модулунун белә бир марағлы хассәси дә вардыр: E чохлуғу габарыг олдугда истәнилән $\delta_1 > 0$ вә $\delta_2 > 0$ әдәдләри үчүн

$$\omega(\delta_1 + \delta_2; f) \leqslant \omega(\delta_1; f) + \omega(\delta_2; f) \tag{6}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Доғрудан да, E чохлуғунун $\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) \leqslant \delta_1 + \delta_2$ шәртини өдәјән ихтијари ики $X^{(1)}$ вә $X^{(2)}$ нөгтәсини көтүрәк. Бу нөгтәләри бирләшдирән парча үзәриндә јерләшән вә $\rho(X^{(1)}, X) \leqslant \delta_1$ вә $\rho(X, X^{(2)}) \leqslant \delta_2$ шәртләрини өдәјән ихтијари нөгтәни X илә ишарә етсәк, онда

$$\omega(\delta_1 + \delta_2; f) = \sup_{\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) \leqslant \delta_1 + \delta_2} |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\rho(X^{(1)}, X) \leqslant \delta_1} |f(X^{(1)}) - f(X)| + \sup_{\rho(X, X^{(2)}) \leqslant \delta_2} |f(X) - f(X^{(2)})| =$$

$$= \omega(\delta_1; f) + \omega(\delta_2; f)$$

мүнасибәтини аларыг.

$\delta_1 = \delta_2 = \delta$ олдугда (6) бәрабәрсизлијиндән

$$\omega(2\delta; f) \leqslant 2\omega(\delta; f)$$

мүнасибәти алыныр. Бурадан, там ријази индуксија методу васитәсилә истәнилән натурал n әдәди үчүн

$$\omega(n\delta; f) \leqslant n\omega(\delta; f) \tag{7}$$

бәрабәрсизлијини алмаг олар.

XXVII ФӘСИЛ

ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАНЫН ТӨРӘМӘСИ ВӘ ДИФЕРЕНСИАЛЫ

§ 1. ХҮСУСИ ТӨРӘМӘ

Фәрз едәк ки, n-дәјишәнли f функсијасы $\sigma \subset E_n$ областында тә'јин олунмушдур вә $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ бу областын һәр һансы нөгтәсидир. Функсијанын X нөгтәсиндә x_i аргументинә нәзәрән хүсуси артымы ашағыдакы кими тә'јин олунур:

$$\Delta_{x_i} W = \Delta_{x_i} f(X) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) -$$
$$- f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Тә'риф 1. *$\Delta x_i \to 0$ шәртиндә*

$$\frac{\Delta_{x_i} f(X)}{\Delta x_i} \tag{2}$$

нисбәтинин сонлу лимити варса, һәмин лимитә f функсијасынын X нөгтәсиндә x_i аргументинә нәзәрән хүсуси төрәмәси дејилир вә ашағыдакы кими ишарә олунур:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(X) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(X)}{\Delta x_i}. \tag{3}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Чохдәјишәнли функсијанын һәр бир аргументинә нәзәрән хүсуси төрәмәсиндән данышмаг олар. Хүсуси һалда, икидәјишәнли $z = f(x, y)$ функсијасынын x вә y аргументләринә нәзәрән хүсуси төрәмәләри $\frac{\partial f}{\partial x}$ вә $\frac{\partial f}{\partial y}$ олар.

Гејд. f функсијасынын x_i аргументинә нәзәрән хүсуси төрәмәсини көстәрән $\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}$ ишарәси „бүтөв" баша дүшүлүр, онун сурәт вә мәхрәчинин ајрылыгда мә'насы јохдур.

Тә'рифдән ајдындыр ки, чохдәјишәнли функсијанын бир аргументинә нәзәрән хүсуси төрәмәсини һесабладыгда, онун јердә галан аргументләрини сабит һесаб етмәк лазымдыр. Буна көрә дә чохдәјишәнли функсијаларын хүсуси төрәмәләрини һесабладыгда бирдәјишәнли функсија төрәмәсинин һесабланма гајдаларындан вә дүстурларындан билаваситә истифадә олунур.

Мисал. $W = x_1^2 + x_2^4 + \cdots + x_n^{2n} - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ функсијасынын хүсуси төрәмәләри ашағыдакы кими һесабланыр:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 \cdots x_n,$$
$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = 4x_2^3 - x_1 \cdot x_3 \cdots x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial W}{\partial x_n} = 2nx_n^{2n-1} - x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1}.$$

Верилмиш X нөгтәсиндә x_i аргументинә нәзәрән сонлу $\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}$ хүсуси төрәмәси олан f функсијасы һәмин нөгтәдә x_i аргументинә нәзәрән кәсилмәјәндир. Хүсуси төрәмәнин варлығы үчүн бу зәрури шәрт кафи дејилдир. Верилмиш нөгтәдә x_i дәјишәнинә нәзәрән кәсилмәјән функсијанын һәмин дәјишәнә нәзәрән хүсуси төрәмәси олмаја да биләр.

Гејд едәк ки, верилмиш нөгтәдә сонлу төрәмәси олан бирдәјишәнли функсија һәмин нөгтәдә кәсилмәјәндир. Чохдәјишәнли функсијанын исә верилмиш нөгтәдә бүтүн аргументләрә нәзәрән хүсуси төрәмәләринин варлығындан һәмин нөгтәдә кәсилмәзлији чыхмыр.

Мәсәлән, икидәјишәнли

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ олдугда,} \\ 0, & x = y = 0 \text{ олдугда} \end{cases}$$

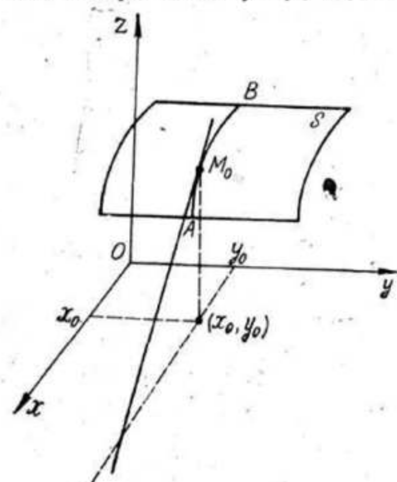
функсиjасынын $(0, 0)$ нөгтәсиндә һәр ики аргументә нәзәрән сонлу хүсуси төрәмәси вар:

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0,$$

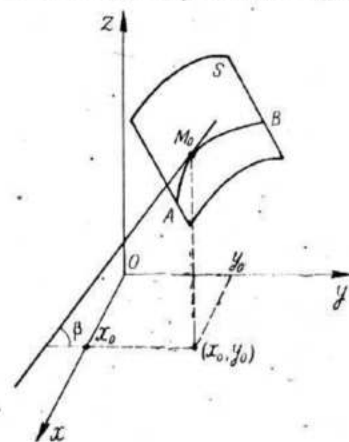
лакин һәмин нөгтәдә кәсиләндир (XXVI, § 4).

Икидәjишәнли функсиjанын хүсуси төрәмәләринин садә һәндәси мә'насы вардыр.

Тутаг ки, $z = f(x, y)$ функсиjасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә сонлу хүсуси төрәмәләри $f'_x(x_0, y_0)$ вә $f'_y(x_0, y_0)$ вар. Һәмин функсиjанын графики фәзада бир S сәтһи олар. Бу сәтһ үзәриндә (x_0, y_0) нөгтәсинә уjғун олан нөгтәни $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ илә ишарә едәк. $y = y_0$ мүстәвиси S сәтһини бир AM_0B әjриси



Шәкил 227



Шәкил 228

үзрә кәсир (шәкил 227). Бу әjринин тәнлиjи исә x дәjишәниндән асылы олан $z = f(x, y_0)$ функсиjасы (икинчи дәjишән геjд олунмушдур) олар. Бирдәjишәнли $z = f(x, y_0)$ функсиjасынын x_0 нөгтәсиндә төрәмәси, AM_0B әjрисинә $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын абсис охунун мүсбәт истигамәти илә әмәлә кәтирдиjи α буҹағынын тангенсинә бәрабәрдир (XIV, § 2). Бурадан $f'_x(x_0, y_0)$ хүсуси төрәмәсинин һәндәси мә'насы алыныр:

$$z'_x\big|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (4)$$

$f'_y(x_0, y_0)$ хүсуси төрәмәсинин һәндәси мә'насыны да еjни үсулла изаһ етмәк олар (шәкил 228):

$$f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta.$$

Бирдәjишәнли функсиjанын диференсиалына аналожи олараг (XV, § 2), чохдәjишәнли функсиjанын да һәр бир аргументинә нәзәрән хүсуси диференсиалыны тә'jин етмәк олар.

Тә'риф 2. f функсиjасынын x_i аргументинә нәзәрән $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ хүсуси төрәмәси илә аргументин dx_i диференсиалы һасилинә һәмин функсиjанын x_i аргументинә нәзәрән хүсуси диференсиалы дejилир вә

$$d_{x_i} f = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} dx_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5)$$

кими ишарә олунур.

(5) ифадәси x_i аргументинин dx_i диференсиалына нәзәрән хәтти функсиjадыр.

Хүсуси һалда, $n = 1$ олдугда функсиjанын хүсуси төрәмәсинин вә хүсуси диференсиалынын тә'рифи бирдәjишәнли функсиjанын төрәмәсинин (XIV, § 1) вә диференсиалынын (XV, § 2) уjғун тә'рифи илә үст-үстә дүшүр.

§ 2. ФУНКСИJАНЫН НӨГТӘДӘ ДИФЕРЕНСИАЛЛАНАН ОЛМАСЫ

Верилмиш $\sigma \subset E_2$ областында тә'jин олунмуш икидәjишәнли f функсиjасына бахаг.

Фәрз едәк ки, (x, y) бу областын һәр һансы нөгтәсидир вә x, y дәjишәнләри уjғун олараг елә Δx вә Δy артымлары алыр ки, $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ нөгтәси jенә дә һәмин областа дахил олур. Онда $W = f(x, y)$ функсиjасы

$$\Delta W = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \qquad (1)$$

артымыны алыр.

(1) ифадәсинә f функсиjасынын (x, y) нөгтәсиндә артымы (вә jа там артымы) дejилир.

Тә'риф 1. f функсиjасынын (x, y) нөгтәсиндә артымыны

$$\Delta W = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \qquad (2)$$

шәклиндә көстәрмәк мүмкүн олдугда, она һәмин нөгтәдә диференсиалланан (вә jа диференсиаллана билән) функсиjа дejилир. Бурада $A = A(x, y)$ вә $B = B(x, y)$ аргументләрин Δx вә Δy артымларындан асылы олмаjан кәмиjjәтләр, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ вә $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ исә $(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$ шәртиндә сонсуз кичилән функсиjалардыр:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0. \qquad (3)$$

(2) бәрабәрлиjини башга еквивалент шәкилдә дә jазмаг олар. Бу мәгсәдлә (x, y) вә $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ нөгтәләри арасындакы мәсафәни ρ илә ишарә едәк: $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Аjдындыр ки, $(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$ вә $\rho \to 0$ шәртләри еквивалентдир. Онда (3) бәрабәрликләрини өдәjән α вә β үчүн

$$\varepsilon = \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho}, \quad \rho \neq 0 \qquad (4)$$

кәмиjjәти $\rho\to 0$ (вә ja $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$) шәртиндә сонсуз кичилән олар. Доғрудан да, $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant 1$ вә $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1$ олдуғундан

$$|\varepsilon| = \left|\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant |\alpha|\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| + |\beta|\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant |\alpha|+|\beta|$$

мүнасибәти вә (3) бәрабәрликләринә әсасән тәләб олунан

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon = 0 \qquad (5)$$

бәрабәрлиjи алыныр. (4) бәрабәрлиjини ашағыдакы кими jазаг:

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \varepsilon\rho. \qquad (6)$$

Буну нәзәрә алсаг, (2) бәрабәрлиjини

$$\Delta W = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho \qquad (7)$$

кими jазмаг олар.

Демәли, (2)→(7). Бунун тәрси дә, jә'ни (7)→(2) тәклифи дә доғрудур.

Буну исбат етмәк үчүн (7) бәрабәрлиjиндәки $\varepsilon\rho$ кәмиjjәтини ашағыдакы шәкилдә көстәрәк:

$$\varepsilon\rho = \frac{\varepsilon\rho^2}{\rho} = \frac{\varepsilon[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{\rho} = \frac{\varepsilon\cdot\Delta x}{\rho}\cdot\Delta x + \frac{\varepsilon\cdot\Delta y}{\rho}\cdot\Delta y.$$

Бурада $\alpha = \frac{\varepsilon\cdot\Delta x}{\rho}$ вә $\beta = \frac{\varepsilon\cdot\Delta y}{\rho}$ һесаб етсәк, онда

$$\varepsilon\rho = \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

бәрабәрлиjини аларыг. α вә β кәмиjjәтләри үчүн (3) бәрабәрликләри өдәнилир.

Доғрудан да,

$$|\alpha| = |\varepsilon|\cdot\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant |\varepsilon|, \quad |\beta| = |\varepsilon|\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant |\varepsilon|$$

бәрабәрсизликләринә вә (5) бәрабәрлиjинә көрә

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha = \lim_{\rho\to 0}\alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta = \lim_{\rho\to 0}\beta = 0$$

олар.

Демәли, верилмиш диференсиалланан f функсиjасы үчүн (2) вә (7) шәртләри еквивалентдир.

Бурадан, функсиjанын верилмиш нөгтәдә диференсиалланан олмасынын jени тә'рифи алыныр:

Тә'риф 1'. *f функсиjасынын (x, y) нөгтәсиндә артымыны (7) шәклиндә көстәрмәк мүмкүн олдуғда, она һәмин нөгтәдә диференсиалланан функсиjа деjилир.*

(7) бәрабәрлиjиндә иштирак едән ε кәмиjjәти үчүн (5) шәрти өдәнилир.

Аjдындыр ки, 1 вә 1' тә'рифләри еквивалентдир. (2) (вә һәм дә (7)) бәрабәрлиjи f функсиjасынын (x, y) нөгтәсиндә *диференсиалланма шәрти* адланыр. Функсиjанын нөгтәдә диференсиалланан олмасынын (7) шәртини

$$\Delta W = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \qquad (8)$$

кими дә jазмаг олар.

Мисал. $W = x^3 + 2x + y^2$ функсиjасы истәнилән (x, y) нөгтәсиндә диференсиалланандыр.

Доғрудан да, онун истәнилән (x, y) нөгтәсиндә артымы

$$\Delta W = (x+\Delta x)^3+2(x+\Delta x)+(y+\Delta y)^2-x^3-2x-y^2=$$
$$=(3x^2+2)\,\Delta x+2y\cdot\Delta y+[3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]\cdot\Delta x+\Delta y\cdot\Delta y$$

вә jа

$$\Delta W = (3x^2+2)\,\Delta x+2y\cdot\Delta y+[3x\Delta x+(\Delta x)^2]\,\Delta x+\Delta y\cdot\Delta y \qquad (9)$$

шәклиндә көстәрилир. Бу исә

$$A = 3x^2+2, \quad B = 2y, \quad \alpha = 3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2, \quad \beta = \Delta y$$

кәмиjjәтләри үчүн (2) бәрабәрлиjинин өдәнилмәси демәкдир.

Тә'риф 2. *σ областынын истәнилән нөгтәсиндә диференсиалланан функсиjаjа һәмин областда диференсиалланан функсиjа деjилир.*

Икидәjишәнли функсиjанын диференсиалланан олмасы һаггында jухарыда вердиjимиз тә'рифләр уjғун шәкилдә n-дәjишәнли ($n\geqslant 2$) функсиjалар үчүн дә доғрудур. n-дәjишәнли f функсиjасынын $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәсиндә диференсиалланма шәрти

$$\Delta W = A_1(X)\,\Delta x_1 + A_2(X)\,\Delta x_2 + \cdots + A_n(X)\,\Delta x_n + \varepsilon\rho \qquad (10)$$

кими jазылыр; бурада $\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\Delta x_k)^2}$ вә $\lim_{\rho\to 0}\varepsilon = 0$.

§ 3. ФУНКСИJАНЫН ДИФЕРЕНСИАЛЛАНАН ОЛМАСЫ ҮЧҮН ЗӘРУРИ ШӘРТЛӘР

Теорем 1. ***(x, y) нөгтәсиндә диференсиалланан f функсиjасы һәмин нөгтәдә кәсилмәjәндир.***

Исбаты. $W = f(x, y)$ функсиjасы (x, y) нөгтәсиндә диференсиалланан олдуғундан һәмин нөгтәдә онун артымы

$$\Delta W = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad \alpha\to 0, \quad \beta\to 0 \qquad (1)$$

шәклиндә көстәрилә билир (§ 2, (2)). Бурадан

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta W = 0,$$

алыныр ки, бу да функсиjанын (x, y) нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну көстәрир.

Нәтиҹә 1. Функсиjа кәсилдиjи нөгтәдә диференсиалланан ола билмәз.

Теорем 2. ***Верилмиш $(x,y)\in\sigma$ нөгтәсиндә диференсиалланан f функсиjасынын һәмин нөгтәдә сонлу $f'_x(x, y)$ вә $f'_y(x, y)$ хүсуси төрәмәләри вар.***

Исбаты. $W = f(x, y)$ функсиjасы (x, y) нөгтәсиндә диференсиалланан олдуғундан бу нөгтәдә онун артымы үчүн

(1) көстәрилиши доғрудур. Һәмин бәрабәрликдә $\Delta x \neq 0$ вә $\Delta y = 0$ һесаб етсәк

$$\Delta_x W = A\Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \quad \alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$$

олар. Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини Δx артымына бөләрәк $\Delta x \to 0$ шәртиндә лимитә кечәк:

$$\frac{\Delta_x W}{\Delta x} = A + \alpha, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x W}{\Delta x} = A.$$

Демәли, (x, y) нөгтәсиндә $W'_x = f'_x(x, y)$ хүсуси төрәмәси вар вә $A = f'_x(x, y)$ бәрабәрлији доғрудур.

Ејни гајда илә (x, y) нөгтәсиндә $f'_y(x, y)$ хүсуси төрәмәсинин варлығы вә $B = f'_y(x, y)$ бәрабәрлијинин доғрулуғу исбат олунур.

Нәтичә 2. Верилмиш (x, y) нөгтәсиндә диференсиалланан f функсијасынын һәмин нөгтәдә артымы

$$\Delta W = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon\rho, \quad \varepsilon \to 0 \ (\rho \to 0) \qquad (2)$$

шәклиндә көстәрилә биләр.

Нәтичә 3. f функсијасы $f'_x(x, y)$ вә $f'_y(x, y)$ хүсуси төрәмәләринин һеч олмаса биринин олмадығы нөгтәдә диференсиалланан дејилдир.

Гејд. Исбат етдијимиз теоремләрин тәрси доғру дејилдир: функсијанын верилмиш нөгтәдә кәсилмәз олмасындан вә һәм дә һәмин нөгтәдә сонлу f'_x вә f'_y хүсуси төрәмәләринин олмасындан онун һәмин нөгтәдә диференсиалланан олмасы чыхмыр.

Мәсәлән,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ олдугда} \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \text{ олдугда} \end{cases} \qquad (3)$$

шәклиндә тә'јин олунмуш f функсијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә кәсилмәјәндир вә һәмин нөгтәдә сонлу $f'_x(0, 0) = 0$ вә $f'_y(0, 0) = 0$ хүсуси төрәмәләри вар, лакин $(0, 0)$ нөгтәсиндә диференсиалланан дејилдир.

Доғрудан да, әкәр (3) функсијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә диференсиалланан олса, онда онун артымы үчүн (2) бәрабәрлији

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + \varepsilon\rho$$

вә ја $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ олдуғундан

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \varepsilon\rho \qquad (4)$$

мүнасибәти өдәнилмәлидир, бурада $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0$.

(4) бәрабәрлијиндә $\Delta x = \Delta y$ гәбул етсәк, онда

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \varepsilon\sqrt{2}\,|\Delta x|$$

мүнасибәтини вә бурадан исә $\varepsilon = \frac{1}{2}$ бәрабәрлијини аларыг. Бу нәтичә $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0$ олмасы шәртинә зиддир. Демәли, (3) функсијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә диференсиалланан дејилдир.

§ 4. ФУНКСИЈАНЫН ДИФЕРЕНСИАЛЫ

Фәрз едәк ки, икидәјишәнли f функсијасы $(x, y) \in \sigma$ нөгтәсиндә диференсиалланандыр. Онда һәмин нөгтәдә онун артымы

$$\Delta W = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon\rho, \quad \varepsilon \to 0 \ (\rho \to 0), \qquad (1)$$

шәклиндә көстәрилә билир (§ 3, нәтичә 2). Бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки биринчи ики һәддин чәми

$$f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \qquad (2)$$

Δx вә Δy артымларына нәзәрән хәттидир. $f'_x(x, y) \neq 0$ вә $f'_y(x, y) \neq 0$ олдугда исә (2) ифадәси функсијанын ΔW артымындан ρ кәмијјәтинә нәзәрән јүксәктәртибли сонсуз кичилән олан $\varepsilon\rho$ кәмијјәтилә фәргләнир ($\rho \to 0$ шәртиндә $\varepsilon \to 0$).

Бу һалда (2) ифадәси функсија артымынын баш һиссәси олур.

Тә'риф 1. *(x, y) нөгтәсиндә диференсиалланан f функсијасынын һәмин нөгтәдә артымынын (2) хәтти һиссәсинә онун (x, y) нөгтәсиндә диференсиалы (вә ја **там** диференсиалы) дејилир вә dW, јахуд $df(x, y)$ илә ишарә олунур:*

$$dW = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \qquad (3)$$

вә ја

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \qquad (4)$$

x вә y сәрбәст дәјишәнләринин Δx вә Δy артымлары онларын диференсиалы адланыр вә ујғун олараг dx вә dy илә ишарә олунур. Бу һалда, функсија диференсиалынын (3) ифадәси

$$dW = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy \qquad (5)$$

шәклини алар. Бу ифадәни f функсијасынын хүсуси диференсиаллары (§ 1) васитәсилә

$$dW = d_x f + d_y f \qquad (6)$$

кими јазмаг олар, јә'ни функсијанын там диференсиалы онун хүсуси диференсиалларынын чәминә бәрабәрдир.

n-дәјишәнли f функсијасынын $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәсиндә диференсиалы

$$dW = f'_{x_1}(X)\Delta x_1 + f'_{x_2}(X)\Delta x_2 + \cdots + f'_{x_n}(X)\Delta x_n \qquad (7)$$

ифадәси олар. Бу һалда да функсијанын артымы

$$\Delta W = dW + o(\rho) \quad (\rho \to 0)$$

вә ја

$$\Delta f(X) = df(X) + o(\rho)$$

шәклиндә көстәрилир вә функсијанын диференсиалы онун артымынын $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән (7) хәтти һиссәсинә дејилир.

Δx_i $(i = 1, \ldots, n)$ кәмијјәтләрини ујғун олараг dx_i $(i = 1, \ldots, n)$ илә (буна x_i сәрбәст дәјишәнинин диференсиалы

дејилир) ишарә етсәк, диференсиалын (7) ифадәсини

$$dW = f'_{x_1}(X)\,dx_1 + f'_{x_2}(X)\,dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(X)\,dx_n \qquad (8)$$

кими јазмаг олар.

Тә'рифдән ајдындыр ки, верилмиш нөгтәдә диференсиалланан функсијанын һәмин нөгтәдә диференсиалы (вә ја там диференсиалы) вардыр. Функсијанын диференсиалланан олдуғу нөгтәдә онун сонлу хүсуси төрәмәләринин олмасы да мә'лумдур (§ 3). Бунун тәрсинин доғру олмадығыны, јә'ни верилмиш нөгтәдә сонлу хүсуси төрәмәләрин варлығындан функсијанын һәмин нөгтәдә диференсиалланан олмасынын чыхмадығыны әввәлки параграфын сонунда көстәрмишик. Бурадан ајдындыр ки, функсијанын сонлу хүсуси төрәмәләри васитәсилә дүзәлдилмиш (3) вә ја (5) ифадәси функсијанын диференсиалы олмаја да биләр.

Функсијанын верилмиш нөгтәдә диференсиалы олмасы үчүн һәмин нөгтәдә о, диференсиалланан олмалыдыр.

Функсијанын верилмиш нөгтәдә диференсиалланан олмасы үчүн кафи шәрти ашағыдакы теорем шәклиндә сөјләмәк олар.

Теорем. ***f* функсијасынын (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән әтрафында $f'_x(x, y)$ вә $f'_y(x, y)$ хүсуси төрәмәләри варса вә бу хүсуси төрәмәләр һәмин нөгтәдә кәсилмәјәндирсә, онда *f* функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсиндә диференсиалланандыр.**

Исбаты. $X_0 = (x_0, y_0)$ нөгтәсинин теоремдә көстәрилән δ-әтрафыны $O_\delta(X_0)$ илә ишарә едәк. x вә y дәјишәнләринә (x_0, y_0) нөгтәсиндә ујғун олараг елә Δx вә Δy артымлары верәк ки, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нөгтәси јенә дә һәмин әтрафа дахил олсун. Онда f функсијасынын там артымыны

$$\Delta W = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

шәклиндә јазараг, сағ тәрәфдәки мө'тәризәләрин һәр биринә Лагранжын бирдәјишәнли функсијалар һаггындакы теоремини (XIV, § 2) тәтбиг етсәк,

$$\Delta W = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\,\Delta y \qquad (9)$$

аларыг $(0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1)$. Хүсуси төрәмәләр (x_0, y_0) нөгтәсиндә кәсилмәјән олдуғундан

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha_1$$

вә

$$f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \alpha_2$$

олар; бурада $\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha_1 = 0$ вә $\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha_2 = 0$.

Бу гијмәтләри (9) бәрабәрлијиндә јеринә јаздыгда

$$\Delta W = f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$$

көстәрилиши алынар ки, бу да f функсијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә диференсиалланан олдуғуну көстәрир.

Нәтиҹә. Верилмиш нөгтәдә кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри олан функсија һәмин нөгтәдә кәсилмәјәндир.

Гејд едәк ки, функсијанын верилмиш нөгтәдә диференсиалланан олмасы үчүн онун хүсуси төрәмәләринин һәмин нөгтәдә кәсилмәз олмасы кафи шәрт олдуғу һалда зәрури дејилдир. Функсијанын диференсиалланан олдуғу нөгтәдә хүсуси төрәмәләри кәсилән дә ола биләр.

Мисал.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{(1+\alpha)/2} & (\alpha>0), \text{ расионал нөгтәләрдә},\\ 0 & , \text{ јердә галан нөгтәләрдә} \end{cases}$$

бәрабәрлијилә тә'јин олунан f функсијасы (0, 0) нөгтәсиндә диференсиалланандыр:

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) = 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + \rho^{1+\alpha};$$

бурада

$$\rho^{1+\alpha} = o(\rho) \quad (\rho\to 0).$$

Һәмин функсија (0, 0) нөгтәсиндән фәргли олан бүтүн нөгтәләрдә кәсиләндир вә

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0.$$

Демәли, f функсијасы (0, 0) нөгтәсиндә диференсиалланандыр, лакин һәмин нөгтәдә кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри јохдур.

Тә'риф 2. Верилмиш областда (вә ја нөгтәдә) кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри олан функсијаја һәмин областда (нөгтәдә) кәсилмәз диференсиалланан функсија дејилир.

Ајдындыр ки, функсијанын нөгтәдә диференсиалланан олмасы һәмин нөгтәдә хүсуси төрәмәләринин олмасы шәртиндән күчлү (ағыр), кәсилмәз диференсиалланан олмасы шәртиндән исә зәифдир.

§ 5. ФУНКСИЈА ДИФЕРЕНСИАЛЫНЫН ҺӘНДӘСИ МӘ'НАСЫ

Фәрз едәк ки, икидәјишәнли f функсијасы σ областында тә'јин олунмуш, кәсилмәјән вә областын $X_0 = (x_0, y_0) \in \sigma$ нөгтәсиндә диференсиалланан функсијадыр. X_0 нөгтәсинә f функсијасынын графики үзәриндә ујғун олан нөгтә

$$M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

олсун.

Функсија X_0 нөгтәсиндә диференсиалланан олдуғундан

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0) + \varepsilon\rho$$

вә ја

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0) + o(\rho) \qquad (1)$$

$$(z = f(x, y) \text{ вә } z_0 = f(x_0, y_0))$$

мүнасибәти доғру олар. Бурада $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ вә $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon = 0$.

Ајдындыр ки, тәнлији

$$Z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0) \qquad (2)$$

олан мүстәви f функсијасынын графики үзәриндә олан M_0 нөгтәсиндән кечир вә Oz охуна парaлел дејилдир. (1) вә (2) мүнасибәтләриндән ајдындыр ки, $\rho \to 0$ шәртиндә $z-Z$ фәрги ($z = f(x, y)$ функсијасынын гијмәти илә (2) мүстәвисинин ујғун нөгтәси аппликатынын фәрги) сыфра јахынлашыр.

Тә'риф. *$z-Z$ фәрги $\rho \to 0$ шәртиндә ρ кәмијјәтинә нәзәрән јүксәктәртибли сонсуз кичилән кәмијјәт олдуғда, (2) мүстәвисинә f функсијасынын графики олан сәтһә M_0 нөгтәсиндә тохунан мүстәви дејилир.*

(1) вә (2) мүнасибәтләринә әсасән $\rho \to 0$ шәртиндә

$$z - Z = o(\rho)$$

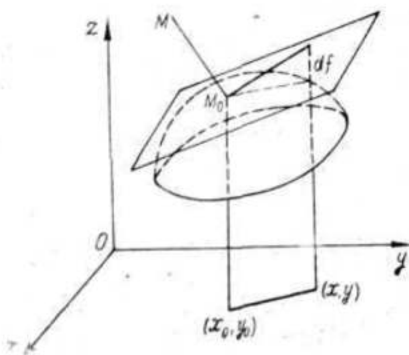
олмасы көстәрир ки, (2) мүстәвиси f функсијасынын графики олан сәтһә $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсиндә тохунан мүстәвидир.

Демәли, f функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсиндә диференсиалланан олдуғда тәнлији $z = f(x, y)$ олан сәтһин ујғун $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ нөгтәсиндә Oz охуна паралел олмајан тохунан мүстәвиси вар. Бу тохунан мүстәви јеканәдир вә о, (2) тәнлији илә тә'јин олунур.

Бу тәклифин тәрси дә доғрудур: f функсијасынын графики олан сәтһин $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ нөгтәсиндә Oz охуна паралел олмајан тохунан мүстәвиси варса, онда һәмин функсија (x_0, y_0) нөгтәсиндә диференсиалланандыр.

$x - x_0 = \Delta x$ вә $y - y_0 = \Delta y$ илә ишарә етсәк, (2) бәрабәрлијини

$$Z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$$



Шәкил 229

кими јазмаг олар. Бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки ифадә f функсијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә диференсиалыдыр:

$$Z - z_0 = df(x_0, y_0). \qquad (3)$$

Бурадан икидәјишәнли f функсијасы диференсиалынын һәндәси мә'насы алыныр: f функсијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә диференсиалы (вә ја там диференсиалы), һәмин функсија графикинә (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә чәкилмиш тохунан мүстәви аппликатынын артымына бәрабәрдир (шәкил 229).

Сәтһин тохунан мүстәвисинә M_0 тохунма нөгтәсиндә перпендикулјар олан M_0M дүз хәттинә һәмин сәтһин M_0 нөгтәсиндә нормалы дејилир. Сәтһин $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсиндә тохунан мүстәвиси вә нормалы перпендикулјар олдуғундан нормал дүз хәттин бучаг әмсаллары (2) тохунан мүстәвисинин ујғун

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad -1$$

әмсаллары илә мүтәнасиб олмалыдыр (VII, § 7). Бурадан $z = f(x, y)$ сәтһинә (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә чәкилмиш нормалын тәнлији алыныр:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (4)$$

Демәли, f функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсиндә диференсиалланан олдуғда $z = f(x, y)$ сәтһинин ујғун (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә нормалы да вар вә онун тәнлији (4) шәклиндә јазылыр.

Мисал. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ јарымсферасына $(1, 2, 2\sqrt{5})$ нөгтәсиндә тохунан мүстәвинин вә нормалын тәнлијини јазмалы.

Верилмиш функсијанын

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \text{ вә } z'_y = -\frac{y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

хүсуси төрәмәләри (1, 2) нөгтәсиндә вә онун әтрафында кәсилмәјән олдуғундан һәмин нөгтәдә $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ функсијасы диференсиаллананды р.

Буна көрә дә сәтһин $(1, 2, 2\sqrt{5})$ нөгтәсиндә тохунан мүстәвиси вә нормалы вар.

$$z'_x(1, 2) = -\frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{вә} \quad z'_y(1, 2) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

олдуғундан $(1, 2, 2\sqrt{5})$ нөгтәсиндә тохунан мүстәвинин тәнлији

$$z - 2\sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{10}(x - 1) - \frac{\sqrt{5}}{5}(y - 2),$$

һәмин нөгтәдә сәтһин нормалынын тәнлији исә

$$\frac{x-1}{-\frac{\sqrt{5}}{10}} = \frac{y-2}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{z - 2\sqrt{5}}{-1}$$

вә ја

$$\frac{x-1}{\sqrt{5}} = \frac{y-2}{2\sqrt{5}} = \frac{z - 2\sqrt{5}}{10}$$

олар.

Гејд едәк ки, n-дәјишәнли f функсијасынын верилмиш нөгтәдә диференсиалланан олмасы илә $W = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

сәтһинә тохунан мүстәвинин вә нормалын варлығы һаггында да јухарыда дедијимиз кими тәклиф доғрудур. Бу һалда сәтһин тохунан мүстәвисинин вә нормалынын тәнлији (2) вә (4) мүнасибәтләринә охшар шәкилдә јазылыр.

§ 6. МҮРӘККӘБ ФУНКСИЈАНЫН ТӨРӘМӘСИ

Фәрз едәк ки, $x=x(U, V)$ вә $y=y(U, V)$ функсијалары (U, V) нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмушдур вә һәмин нөгтәдә

$$\frac{\partial x}{\partial U}, \quad \frac{\partial x}{\partial V}, \quad \frac{\partial y}{\partial U}, \quad \frac{\partial y}{\partial V}$$

хүсуси төрәмәләри вар.

Бундан башга, $W=f(x, y)$ функсијасы (x, y) нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмушдур вә (U, V) нөгтәсинин көстәрилән әтрафында $W=f[x(U, V), y(U, V)]$ суперпозисијасынын мә'насы вар.

Бу һалда, әкәр $f(x, y)$ функсијасы (x, y) нөгтәсиндә диференсиалланандырса, онда мүрәккәб

$$W=f[x(U, V), y(U, V)]=F(U, V)$$

функсијасынын (U, V) нөгтәсиндә сонлу $\frac{\partial W}{\partial U}$ вә $\frac{\partial W}{\partial V}$ хүсуси төрәмәләри вар вә онлар

$$\frac{\partial W}{\partial U}=\frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial U}+\frac{\partial W}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial U}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial V}=\frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial V}+\frac{\partial W}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial V} \tag{2}$$

дүстурлары васитәсилә һесабланыр.

$\frac{\partial W}{\partial U}$ хүсуси төрәмәсинин варлығы вә (1) дүстурунун доғрулуғуну исбат етмәк үчүн U дәјишәнинә ΔU артымы верәк (V дәјишәнинин гијмәтини сабит сахлајырыг). Онда x вә y дәјишәнләри ујғун олараг

$$\Delta_U x = x(U+\Delta U, V)-x(U, V)$$

вә

$$\Delta_U y = y(U+\Delta U, V)-y(U, V)$$

артымларыны алар. Бу артымлара f-ин там артымы, $F(U, V)$-нин исә U-ја нәзәрән хүсуси артымы ујғун олар:

$$\Delta W=\Delta f(x, y)=\Delta_U F(U, V).$$

f функсијасы (x, y) нөгтәсиндә диференсиалланан олдуғундан онун там артымы үчүн

$$\Delta W=\frac{\partial W}{\partial x}\Delta_U x+\frac{\partial W}{\partial y}\Delta_U y+\alpha\cdot\Delta_U x+\beta\cdot\Delta_U y \tag{3}$$

көстәрилиши доғрудур. Бурада

$$\alpha\to 0\ (\Delta_U x\to 0,\ \Delta_U y\to 0)\ \text{вә}\ \beta\to 0\ (\Delta_U x\to 0,\ \Delta_U y\to 0).$$

Ајдындыр ки, $\Delta U\to 0$ шәртиндә $\Delta_U x\to 0$ вә $\Delta_U y\to 0$ олур. Демәли,

$$\lim_{\Delta U\to 0}\alpha=\lim_{\Delta U\to 0}\beta=0. \tag{4}$$

Инди (3) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини ΔU артымына бөләрәк, алынан бәрабәрликдә $\Delta U\to 0$ шәртиндә лимитә кечсәк вә (4) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг, онда

$$\lim_{\Delta U\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta U}=\lim_{\Delta U\to 0}\frac{\Delta_U F(U, V)}{\Delta U}=\frac{\partial W}{\partial x}\lim_{\Delta U\to 0}\frac{\Delta_U x}{\Delta U}+\frac{\partial W}{\partial y}\lim_{\Delta U\to 0}\frac{\Delta_U y}{\Delta U}=\frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial U}+\frac{\partial W}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial U}$$

вә ја

$$\frac{\partial W}{\partial U}=\frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial U}+\frac{\partial W}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial U} \tag{1}$$

олар. (2) бәрабәрлијинин доғрулуғу да ејни гајда илә исбат олунур.

Үмуми һалда,

$$W=f(x_1, x_2, \dots, x_n)=$$
$$=f[x_1(t_1, \dots, t_m), x_2(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)]$$

мүрәккәб функсијасынын $t_к$ аргументинә нәзәрән хүсуси төрәмәси

$$\frac{\partial W}{\partial t_к}=\frac{\partial W}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_к}+\frac{\partial W}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_к}+\dots+\frac{\partial W}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_к} \tag{5}$$

$$(к=1, 2, \dots, m)$$

дүстуру илә һесабланыр. (5) дүстуру јухарыда апардығымыз мүһакимә илә исбат олунур.

Бурада бир хүсуси һала бахаг.

Тутаг ки, $W=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вә $x_2=x_2(x_1)$, $x_3=x_3(x_1)$, ..., $x_n=x_n(x_1)$. Онда $W=f[x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1)]=F(x_1)$ мүрәккәб функсијасы анчаг бир x_1 сәрбәст дәјишәнинин функсијасы олар. Бу һалда, (5) дүстуруна көрә

$$\frac{dW}{dx_1}=\frac{\partial W}{\partial x_1}+\frac{\partial W}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}+\dots+\frac{\partial W}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dx_1} \tag{6}$$

аларыг. Хүсуси һалда, $W=f(x, y)$ вә $y=y(x)$ олса, онда $W=f[x, y(x)]$ вә (6) дүстуруна көрә

$$\frac{dW}{dx}=\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \tag{7}$$

олар.

Гејд едәк ки, (6) дүстурунун һәр ики тәрәфиндә W дәјишәнинин x_1 аргументинә нәзәрән төрәмәси иштирак едир. Бу төрәмәләрин мә'насы исә мүхтәлифдир. Сағ тәрәфдә W-нин x_1-ә нәзәрән хүсуси $\frac{\partial W}{\partial x_1}$ төрәмәси иштирак едир (бу төрәмәни һесабларкән јердә галан аргументләри сабит һесаб едирләр, онларын x_1-дән асылылығы нәзәрә алынмыр). W-нин x_1-ә

нәзәрән сол тәрәфдә иштирак едән $\frac{dW}{dx_1}$ төрәмәсини һесабладыгда исә W-нин x_1-дән һәм билаваситә асылылығы вә һәм дә башга аргументләр васитәсилә асылылығы тамамилә нәзәрә алыныр.

Буна көрә дә $\frac{dW}{dx_1}$ төрәмәсинә W-нин x_1 дәјишәнинә нәзәрән *там төрәмәси*, (6) (вә һәм дә (7)) дүстуруна исә *там төрәмә дүстуру* дејилир.

Мисал. $W = x^2+x^3y+y^2$, $x=e^{2t}$, $y = \sin 3t$ олдугда функсијанын t-јә нәзәрән төрәмәсини һесабламалы. Ајдындыр ки,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2x+3x^2y, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = x^3+2y,$$

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t}, \quad \frac{dy}{dt} = 3\cos 3t$$

олар. Онда W-нин t-јә нәзәрән төрәмәсини (1) дүстуру илә һесабламаг олар:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = (2x+3x^2y)\,2e^{2t} + (x^3+2y)\,3\cos 3t = \left(2e^{2t}+3e^{4t}\sin 3t\right)2e^{2t} + 3\left(e^{6t}+2\sin 3t\right)\cos 3t.$$

§ 7. ДИФЕРЕНСИАЛ ШӘКЛИНИН ИНВАРИАНТЛЫҒЫ

Тә'рифә көрә диференсиалланан $W=f(x, y)$ функсијасы артымынын хәтти һиссәсинә онун диференсиалы дејилир вә

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial W}{\partial y}\Delta y \qquad (1)$$

кими ишарә олунур (§ 4). x вә y сәрбәст дәјишәнләринин Δx вә Δy артымларыны ујғун олараг dx вә dy илә әвәз етдикдә f функсијасынын (1) диференсиалы

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy \qquad (2)$$

шәклиндә јазылыр.

Инди, фәрз едәк ки, $f(x, y)$ функсијасынын x вә y аргументләри сәрбәст дәјишән олмајыб башга U вә V дәјишәнләринин диференсиалланан функсијаларыдыр:

$$x = x(U, V), \quad y = y(U, V).$$

Бу һалда, $W = f[x(U, V), y(U, V)]$ мүрәккәб функсијасынын диференсиалы

$$dW = \frac{\partial W}{\partial U}dU + \frac{\partial W}{\partial V}dV \qquad (3)$$

шәклиндә олар. Мүрәккәб функсијанын хүсуси төрәмәләринин

$$\frac{\partial W}{\partial U} = \frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial W}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial U},$$

$$\frac{\partial W}{\partial V} = \frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial W}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial V}$$

ифадәләрини (§ 6, (1), (2)) (3) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг,

$$dW = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial W}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial U}\right)dU + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial W}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial V}\right)dV$$

вә ја

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial U}dU + \frac{\partial x}{\partial V}dV\right) + \frac{\partial W}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial U}dU + \frac{\partial y}{\partial V}dV\right) \qquad (4)$$

бәрабәрлијини аларыг. Сағ тәрәфдәки мө'тәризәләр ичәрисиндәки ифадәләр $x=x(U, V)$ вә $y=y(U, V)$ функсијаларынын диференсиалларыдыр:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial U}dU + \frac{\partial x}{\partial V}dV, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial U}dU + \frac{\partial y}{\partial V}dV.$$

Буну нәзәрә алдыгда (4) бәрабәрлији

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}\cdot dy$$

кими јазылар.

Демәли, $W=f(x, y)$ функсијасынын x вә y аргументләри сәрбәст дәјишәнләр олдугда да, башга јени U вә V дәјишәнләринин функсијалары олдугда да онун диференсиалы һәмишә (2) шәклиндә олур.

Буна диференсиалын (2) шәклинин *инвариантлығы* (дәјишмәзлији) дејилир.

Функсија диференсиалынын (1) шәкли исә инвариант дејилдир. x вә y аргументләри сәрбәст дәјишән олдугда онларын артымлары диференсиалларына бәрабәрдир, лакин башга U вә V дәјишәнләринин функсијасы олдугда исә онларын артымлары, үмумијјәтлә диференсиалларына бәрабәр олмур:

$$\Delta x \neq dx, \quad \Delta y \neq dy.$$

n-дәјишәнли ($n \geqslant 3$) f функсијасы диференсиалынын

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

формасы да инвариантдыр. Бу тәклиф јухарыда апардығымыз мүһакимә илә асанлыгла исбат олунур.

Функсија диференсиалынын тә'рифинә вә формасынын инвариант олмасына әсасланараг исбат етмәк олар ки, бирдәјишәнли функсијаларын диференсиаллары һаггында мә'лум олан тәклифләр чохдәјишәнли функсијалар үчүн дә доғрудур. Мәсәлән,

$$d(Cf) = Cdf, \quad d(f\cdot\varphi) = \varphi\cdot df + f\cdot d\varphi,$$

$$d(f\pm\varphi) = df \pm d\varphi, \quad d\left(\frac{f}{\varphi}\right) = \frac{\varphi\, df - f\, d\varphi}{\varphi^2}. \qquad (5)$$

Бурадан ајдындыр ки, $f(t)$ диференсиалланан вә t чохдәјишәнли диференсиалланан функсија олдугда

$$df(t)=f'(t)\,dt \qquad (6)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Мисал. $W=\ln(2+x^2+y^3)$ функсијасынын диференсиалыны вә хүсуси төрәмәләрини тапмалы.

(5) (үчүнчү дүстур) вә (6) дүстурларына көрә

$$dW=\frac{1}{2+x^2+y^3}\,d\,(2+x^2+y^3)=\frac{2xdx+3y^2dy}{2+x^2+y^3}$$

мүнасибәти вә бурадан

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{2x}{2+x^2+y^3} \quad \text{вә} \quad \frac{\partial W}{\partial y}=\frac{3y^2}{2+x^2+y^3}$$

бәрабәрликләри ајдындыр.

§ 8. ЈҮКСӘКТӘРТИБЛИ ХҮСУСИ ТӨРӘМӘЛӘР

Әввәлчә σ областында тә'јин олунмуш икидәјишәнли $W=f(x, y)$ функсијасынын јүксәктәртибли хүсуси төрәмәләрини тә'јин едәк.

Ајдындыр ки, икидәјишәнли $W=f(x, y)$ функсијасынын $f'_x(x, y)$ вә $f'_y(x, y)$ хүсуси төрәмәләри дә x вә y дәјишәнләринин функсијаларыдыр. Буна көрә онларын да хүсуси төрәмәләриндән данышмаг олар.

$f(x, y)$ функсијасынын биртәртибли $f'_x(x, y)$ вә $f'_y(x, y)$ хүсуси төрәмәләринин x вә y аргументләринә нәзәрән төрәмәләринә f функсијасынын икитәртибли хүсуси төрәмәләри дејилир вә

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}(x, y)$ (ардычыл олараг ики дәфә x-ә нәзәрән төрәмә алыныр),

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}(x, y)$ (әввәлчә x-ә нәзәрән, сонра исә y-ә нәзәрән төрәмә алыныр),

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}(x, y)$ (әввәлчә y-ә нәзәрән, сонра исә x-ә нәзәрән төрәмә алыныр),

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}(x, y)$ (ардычыл олараг y-ә нәзәрән ики дәфә төрәмә алыныр)

кими ишарә олунур.

Функсијанын икитәртибли хүсуси төрәмәләринин x вә y аргументләринә нәзәрән төрәмәләринә онун үчтәртибли хүсуси төрәмәләри дејилир вә

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2},\ \ldots$$

кими ишарә олунур. Функсијанын $(m-1)$-тәртибли хүсуси төрәмәсинин төрәмәси онун m-тәртибли хүсуси төрәмәси олар. Верилмиш функсијанын әввәлчә κ дәфә ардычыл олараг x-ә нәзәрән, сонра исә $(m-\kappa)$ дәфә y-ә нәзәрән төрәмәси һесабландыгда онун m-тәртибли $\frac{\partial^m f}{\partial x^k\,\partial y^{m-k}}$ хүсуси төрәмәси алынар.

Еіни гајда илә n-дәјишәнли $W=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасынын биртәртибли $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, икитәртибли $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_i}$, үчтәртибли $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\,\partial x_i\,\partial x_j}$ $(\kappa,\ i,\ j=1, 2, \ldots, n)$ вә с. хүсуси төрәмәләриндән данышмаг олар.

Верилмиш функсијанын мүхтәлиф аргументләринә нәзәрән алынмыш јүксәктәртибли төрәмәләринә онун гарышыг хүсуси төрәмәләри дејилир. Икидәјишәнли $f(x, y)$ функсијасынын ики дәнә икитәртибли $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ вә $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ гарышыг хүсуси төрәмәләри вар.

Мисал. $W=x^2e^{xy}$ функсијасынын икитәртибли хүсуси төрәмәләрини һесабламалы.

$$\frac{\partial W}{\partial x}=2xe^{xy}+yx^2e^{xy} \quad \text{вә} \quad \frac{\partial W}{\partial y}=x^3e^{xy}$$

олдуғундан

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=2e^{xy}+4yxe^{xy}+y^2x^2e^{xy},\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}=3x^2e^{xy}+yx^3e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial x}=3x^2e^{xy}+yx^3e^{xy},\quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=x^4e^{xy}$$

олар.

Бурадан көрүнүр ки, $W=x^2e^{xy}$ функсијасынын икитәртибли гарышыг хүсуси төрәмәләри бәрабәрдир:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial x}=3x^2e^{xy}+yx^3e^{xy}.$$

Бунунла әлагәдар олараг белә бир суал гаршыја чыхыр: чохдәјишәнли функсијанын мүхтәлиф аргументләрә нәзәрән диференсиалланмасынын нәтичәси диференсиалланманын нөвбәсиндән асылыдырмы? Бу һагда ашағыдакы теореми исбат едәк.

Т е о р е м (Шварс). *(x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән әтрафында $W=f(x, y)$ функсијасынын икитәртибли гарышыг хүсуси төрәмәләри $f''_{xy}(x, y)$ вә $f''_{yx}(x, y)$ варса вә (x_0, y_0) нөгтәсиндә кәсилмәзләндирсә, онда һәмин нөгтәдә онлар бир-биринә бәрабәрдир:*

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0). \qquad (1)$$

И с б а т ы. Аргументләрә елә Δx вә Δy артымлары верәк ки, $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ нөгтәси (x_0, y_0) нөгтәсинин теоремдә көстәрилән әтрафына дахил олсун. Бу һалда

$$A=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,\ y_0)-$$
$$-f(x_0,\ y_0+\Delta y)+f(x_0, y_0) \qquad (2)$$

407—11

ифадәсини $\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)$ функсиjасы васитәсилә

$$A = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) \tag{3}$$

кими јазмаг олар. (3) фәргинә Лагранжын сонлу артым һаггындакы теоремини тәтбиг етсәк,

$$A = \varphi'(x_0+\theta_1 \Delta x)\Delta x, \quad 0<\theta_1<1$$

вә ја

$$A = [f'_x(x_0+\theta_1 \Delta x,\ y_0+\Delta y) - f'_x(x_0+\theta_1 \Delta x,\ y_0)]\,\Delta x \tag{4}$$

бәрабәрлијини аларыг. (4) фәргинә исә y дәјишәнинә нәзәрән Лагранж теоремини тәтбиг етмәк олар:

$$A = f''_{xy}(x_0+\theta_1 \Delta x,\ y_0+\theta_2 \Delta y)\,\Delta x\cdot\Delta y, \quad 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1. \tag{5}$$

(2) ифадәси үзәриндә апардығымыз әмәлијјаты әввәлчә y, сонра исә x дәјишәнинә нәзәрән апарсаг, онда

$$A = f''_{yx}(x_0+\theta_3 \Delta x,\ y_0+\theta_4 \Delta y)\,\Delta x\cdot\Delta y, \quad 0<\theta_3<1,\ 0<\theta_4<1 \tag{6}$$

алынар. (5) вә (6) бәрабәрликләринә әсасән

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 \Delta x,\ y_0+\theta_2 \Delta y) = f''_{yx}(x_0+\theta_3 \Delta x,\ y_0+\theta_4 \Delta y)$$

олар. Бу бәрабәрликдә $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ шәртиндә лимитә кечсәк вә икитәртибли гарышыг хүсуси төрәмәләрин (x_0, y_0) нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

алынар.

Нәтичә 1. $f(x, y)$ функсијасынын икитәртибли гарышыг хүсуси төрәмәләри σ областында кәсилмәјәндирсә, онда һәмин областда

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) \tag{7}$$

олар, јә'ни мүхтәлиф аргументләрә нәзәрән ардычыл дифеоенсиалламанын нәтичәси диференсиалламанын нөвбәсиндән асылы дејилдир.

Нәтичә 2. $f(x, y)$ функсијасынын σ областында n тәртибә гәдәр бүтүн хүсуси төрәмәләри варса вә һәмин областда кәсилмәјәндирсә, онда онун m-n әртибли ($m<n$) гарышыг хүсуси төрәмәләринин гијмәти мүхтәлиф аргументләрә нәзәрән ардычыл диференсиалламанын нөвбәсиндән асылы дејилдир:

$$\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^k\,\partial y^{m-k}} = \frac{\partial^m f(x, y)}{\partial y^{m-k}\,\partial x^k}. \tag{8}$$

Белә тәклифләр истәнилән сајда дәјишәнин функсијасы үчүн дә доғрудур.

Гејд. Икидәјишәнли функсијанын икитәртибли гарышыг хүсуси төрәмәләри үчүн теоремин шәртләри өдәнилмәдикдә (1) бәрабәрлији доғру олмаја да биләр. Доғрудан да,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \text{ олдугда,} \\ 0, & x^2+y^2=0 \text{ олдугда} \end{cases}$$

функсијасынын (0, 0) нөгтәсиндә $\varphi''_{xy}(0, 0)=1$ вә $\varphi''_{yx}(0, 0)=-1$ гарышыг хүсуси төрәмәләри вар, лакин онлар бир-биринә бәрабәр дејилдир: $\varphi''_{xy}(0, 0)\neq\varphi''_{yx}(0, 0)$. Бунун сәбәби $\varphi''_{xy}(x, y)$ вә $\varphi''_{yx}(x, y)$ гарышыг хүсуси төрәмәләринин (0, 0) нөгтәсиндә кәсилән олмасыдыр.

§ 9. ЈҮКСӘКТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛЛАР

Икидәјишәнли $W = f(x, y)$ функсијасынын бахылан областда икитәртибли кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олдугда, онун

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1}$$

диференсиалынын (буна функсијанын биртәртибли диференсиалы дејәчәјик) диференсиалындан данышмаг олар.

Функсија диференсиалынын диференсиалына һәмин функсијанын икитәртибли вә ја икинчи диференсиалы дејилир вә d^2f, d^2W, . . . вә с. илә ишарә олунур:

$$d^2f = d(df), \quad d^2W = d(dW).$$

Икитәртибли диференсиалы һесабламаг үчүн x вә y сәрбәст дәјишәнләринин dx вә dy диференсиалларынын сабит әдәдләр олдуғуну вә һәм дә биртәртибли вә икитәртибли диференсиаллар үчүн ејни олдуғуну гәбул едәк. Онда (1) бәрабәрлијинин сағ тәрәфи анчаг x вә y-дән асылы функсија олар. Диференсиалын тә'рифинә көрә

$$d^2f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = dx\cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) +$$

$$+ dy\cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}dy\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Икитәртибли хүсуси төрәмәләр кәсилмәз олдуғундан гарышыг хүсуси төрәмәләр бәрабәр олар (§ 8):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

Онда функсијанын икитәртибли диференсиалы үчүн

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \tag{2}$$

ифадәсини аларыг. Ејни гајда илә функсијанын үчтәртибли диференсиалыны да тә'јин етмәк олар:

$$d^3f = d(d^2f) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3. \tag{3}$$

Функсијанын ($n-1$)-тәртибли диференсиалынын диференсиалына һәмин функсијанын n-тәртибли диференсиалы дејилир вә d^nf, d^nW, . . . кими ишарә олунур: $d^nf = d\,(d^{n-1}f)$. Функсијанын n-тәртибли диференсиалы үчүн ријази индуксија үсулу васитәсилә

$$d^nf = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}dx^n + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + \\ + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}dy^n \qquad (4)$$

ифадәсини алмаг олар. Гејд едәк ки, функсија диференсиалларынын ифадәсини јаздыгда dx вә dy ифадәләрини мө'тәризәдә јазмырлар, $(dx)^k$ вә $(dy)^m$ әвәзинә уjғун олараг dx^k вә dy^m јазырлар. Функсија диференсиалынын (2), (3) вә (4) ифадәләри тапыларкән бу шәртләр нәзәрә алынмышдыр.

Функсијанын јүксәктәртибли диференсиалларыны гыса шәкилдә дә јазмаг олар. Бу мәгсәдлә, (2) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндән f-и формал олараг мө'тәризә кәнарына чыхарыб јердә галан ифадәни „икиһәдлинин формал квадраты“ шәклиндә јазаг:

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f. \qquad (5)$$

(3) вә (4) ифадәләрини дә ејни гајда илә

$$d^3f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f$$

вә

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f \qquad (6)$$

кими јазмаг олар. (6) дүстурунун мә'насы беләдир: әввәлчә мө'тәризәдәки икиһәдлинин гүввәти Нјутон биному дүстуру илә формал олараг ачылыр, алынан $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m$ гүввәтләри $\frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k\partial y^m}$ илә әвәз едилир. Сонра исә $\frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k\partial y^m}$ ифадәләри формал олараг f-ә „вурулур“:

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k\partial y^m}f = \frac{\partial^{k+m}f}{\partial x^k\partial y^m}.$$

(6) дүстуруну истәнилән сајда сәрбәст дәјишәнин функсијасы үчүн дә үмумиләшдирмәк олар. Бу һалда, $W=f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ функсијасынын n-тәртибли диференсиалы

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_N}dx_N\right)^n f \qquad (7)$$

шәклиндә јазылыр.

Гејд едәк ки, (6) вә һәм дә (7) дүстуруну алмаг үчүн апарылан мүһакимәләрдә функсија аргументләринин сәрбәст

дәјишән олдуғу нәзәрә алынмышдыр. Аргументләр сәрбәст дәјишән олдугда онларын диференсиалы сабит әдәдләр олур.

Функсијанын аргументләри сәрбәст дәјишән олмајыб башга дәјишәнләрин функсијасы олдугда онун јүксәктәртибли d^nf диференсиаллары ($n>2$), үмумијјәтлә, (6) вә ја (7) шәклиндә олмур.

Доғрудан да, икидәјишәнли $f(x, y)$ функсијасынын x вә y аргументләри башга јени t вә τ дәјишәнләринин функсијасы $x=x(t,\tau)$, $y=y(t,\tau)$ олдугда, онун јүксәктәртибли диференсиаллары (6) шәклиндә олмаз. Бу һалда, мәсәлән, функсијанын икитәртибли диференсиалы

$$d^2f = d\,(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}d\,(dx) + \right. \\ + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial f}{\partial y}d\,(dy) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f + \\ + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y \qquad (8)$$

шәклиндә олур. Бу исә (5) ифадәсиндән $\frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y$ һәдди илә фәргләнир.

Демәли, функсијанын јүксәктәртибли d^nf ($n\geqslant 2$) диференсиалынын (6) (вә ја (7)) шәкли инвариант дејилдир.

Хүсуси һалда, икидәјишәнли функсијанын x вә y дәјишәнләри јени t вә τ дәјишәнләриндән хәтти асылы, јә'ни

$$x = a_1t + b_1\tau + c_1, \quad y = a_2t + b_2\tau + c_2$$

оларса, онда $d^2x = d^3x = \cdots = d^nx = 0$, $d^2y = d^3y = \cdots = d^ny = 0$ олар вә (5) вә (8) ифадәләри үст-үстә дүшәр. Демәли, бу һалда икидәјишәнли f функсијасынын јүксәктәртибли диференсиаллары (6) шәклиндә олур, јә'ни бу һалда јүксәктәртибли диференсиалларын (6) шәкли инвариантдыр.

Бу тәклиф истәнилән сајда дәјишәнин функсијасы һаггында да доғрудур.

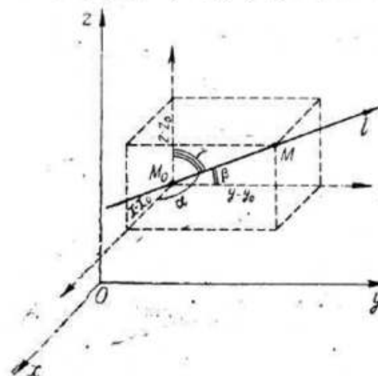
§ 10. ИСТИГАМӘТ ҮЗРӘ ТӨРӘМӘ

Фәрз едәк ки, $W=f(x, y, z)$ функсијасы $\sigma\subset E_3$ областында тә'јин олунмушдур вә $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ бу областын һәр һансы нөгтәсидир. M_0 нөгтәсиндән ваһид $\overline{l}$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) векторунун истигамәтиндә кечән l дүз хәттини көтүрәк (шәкил 230). Бурада α, β вә γ кәмијјәтләри ваһид $\overline{l}$ векторунун координат охларынын мүсбәт истигамәти илә әмәлә кәтирдији бучаглардыр. l дүз хәтти үзәриндә јерләшән ихтијари $M=(x, y, z)$ нөгтәсинин ($M\in\sigma$) тә'јин етдији истигамәтли $\overline{M_0M}$ парчасынын (векторунун) гијмәти (III, § 5) ρ олсун: $\rho=M_0M$. Онда

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \rho\cos\alpha, \\ y - y_0 &= \rho\cos\beta, \\ z - z_0 &= \rho\cos\gamma \end{aligned} \qquad (1)$$

аларыг. Бу һалда f функсијасы l дүз хәтти үзәриндә бир дәјишәнин мүрәккәб функсијасы олур:

$$f(x, y, z) = f(x_0 + \rho\cos\alpha, \quad y_0 + \rho\cos\beta, \quad z_0 + \rho\cos\gamma). \quad (2)$$



Шәкил 230

Әкәр (2) функсијасынын ρ дәјишәнинә көрә $\rho=0$ нөгтәсиндә төрәмәси варса, онда һәмин төрәмәјә f функсијасынын M_0 нөгтәсиндә верилмиш l истигамәти үзрә төрәмәси дејилир вә $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ $\left(\text{вә ја } \frac{\partial f}{\partial l}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}\right)$ кими ишарә олунур. Ајдындыр ки,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{\rho\to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \lim_{M\to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} \quad (3)$$

олар. Бу һалда $\Delta_l f = f(M) - f(M_0)$ фәрги f функсијасынын верилмиш l истигамәти үзрә артымы адланыр.

Хүсуси һалда, l дүз хәтти абсис оху илә үст-үстә дүшдүкдә $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$, ординат оху илә үст-үстә дүшдүкдә $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$ вә аппликат оху илә үст-үстә дүшдүкдә $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial z}$ олар. Демәли, истигамәт үзрә төрәмә хүсуси төрәмә анлајышынын үмумиләшмәсидир.

Тутаг ки, f функсијасы (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә диференсиалланандыр. Онда онун верилмиш истигамәт үзрә төрәмәсини мүрәккәб функсијанын диференсиалланмасы гајдасына (§6) әсасән тапмаг олар. (2) функсијасы үчүн

$$\frac{df(M_0)}{d\rho} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\rho} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\rho} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cdot\frac{dz}{d\rho}.$$

Тә'рифә көрә $\frac{df(M_0)}{d\rho} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ вә (1) бәрабәрликләринә әсасән

$$\frac{dx}{d\rho} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{d\rho} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{d\rho} = \cos\gamma$$

олдуғундан нәтиҹәдә

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma \quad (4)$$

бәрабәрлијини аларыг.

Беләликлә, ашағыдакы теорем исбат олунур:

Теорем. *Верилмиш (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә диференсиалланан f функсијасынын һәмин нөгтәдә истәнилән l истигамәти үзрә төрәмәси вар вә (4) дүстуру илә һесабланыр.*

Бурадан ајдындыр ки, функсија верилмиш нөгтәдә диференсиалланандырса вә хүсуси төрәмәләри мә'лумдурса, онда онун һәмин нөгтәдә истәнилән истигамәт үзрә төрәмәсини (4) дүстуру илә һесабламаг олар. Функсија диференсиалланан олмадыгда исә (4) дүстуруну тәтбиг етмәк олмаз.

Функсијанын верилмиш нөгтәдә диференсиалланан олмасы онун һәмин нөгтәдә истәнилән истигамәт үзрә төрәмәсинин варлығы үчүн кафи шәрт олдуғу һалда зәрури дејилдир. Функсијанын верилмиш нөгтәдә истәнилән истигамәт үзрә төрәмәсинин варлығындан һәмин нөгтәдә диференсиалланан олмасы чыхмыр.

Мисал. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функсијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә диференсиалланан дејилдир, лакин һәмин нөгтәдә истәнилән l истигамәти үзрә төрәмәси вар.

Функсијанын $(0, 0)$ нөгтәсиндә диференсиалланан олмамасы ајдындыр. Онун истәнилән l истигамәти үзрә төрәмәси belә һесабланыр:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial l} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\rho} = 1,$$

бурада $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ олдуғу нәзәрә алынмышдыр.

§ 11. ГРАДИЈЕНТ

Функсијанын төрәмәси онун дәјишмә сүр'әтини көстәрир. Буна көрә дә чохдәјишәнли функсијанын верилмиш нөгтәдә l истигамәтиндә төрәмәсинә, онун һәмин нөгтәдә l истигамәти үзрә дәјишмә сүр'әти кими бахмаг олар. Функсијанын мүхтәлиф истигамәтләрдә дәјишмә сүр'әти, үмумијјәтлә ејни олмур.

Бир чох мәсәләләрин һәллиндә бә'зән бахылан функсијанын верилмиш нөгтәдә ән бөјүк сүр'әтлә артма истигамәтини тапмаг тәләб олунур. Бу мәсәләни бурада үчдәјишәнли f функсијасы үчүн тәдгиг етмәклә кифајәтләнәк.

Тутаг ки, $W = f(x, y, z)$ функсијасынын $M = (x, y, z)$ нөгтәсиндә сонлу $\frac{\partial f(M)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(M)}{\partial y}$ вә $\frac{\partial f(M)}{\partial z}$ хүсуси төрәмәләри вар. Бу хүсуси төрәмәләр васитәсилә

$$\overline{\Gamma} = \frac{\partial f(M)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z}\overline{k}$$

векторуну дүзәлдәк. $\overline{\Gamma}$ векторуна f функсијасынын M нөгтәсиндә *градијенти* дејилир вә $\overline{\Gamma} = \text{grad } f(M)$ кими ишарә олунур. Демәли,

$$\overline{\operatorname{grad} f(M)} = \frac{\partial f(M)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z}\bar{\kappa}. \qquad (1)$$

f функсиjасы $\sigma \subset E_3$ областында диференсиалланан олдугда онун истәнилән $M \in \sigma$ нөгтәсиндә истәнилән l истигамәти үзрә сонлу $\frac{\partial f(M)}{\partial l}$ төрәмәси олар. Бу төрәмәни функсиjанын M нөгтәсиндәки градиjенти васитәсилә ифадә етмәк мүмкүндүр.

Доғрудан да, l дүз хәтти үзәриндә јерләшән ваһид $\bar{l}$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) вектору илә (1) векторунун скалјар һасили f функсиjасынын M нөгтәсиндә l истигамәти үзрә төрәмәсинә бәрабәрдир:

$$\bar{l}\cdot\overline{\operatorname{grad} f(M)} = \frac{\partial f(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M)}{\partial y}\cos\beta +$$

$$+ \frac{\partial f(M)}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial f(M)}{\partial l}. \qquad (2)$$

$\bar{l}$ $\overline{\operatorname{grad} f(M)}$ вә ваһид $\bar{l}$ вектору арасындакы буҹаг φ олсун. Онда векторларын скалјар һасилинин тә'рифинә (III, § 9) әсасән (2) бәрабәрлијиндән

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = |\overline{\operatorname{grad} f(M)}|\cdot\cos\varphi \qquad (3)$$

мүнасибәти алыныр. Бурадан ајдындыр ки, функсиjанын M нөгтәсиндә l истигамәти үзрә төрәмәсинин ән бөјүк олмасы үчүн $\varphi = 0$ олмалыдыр, јә'ни функсиjанын төрәмәси градиjентин тә'јин етдији истигамәт үзрә көтүрүлмәлидир. Бу һалда

$$\left(\frac{\partial f(M)}{\partial l}\right)_{max} = |\overline{\operatorname{grad} f(M)}| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(M)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(M)}{\partial z}\right)^2} \qquad (4)$$

олар. Демәли, диференсиалланан функсиjа верилмиш нөгтәдә өз градиjенти истигамәтиндә ән бөјүк сүр'әтлә артыр вә бу дәјишмә сүр'әтинин ән бөјүк гијмәти градиjентин модулуна бәрабәрдир.

Чох вахт функсиjанын градиjентини Һамилтон[1] оператору (вә ја Набло оператору) адланан

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\kappa}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (5)$$

вектор-оператору васитәсилә ифадә едирләр (∇ ишарәси Набло адланыр):

$$\overline{\operatorname{grad} f(M)} = \nabla f(M). \qquad (6)$$

Бу бәрабәрлијә ∇ векторунун f функсиjасына „символик һасили" вә ја тә'сири кими бахмаг олар.

[1] У. Һамилтон (1805—1865) инкилис ријазијјатчысыдыр.

§ 12. ТЕЈЛОР ДҮСТУРУ

Бирдәјишәнли функсиjалар үчүн мә'лум олан Тејлор дүстуру үјғун шәкилдә чохдәјишәнли функсиjалар үчүн дә доғрудур. Буну, садәлик хатиринә, икидәјишәнли функсиjалар үчүн көстәрмәклә кифајәтләнәк.

Бирдәјишәнли функсиjалар үчүн Тејлор дүстуру вә онун галыг һәдди мүхтәлиф шәкилләрдә јазылыр (XVI, § 5). Бурада һәмин дүстурун

$$\Delta\varphi(a) = d\varphi(a) + \frac{1}{2!}d^2\varphi(a) + \dots + \frac{1}{n!}d^n\varphi(a) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}\varphi(\xi) \qquad (1)$$

шәклиндә јазылышындан истифадә олунур.

Фәрз едәк ки, икидәјишәнли $f(x, y)$ функсиjасы (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмушдур вә $(n+1)$ тәртибә гәдәр кәсилмәјән бүтүн хүсуси төрәмәләри вар. Бурада x вә y дәјишәнләринә елә Δx вә Δy артымлары верәк ки, алынан $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ нөгтәләри јенә дә (x_0, y_0) нөгтәсинин көстәрилән әтрафына дахил олсун. Онда истәнилән $0 \leqslant t \leqslant 1$ үчүн

$$x = x_0 + t\Delta x \text{ вә } y = y_0 + t\Delta y$$

дәјишәнләриндән асылы

$$\varphi(t) = f(x, y) = f(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y) \qquad (2)$$

функсиjасына бахмаг олар. Бирдәјишәнли $\varphi(t)$ функсиjасы x вә y дәјишәнләри васитәсилә t-нин мүрәккәб функсиjасыдыр. Белә тә'јин олунмуш бирдәјишәнли $\varphi(t)$ функсиjасынын $t = 0$ нөгтәси әтрафында $(n+1)$ тәртибә гәдәр бүтүн төрәмәләри вар (§ 6) вә онун үчүн (1) дүстуруну јазмаг олар:

$$\Delta\varphi(0) = d\varphi(0) + \frac{1}{2!}d^2\varphi(0) + \dots + \frac{1}{n!}d^n\varphi(0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}\varphi(\theta), \qquad (3)$$

бурада $a = 0$, $0 < \theta < 1$ вә $\Delta t = t - a = 1 - 0 = 1$.

Инди $\Delta\varphi(0)$ вә $d^{\kappa}\varphi(0)$ $(\kappa = 1, 2, \dots, n+1)$ кәмијјәтләринин f функсиjасы васитәсилә ифадәсини тапаг.

(2) бәрабәрлијиндән

$$\Delta\varphi(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \Delta f(x_0, y_0) \qquad (4)$$

олмасы ајдындыр. $d^{\kappa}\varphi(0)$ кәмијјәтләрини васитәсилә ифадә етмәк үчүн нәзәрә алмаг лазымдыр ки, x вә y дәјишәнләри t-дән хәтти асылыдыр вә буна көрә дә $\varphi(t)$-нин јүксәктәртибли диференсиаллары 9-чу параграфдакы (6) дүстуру илә һесабланыр (§ 9):

$$d^{\kappa}\varphi(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{\kappa} f(x, y).$$

Бурада $t=0$ олдугда $x=x_0$, $y=y_0$ вә $t=\theta$ олдугда $x=x_0+\theta\Delta x$, $y=y_0+\theta\Delta y$ олдуғуну нәзәрә алдыгда

$$d^{\kappa}\varphi(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{\kappa}f(x_0,y_0)\ (\kappa=1,2,\ldots,n),\quad(5)$$

$$d^{n+1}\varphi(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\quad(6)$$

олур. (4), (5) вә (6) бәрабәрликләринә әсасән (3)-дән алырыг:

$$\Delta f(x_0,y_0)=\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{\kappa!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{\kappa}f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\quad(7)$$

вә ја

$$\Delta f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y),$$

$$0<\theta<1.\quad(8)$$

(8) (вә ја (7)) бәрабәрлијинә икидәјишәнли $f(x,y)$ функсијасы үчүн *Тејлор дүстуру* дејилир. Бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)$$

һәдди *Тејлор дүстурунун Лагранж шәклиндә галыг һәдди* адланыр.

Тејлор дүстуруну башга шәкилдә дә јазмаг олар. Бу мәгсәдлә $dx=\Delta x dt$, $dy=\Delta y dt$, $dt=\Delta t=1-0$ (t сәрбәст дәјишән олдуғу үчүн), $\Delta x=x-x_0$ вә $\Delta y=y-y_0$ олдуғуну нәзәрә алмаг лазымдыр. Онда (7) дүстуруну

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{\kappa!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\kappa}f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}f[x_0+\theta(x-x_0),\ y_0+\theta(y-y_0)]\quad(9)$$

кими јазмаг олар.

Хүсуси һалда, $x_0=0$ вә $y_0=0$ олдугда (9) дүстуру

$$f(x,y)=f(0,0)+\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{\kappa!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\kappa}f(0,0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(\theta x,\theta y)\quad(10)$$

шәклиндә јазылар. Бу бәрабәрлијә чох заман $f(x,y)$ функсијасы үчүн Маклорен дүстуру дејилир.

XXVIII ФӘСИЛ

ГЕЈРИ-АШКАР ФУНКСИЈАЛАР ВӘ ОНЛАРЫН ТӘТБИГИ

§ 1. БИРДӘЈИШӘНЛИ ГЕЈРИ-АШКАР ФУНКСИЈАНЫН ВАРЛЫҒЫ ВӘ ДИФЕРЕНСИАЛЛАНМАСЫ

Бирдәјишәнли гејри-ашкар функсијанын тә'рифи вә тәрәмәсинин бир сыра һалларда тапылма гајдасы әvвәлләр көстәрилмишдир (XI, § 7 вә XIV, § 11).

Тутаг ки, $F(x,y)$, мүстәви нөгтәләринин һәр һансы $\sigma=\{(x,y)\}$ чохлуғунда тә'јин олунмуш функсијадыр вә $E=\{x\}$ чохлуғунда ($x\in E\to(x,y)\in\sigma$) тә'јин олунмуш елә $y=f(x)$ функсијасы вар ки,

$$F(x,y)=0\quad(1)$$

бәрабәрлијини һәмин E чохлуғунда x-ә нәзәрән ејнилијә чевирир: $F[x,f(x)]\equiv 0$. Онда $y=f(x)$ функсијасына (1) тәнлији васитәсилә E чохлуғунда тә'јин олунмуш *гејри-ашкар функсија* дејилир.

Бирдәјишәнли функсија $y=f(x)$ шәклиндә дүстурла (јә'ни y-ә нәзәрән һәлл олунмуш шәкилдә) верилдикдә, она ашкар функсија дејилир. Бә'зән (1) тәнлијини y-ә нәзәрән һәлл едәрәк, һәмин тәнликлә тә'јин олунан гејри-ашкар функсијаны ашкар шәкилдә кәтирмәк мүмкүн олур. Мәсәлән, $x^3+y^3-4=0$ бәрабәрлији илә тә'јин олунан гејри-ашкар $y=\sqrt[3]{4-x^3}$ функсијасыны һәмин тәнлији y-ә нәзәрән һәлл етмәклә тапмаг олар. Бир чох һалларда исә (1) тәнлијини y-ә нәзәрән һәлл етмәк чох чәтин олур вә ја мүмкүн олмур. Тәрсинә, функсија $y=f(x)$ ашкар шәкилдә верилдикдә ону $y-f(x)=0$ кими јазмагла гејри-ашкар шәкилдә верилмиш функсија аларыг.

Бурадан ајдындыр ки, функсијаја „ашкар" вә ја „гејри-ашкар" ады верилмәси онун хүсуси бир хассәси олдуғуну көстәрмир, јалныз һансы үсулла верилдијини көстәрир.

Мә'лумдур ки, (1) шәклиндә тәнлик һеч бир функсија тә'јин етмәјә дә биләр (XI, § 7). Ола да биләр ки, (1) тәнлији

васитәсилә бир вә ја бир нечә функсија тә'јин едилир. Әлбәттә, (1) тәнлији васитәсилә гејри-ашкар $y = f(x)$ функсијасынын тә'јин олунмасы, һеч дә һәмин тәнлијин y-ә нәзәрән (елементар функсијалар синфиндә) һәлл олуна билдијини көстәрмир.

Мәсәлән,

$$x = 2y - \sin y \quad (-\infty < y < \infty) \tag{2}$$

функсијасынын бүтүн әдәд охунда y-ә нәзәрән төрәмәси вар: $\frac{dx}{dy} = 2 - \cos y > 0$ вә мүсбәтдир. Бу һәмин функсијанын бүтүн әдәд охунда артан олдуғуну көстәрир. Артан функсијанын исә тәрс функсијасы вар вә артандыр (XI, § 14). Демәли, $x = 2y - \sin y$ функсијасынын монотон артан $y = f(x)$ тәрс функсијасы вар вә һәмин функсија

$$x - 2y + \sin y = 0 \tag{3}$$

тәнлији васитәсилә гејри-ашкар функсија кими тә'јин олунур. (3) тәнлијини y-ә нәзәрән һәлл етмәк (јә'ни, y дәјишәнини сонлу сајда елементар функсијаларла ифадә етмәк) мүмкүн дејилдир.

(1) тәнлији нә заман гејри-ашкар функсија тә'јин едир? Бу гејри-ашкар функсија диференсиалланан ола биләрми?

Бу суаллара ашағыдакы теорем ҹаваб верир.

Теорем **(гејри-ашкар функсијанын варлығы).** ***Тутаг ки, $F(x, y)$ функсијасы ашағыдакы шәртләри өдәјир:***

1. (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмушдур вә кәсилмәјән F'_x, F'_y хүсуси төрәмәләри вар;

2. $F(x_0, y_0) = 0$ вә $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ мүнасибәтләри өдәнилир.

Онда (1) тәнлији x_0 нөгтәсинин мүәјјән $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ әтрафында гејри-ашкар $y = f(x)$ функсијасыны тә'јин едир. Бу гејри-ашкар функсија $f(x_0) = y_0$ шәртини өдәјир, көстәрилән $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында кәсилмәјән төрәмәси вар вә бу төрәмә

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \tag{4}$$

дүстуру илә һесабланыр.

Исбаты. Үмумилији азалтмадан фәрз едәк ки, $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Онда (x_0, y_0) нөгтәсинин елә $\prod((x_0, y_0); \delta')$ әтрафы вар ки, һәмин әтрафда кәсилмәјән $F'_y(x, y)$ функсијасы өз ишарәсини сахлајыр, јә'ни $F'_y(x, y) > 0$ олур. Буна көрә дә $F(x, y)$, y-ин функсијасы кими $l = [x = x_0, |y - y_0| \leq \delta']$ парчасында монотон артан, кәсилмәјән вә $y = y_0$ нөгтәсиндә сыфра чеврилән $(F(x_0, y_0) = 0)$ функсијадыр. Бурадан $F(x_0, y_0 - \delta') < 0$ вә $F(x_0, y_0 + \delta') > 0$ олмасы ајдындыр. Онда функсијанын кәсилмәзлијинә әсасән елә $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалы тапа биләрик ки, x-ин һәмин $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында јерләшән бүтүн гијмәтләриндә

$$F(x, y_0 - \delta') < 0 \text{ вә } F(x, y_0 + \delta') > 0$$

мүнасибәтләри өдәниләр.

Инди $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында јерләшән истәнилән x нөгтәсини көтүрәк вә $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ парчасында y-ә нәзәрән $F(x, y)$ функсијасына бахаг. Ајдындыр ки, $F(x, y)$ функсијасы $(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ y-ә нәзәрән $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ парчасында артан, кәсилмәјән вә парчанын уҹ нөгтәләриндә мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр алан функсијадыр. Онда $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ парчасында јерләшән вә $y = f(x)$ кими ишарә олунан елә јеканә y вар ки, $F[x, f(x)] = 0$ олур. Бунунла да, $F(x, y) = 0$ тәнлијинин $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында гејри-ашкар $y = f(x)$ функсијасыны тә'јин етдији исбат олунур. Гејри-ашкар $f(x)$ функсијасы $f(x_0) = y_0$ шәртини өдәјир вә онун $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында кәсилмәз олдуғуну асанлыгла исбат етмәк олар.

Гејри-ашкар $y = f(x)$ функсијасынын кәсилмәз төрәмәси олдуғуну исбат етмәк үчүн онун артымыны $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ $(x, x + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ илә ишарә едәк. Ајдындыр ки,

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon_2\right)\Delta y \tag{5}$$

олар. $y = f(x)$ функсијасы кәсилмәз олдуғундан $\Delta x \to 0$ шәртиндә $\Delta y \to 0$ мүнасибәти өдәнилир. Онда $F(x, y)$ функсијасынын диференсиалланан олмасына әсасән $\varepsilon_1 \to 0$ $(\Delta x \to 0)$ вә $\varepsilon_2 \to 0$ $(\Delta x \to 0)$ олар. Шәртә көрә $F'_y(x, y) > 0$ олдуғундан кифајәт гәдәр кичик Δx үчүн $F'_y(x, y) + \varepsilon_2 > 0$ мүнасибәти дә өдәниләр. Буна көрә дә (5) бәрабәрлијиндән

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x + \varepsilon_1}{F'_y + \varepsilon_2} \text{ вә } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

мүнасибәтләри алыныр. Демәли,

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{6}$$

Бу бәрабәрликдә y әвәзинә $f(x)$ јаздыгда

$$f'(x) = -\frac{F'_x[x, f(x)]}{F'_y[x, f(x)]} \quad (F'_y \neq 0)$$

олар. Бу кәсрин сурәти $F'_x[x, f(x)]$ вә мәхрәҹи $F'_y[x, f(x)]$ кәсилмәјән функсијанын кәсилмәјән функсијасы олдуғу үчүн

кәсилмәјәндир. $f'(x)$ функсијасы исә ики кәсилмәјән функсијанын нисбәти олдуғу үчүн $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ интервалында кәсилмәјән олар. Беләликлә, теорем тамамилә исбат олунур.

Теоремин исбаты просесиндә (1) тәнлији васитәсилә тә'јин олунан гејри-ашкар $f(x)$ функсијасынын төрәмәсини һесабламаг үчүн (6) дүстуру да тапылды. Бу дүстуру x-ин мүәјјән гијмәтләри чохлуғунда доғру олан $F[x, f(x)] \equiv 0$ ејнилијини x-ә нәзәрән диференсиалламагла да алмаг олар:

$$\frac{dF[x, f(x)]}{dx}=0,\ \frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Бурадан алынан

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad (7)$$

ејнилијиндән $\frac{dy}{dx}$ төрәмәсини тә'јин етсәк, јенә дә (6) дүстуруну аларыг.

Бахылан облaстда $F(x, y)$ функсијасынын икитәртибли кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олдугда (1) тәнлијинин тә'јин етдији гејри-ашкар $f(x)$ функсијасынын икитәртибли төрәмәсини дә тапмаг олар. Бу мәгсәдлә (6) бәрабәрлијинин сағ тәрәфини x-ин мүрәккәб функсијасы һесаб етмәк лазымдыр $(y=f(x))$. Онда һәмин дүстурдан

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}$$

вә ја

$$y''=-\frac{F''_{xx}\cdot F'_y-F''_{yx}\cdot F'_x}{(F'_y)^2}-\frac{F''_{xy}\cdot F'_y-F''_{yy}\cdot F'_x}{(F'_y)^2}\cdot y'$$

аларыг. y'-ин (6) дүстурундакы гијмәтини јеринә јазаг вә алынан ифадәни садәләшдирәк:

$$y''=-\frac{(F'_y)^2\cdot F''_{xx}-2F''_{xy}\cdot F'_x F'_y+(F'_x)^2\cdot F''_{yy}}{(F'_y)^2}. \qquad (8)$$

Бу дүстуру (7) ејнилијини x-ә нәзәрән диференсиалламагла да алмаг олар. Нәһајәт, гејри-ашкар $y=f(x)$ функсијасынын јүксәктәртибли төрәмәләрини тапмаг үчүн бу просеси давам етдирмәк лазымдыр.

Мисал. $x-2y+\sin y=0$ тәнлији илә тә'јин олунмуш гејри-ашкар $y=y(x)$ функсијасынын биртәртибли вә икитәртибли төрәмәләрини тапмалы.

(6) вә (8) дүстурларына көрә

$$y'=\frac{1}{2-\cos y},\quad y''=\frac{\sin y}{(1-\cos y)^2}$$

олар.

§ 2. БИРДӘЈИШӘНЛИ ГЕЈРИ-АШКАР ФУНКСИЈАЛАРЫН БИР СЫРА ТӘТБИГЛӘРИ

Гејри-ашкар функсијанын варлығы һаггында теореми (§ 1) тәрс функсијанын варлығы вә гејри-ашкар шәкилдә верилмиш әјринин тохунаныны вә нормалыны тапмаг мәсәләсинә тәтбиг едәк.

1. Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы x_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмуш функсијадыр. Бу функсијаны $y-f(x)=F(x, y)=0$ тәнлији илә тә'јин олунмуш функсија һесаб етмәк олар.

Инди белә бир мәсәләнин тәдгиги илә мәшғул олаг: $y-f(x)=0$ тәнлији нә заман y_0 $(y_0=f(x_0))$ нөгтәсинин әтрафында x-ә нәзәрән һәлл олуна биләр? $y-f(x)=0$ тәнлијинин ахтарылан $x=f^{-1}(y)$ һәлли верилмиш $y=f(x)$ функсијасынын тәрс функсијасы олар.

Әввәлки параграфда гејри-ашкар функсијанын варлығы һаггында исбат едилмиш теоремә әсасән гојулмуш мәсәләнин һәлли һаггында ашағыдакы нәтичә алыныр: $y=f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсинин әтрафында сыфра бәрабәр олмајан сонлу төрәмәси олдугда, һәмин нөгтәнин мүәјјән әтрафында верилмиш функсијанын $x=f^{-1}(y)$ тәрс функсијасы вар вә бу тәрс функсија y_0 $(y_0=f(x_0))$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында диференсиалланандыр. Тәрс функсијанын y_0 нөгтәсиндә төрәмәси әввәлки параграфда исбат едилмиш (3) дүстуру илә һесабланыр:

$$x'_y=-\frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (1)$$

Бу дүстур тәрс функсијанын төрәмәси һаггында мә'лум олан (XIV, § 7) дүстурла үст-үстә дүшүр.

2. Координатлары верилмиш

$$F(x, y)=0 \qquad (2)$$

тәнлијини өдәјән $M(x, y)$ нөгтәләри чохлуғуну L илә ишарә едәк. L бош чохлуг олмадыгда она мүстәви әјри, (2) бәрабәрлијинә исә онун тәнлији дејилир (VI, § 2). Бу һалда, чох вахт дејирләр ки, (2) тәнлији гејри-ашкар шәкилдә L әјрисини тә'јин едир вә ја L әјриси гејри-ашкар (2) тәнлији илә верилмишдир. *Верилмиш $M_0=(x_0, y_0)$ нөгтәсиндә $F'_x(x, y)$ вә $F'_y(x, y)$ хүсуси төрәмәләринин һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олдугда, һәмин нөгтәјә L әјрисинин ади вә ја дүзкүн нөгтәси дејилир. Әкәр $F'_x(x_0, y_0)=F'_y(x_0, y_0)=0$ мүнасибәти өдәнилсә, онда M_0 нөгтәси L әјрисинин махсуси нөгтәси адланыр.*

Тутаг ки, M_0 нөгтәси L әјрисинин ади нөгтәсидир вә $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$. Онда (2) тәнлији M_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында

диференсиалланан гејри-ашкар $y = f(x)$ функсијасыны тә'јин едәр. Бу функсијанын һәмин әтрафда јерләшән графики ади гөвс олачагдыр. M_0 нөгтәсиндә һәмин гөвсүн мүәјјән тохунаны вә нормалы вар ($f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндә сонлу

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

төрәмәси олдуғуна көрә).

Әјријә (x_0, y_0) нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын тәнлији (XIV, § 2)

$$y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x - x_0), \; y_0 = f(x_0)$$

вә ја

$$F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) = 0 \qquad (3)$$

олар. Һәмин нөгтәдә әјријә чәкилмиш нормалын тәнлији (XIV, § 2) исә

$$y - y_0 = \frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}(x - x_0), \; F'_x(x_0, y_0) \neq 0$$

вә ја

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} \qquad (4)$$

олар.

Мисал. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ һиперболасына (x_0, y_0) $(y_0 \neq 0)$ нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын тәнлији

$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1,$$

нормалын тәнлији исә

$$\frac{a^2}{x_0}(x - x_0) + \frac{b^2}{y_0}(y - y_0) = 0$$

олар.

§ 3. ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ГЕЈРИ-АШКАР ФУНКСИЈА ВӘ ОНУН ВАРЛЫҒЫ

Чохдәјишәнли гејри-ашкар функсијалар бирдәјишәнли гејри-ашкар функсијалара аналожи олараг тә'јин едилир.

Фәрз едәк ки, $(n+1)$-дәјишәнли $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ функсијасы $(n+1)$-өлчүлү E_{n+1} фәзасы нөгтәләринин һәр һансы $\sigma = \{(x_1, \ldots, x_n, y)\}$ чохлуғунда тә'јин олунмушдур вә $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәләринин һәр һансы E чохлуғунда ($X \in E$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \sigma$) тә'јин олунмуш n-дәјишәнли елә $y = f(X)$ функсијасы вар ки, һәмин функсија

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0 \qquad (1)$$

бәрабәрлијини E чохлуғунда $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәләринә нәзәрән ејнилијә чевирир:

$$F[x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv 0. \qquad (2)$$

Онда n-дәјишәнли $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ функсијасына (1) тәнлији васитәсилә E чохлуғунда тә'јин олунмуш гејри-ашкар функсија дејилир.

Мәсәлән, $z^3 - x^2 - y^2\cos^2 x - 5 = 0$ тәнлији бүтүн мүстәвидә икидәјишәнли гејри-ашкар $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2\cos^2 x + 5}$ функсијасыны тә'јин едир. Доғрудан да, z-ин бу ифадәсини тәнликдә јеринә јазсаг, x вә y-ин бүтүн гијмәтләриндә өдәнилән

$$\left(\sqrt[3]{x^2 + y^2\cos^2 x + 5}\right)^3 - x^2 - y^2\cos^2 x - 5 \equiv 0$$

ејнилијини аларыг. $z^4 + x^4 + y^2 + 5 = 0$ тәнлији исә һеч бир гејри-ашкар функсија тә'јин етмир.

Демәли, (1) тәнлији һеч бир функсија тә'јин етмәјә дә биләр. Ола да биләр ки, һәмин тәнлик бир вә ја бир нечә функсија тә'јин едир.

Чохдәјишәнли гејри-ашкар функсијанын варлығы һаггында кафи шәрт ашағыдакы теоремдә көстәрилир.

Теорем. ***Тутаг ки, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ функсијасы ашағыдакы шәртләри өдәјир:***

1. $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_0)$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмушдур вә кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри (биртәртибли) вар.

2. $F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_0) = 0$ вә $F'_y(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_0) \neq 0$ мүнасибәтләри өдәнилир.

Онда (1) тәнлији $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында n-дәјишәнли гејри-ашкар $y = f(X)$ функсијасыны тә'јин едир. Бу гејри-ашкар функсија $y_0 = f(X^{(0)})$ шәртини өдәјир, $X^{(0)}$ нөгтәсинин һәмин әтрафында кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри вар вә һәмин төрәмәләр

$$f'_{x_k} = -\frac{F'_{x_k}}{F'_y} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

дүстуру илә һесабланыр.

Бу теорем бирдәјишәнли гејри-ашкар функсијанын варлыг теореми (§ 1) кими исбат олунур.

Гејд едәк ки, гејри-ашкар f функсијасынын хүсуси төрәмәләрини һесабламаг үчүн көстәрилән (3) дүстуруну, (2) бәрабәрлијини x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ аргументинә нәзәрән диференсиалламагла да алмаг олар. Доғрудан да, ејниликлә сыфра бәрабәр олан $F[x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)]$ функсијасынын x_k-ја

нәзәрән там хүсуси төрәмәси дә сыфра бәрабәр олар:

$$\frac{\partial F}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_\kappa} = 0 \ (\kappa = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Бурадан (3) дүстуру алыныр.

F функсијасынын икитәртибли кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри олдугда (4) бәрабәрликләрини x_κ аргументләринә нәзәрән диференсиалламагла гејри-ашкар f функсијасынын икитәртибли хүсуси төрәмәләрини дә тапмаг олар. Бу мәгсәдлә (4) бәрабәрлијини x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) аргументинә нәзәрән диференсиалласаг, аларыг:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_\kappa \cdot \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_\kappa \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_\kappa \cdot \partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_\kappa \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_\kappa \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_\kappa \partial x_i} = 0,$$

$$(i, \kappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Биртәртибли $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ вә $\frac{\partial y}{\partial x_\kappa}$ төрәмәләринин (3) бәрабәрлијиндән гијмәтләрини тапыб, бурада јеринә јазмагла икитәртибли $\frac{\partial^2 y}{\partial x_\kappa \partial x_i}$ хүсуси төрәмәләрини тапмаг олар. Бу просеси давам етдирмәклә башга јүксәктәртибли хүсуси төрәмәләр дә тапылыр.

§ 4. ГЕЈРИ-АШКАР ШӘКИЛДӘ ТӘНЛИКЛӘ ВЕРИЛМИШ СӘТҺИН ТОХУНАН МҮСТӘВИСИ ВӘ НОРМАЛЫ

Фәзада верилмиш координат системиндә

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

тәнлији илә тә'јин олунан S сәтһинә бахаг (VIII, § 7). Фәрз едәк ки, $F(x, y, z)$ функсијасынын биртәртибли кәсилмәјән бүтүн хүсуси төрәмәләри вар.

Верилмиш $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсиндә $F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $F'_y(x_0, y_0, z_0)$ вә $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ хүсуси төрәмәләринин һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олдугда, һәмин нөгтәјә S сәтһинин ади вә ја дүзкүн нөгтәси дејилир. $F'_x(M_0) = F'_y(M_0) = F'_z(M_0) = 0$ мүнасибәти өдәнилсә, онда M_0 нөгтәси S сәтһинин мәхсуси нөгтәси адланыр.

Тутаг ки, M_0 нөгтәси S сәтһинин ади нөгтәсидир вә бу нөгтәдә $F'_z(M_0) \neq 0$. Онда чохдәјишәнли гејри-ашкар функсијанын варлыг теореминә (§ 3) көрә (1) тәнлији M_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында диференсиалланан гејри-ашкар $z = f(x, y)$ функсијасыны тә'јин едир. Бу функсијанын һәмин әтрафда јерләшән графики садә сәтһдир вә M_0 нөгтәсиндә онун тохунан мүстәвиси вә нормалы вар.

Инди һәмин сәтһә M_0 нөгтәсиндә тохунан мүстәвинин вә нормалын тәнлијини (XXVII, § 5) тапаг.

$f(x, y)$ функсијасынын $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсиндә хүсуси төрәмәләри әввәлки параграфда чыхарылмыш (3) дүстуру илә һесабланыр:

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Онда M_0 нөгтәсиндә сәтһә тохунан мүстәвинин тәнлији (XXVII, § 5)

$$z - z_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0)$$

вә ја

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

олар. Көстәрилән нөгтәдә сәтһин нормалынын тәнлији исә

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \tag{3}$$

кими јазылар.

Мисал. $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$ сферасына (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә ($z_0 \neq 0$) тохунан мүстәвинин тәнлији

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = k^2$$

вә нормалын тәнлији

$$\frac{x - x_0}{x_0} = \frac{y - y_0}{y_0} = \frac{z - z_0}{z_0} \ (x_0 \neq 0, \ y_0 \neq 0, \ z_0 \neq 0)$$

олар.

§ 5. ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИНДӘН ТӘ'ЈИН ОЛУНАН ГЕЈРИ-АШКАР ФУНКСИЈАЛАР ВӘ ЈАКОБИ ДЕТЕРМИНАНТЫ

Фәрз едәк ки, n-өлчүлү фәзанын мүәјјән нөгтәләр чохлуғунда тә'јин олунмуш m-дәјишәнли $\psi_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ($\kappa = 1, 2, \ldots, m$) функсијаларычын бүтүн дәјишәнләрә нәзәрән сонлу хүсуси төрәмәләри варлыр. Бу төрәмәләрдән ашағыдакы кими детерминант дүзәлдәк:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

(1) *детерминантына* $\psi_к(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(к = 1, 2, \ldots, m)$ *функсијалар системинин* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *дәјишәнләринә нәзәрән Јакобианы вә ја Јакобинин*[1] *функсионал детерминанты дејилир вә*

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

кими ишарә олунур. $m = 1$ олдугда Јакобиан бирдәјишәнли $\psi_1(x_1)$ функсијасынын x_1 дәјишәнинә нәзәрән төрәмәсинә чеврилир:

$$\frac{D(\psi_1)}{D(x_1)} = \frac{d\,\psi_1(x_1)}{dx_1}.$$

Буна көрә дә Јакобиана төрәмә анлајышынын чохдәјишәнли функсијалар системи үчүн үмумиләшмәси кими бахмаг олар.

Инди $(n + m)$-өлчүлү фәзанын мүәјјән нөгтәләр чохлуғунда тә'јин олунмуш $(n + m)$-дәјишәнли $F_к(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $(к = 1, 2, \ldots, m)$ функсијаларындан дүзәлмиш

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

тәнликләр системинә бахаг. Бу тәнликләр системиндән $y_1, y_2, \ldots, y_m$ дәјишәнләрини јердә галан $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләри васитәси илә тапмаг мүмкүн олдугда һәмин тәнликләр системи васитәсилә тә'јин олунан n-дәјишәнли

$$y_к = f_к(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (к = 1, 2, \ldots, m) \qquad (3)$$

функсијалары алынар.

(3) функсијалары n-өлчүлү фәза нөгтәләринин һәр һансы E чохлуғунда тә'јин олунмуш вә (2) тәнликләр системини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә көрә E чохлуғунда ејнилијә чевирән

$$F_к[x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)] \equiv 0 \quad (к = 1, 2, \ldots, m) \qquad (4)$$

јеканә функсијалар системи олдугда, дејирләр ки, һәмин функсијалар (2) тәнликләр системи васитәсилә тә'јин олунмуш гејри-ашкар функсијалардыр.

Мәсәлән,

$$\begin{cases} 7x + y + 2z = 0, \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

тәнликләр системи $E = (-\infty, \infty)$ чохлуғунда гејри-ашкар $y = 3x$ вә $z = -5x$ функсијаларыны тә'јин едир.

[1] Карл Густав Јаков Јакоби (1804—1851) алман ријазијјатчысыдыр.

Әлбәттә, верилмиш тәнликләр системи һеч бир гејри-ашкар функсија тә'јин етмәјә дә биләр. (2) тәнликләр системинин һансы кафи шәртләр дахилиндә гејри-ашкар функсијалар тә'јин етмәсини ашағыдакы теорем шәклиндә сөјләмәк олар.

Теорем. ***Тутаг ки,*** $F_к(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ $(к = 1, 2, \ldots, m)$ ***функсијалары ашағыдакы шәртләри өдәјир:***

1. $(X^{(0)}, Y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$ ***нөгтәсинин мүәјјән ((n + m)-өлчүлү) әтрафында тә'јин олунмушдур вә һәмин әтрафда кәсилмәјән биртәртибли бүтүн хүсуси төрәмәләри вардыр.***

2. $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ ***нөгтәсинин координатлары (2) системини өдәјир:***

$$F_к(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) = 0 \quad (к = 1, 2, \ldots, m)$$

вә $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$ ***Јакобианы*** $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ ***нөгтәсиндә сыфырдан фәрглидир.***

Онда (2) тәнликләр системи $(X^{(0)}, Y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$ ***нөгтәсинин мүәјјән әтрафында n-дәјишәнли гејри-ашкар*** $f_к(x_1, \ldots, x_n)$ $(к = 1, 2, \ldots, m)$ ***функсијаларыны тә'јин едир. Бу гејри-ашкар функсијалар*** $f_к(X^{(0)}) = y_к^{(0)}$ $(к = 1, 2, \ldots, m)$ ***шәртини өдәјир вә*** $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ ***нөгтәсинин көстәрилән әтрафында бүтүн дәјишәнләрә нәзәрән кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри вар.***

Теоремин исбаты верилмир.

Теоремин шәртләри өдәнилдикдә (2) системиндән тә'јин олунан гејри-ашкар (3) функсијаларынын хүсуси төрәмәләрини тапмаг үчүн (4) ејниликләрини x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ аргументинә нәзәрән диференсиалламаг лазымдыр:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0, \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial F_m}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Бу систем ахтарылан $\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_i}$ хүсуси төрәмәләринә көрә m-мәчһуллу m дәнә хәтти тәнликләр системидир. Һәмин системин әсас детерминанты (мәчһулларын әмсалларындан дүзәлдилмиш детерминант) олан

$$\Delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \qquad (6)$$

Јакобианы $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ нөгтәсиндә сыфырдан фәрглидир. Буна

көрә дә (5) системинин Крамер дүстурлары илә тапылан јеканә һәлли вар:

$$\frac{\partial y_\kappa}{\partial x_i} = \frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_{\kappa-1}, x_i, y_{\kappa+1}, \dots, y_m)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}}$$

$$(\kappa = 1, 2, \dots, m; \; i = 1, 2, \dots, n). \tag{7}$$

§ 6. ЧОХӨЛЧҮЛҮ ФӘЗА ОБЛАСТЛАРЫНЫН ГАРШЫЛЫГЛЫ БИРГИЈМӘТЛИ ИН'ИКАСЫ

n-өлчүлү фәзанын $\sigma = \{X\}$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, областында тә'јин олунмуш вә кәсилмәз диференсиалланан

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

функсијалар системинә бахаг. (1) функсијалары васитәсилә σ областынын һәр бир $X \in \sigma$ нөгтәсинә n-өлчүлү $(y_1, y_2, \dots y_n)$ нөгтәләри фәзасынын мүәјјән бир $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ нөгтәси үјғун олур, башга сөзлә, һәр бир $X \in \sigma$ нөгтәси бир Y нөгтәсинә ин'икас олунур. Бүтүн $X \in \sigma$ нөгтәләринин образлары чохлуғу G олсун. Бу һалда, дејирләр ки, (1) системи σ областыны G чохлуғуна кәсилмәз диференсиалланан ин'икас етдирир.

(1) чевирмәсинин

$$A = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Јакобианы σ областынын бүтүн нөгтәләриндә сыфырдан фәргли олдугда, һәмин чевирмә σ областыны G областына ин'икас етдирир вә бу ин'икас әввәлки параграфда верилмиш теоремә көрә локал гаршылыглы биргијмәтлидир. Јә'ни, (1) чевирмәси һәр бир $X^{(0)} \in \sigma$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафыны $Y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$, $y_\kappa^{(0)} = f_\kappa(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ $(\kappa = 1, 2, \dots, n)$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафына гаршылыглы биргијмәтли ин'икас етдирир. Бу һалда, $Y^{(0)}$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында (1) системинин јеканә һәлли вар:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{2}$$

вә бу функсијалар $Y^{(0)}$ нөгтәсинин көстәрилән әтрафында кәсилмәјәндир.

XXIX ФӘСИЛ

ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАЛАРЫН ЕКСТРЕМУМУ

§ 1. ФУНКСИЈАНЫН ЛОКАЛ ЕКСТРЕМУМУ

Тутаг ки, $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функсијасы $\sigma \in E_n$ областында тә'јин олунмушдур вә $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ бу областын һәр һансы нөгтәсидир.

Тә'риф. *$X^{(0)} \in \sigma$ нөгтәсинин һәр һансы $O_\delta(X^{(0)})$ $(\delta > 0)$ әтрафынын бүтүн $X \in O_\delta(X^{(0)})$ нөгтәләриндә*

$$f(X) \leqslant f(X^{(0)}) \tag{1}$$

бәрабәрсизлији өдәнилдикдә, дејирләр ки, $f(X)$ функсијасы $X^{(0)}$ нөгтәсиндә локал максимум гијмәт алыр. $X^{(0)}$ нөгтәсинин һәр һансы $O_\delta(X^{(0)})$ әтрафынын бүтүн $X \in O_\delta(X^{(0)})$ нөгтәләриндә

$$f(X) \geqslant f(X^{(0)}) \tag{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнилдикдә исә, дејирләр ки, $f(X)$ функсијасы $X^{(0)}$ нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алыр.

Функсијанын локал максимуму вә локал минимуму бирликдә функсијанын локал екстремуму адланыр. Бә'зән функсијанын локал екстремуму истилаһы әвәзинә функсијанын локал мүтләг екстремуму истилаһы ишләдилир.

Функсијанын верилмиш областда бир вә ја бир нечә локал максимуму вә локал минимуму ола биләр. Функсијанын бахылан областда локал екстремуму һеч олмаја да биләр.

Мисал 1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ функсијасы $(0,0)$ нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алыр.

Доғрудан да, $(0,0)$ нөгтәсинин әтрафында јерләшән бүтүн (x, y) нөгтәләриндә

$$f(x, y) > f(0, 0) = 0$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Мисал 2. $\varphi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функсијасы $(0,0)$ нөгтәсиндә локал максимум гијмәт алыр.

Доғрудан да, $(0, 0)$ нөгтәсинин кичик $O_\delta(0, 0)$, $\delta < 1$ әтрафынын бүтүн нөгтәләриндә

$$\varphi(x, y) \leqslant \varphi(0, 0) = 1$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Функсија локал екстремум гијмәтләрини һансы нөгтәләрдә ала биләр?

Теорем (локал екстремумун варлығы үчүн зәрури шәрт). *$f(x)$ функсијасы $X^{(0)}$ нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алырса вә бу нөгтәдә сонлу хүсуси төрәмәләри*

варса, онда һәмин хүсуси төрәмәләр $X^{(0)}$ нөгтәсиндә сыфра бәрабәр олар: $\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_к} = 0 \, (к = 1, 2, \ldots, n)$.

Исбаты. $f(X)$ функсијасынын $x_1, \ldots, x_{к-1}, x_{к+1}, \ldots, x_n$ аргументләрини гејд етдикдә бирдәјишәнли $\varphi(x_к) = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{к-1}^{(0)}, x_к, x_{к+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ функсијасы алынып. Теоремин шәртинә көрә $\varphi(x_к)$ функсијасы $x_к = x_к^{(0)}$ нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алар. Функсијанын төрәмәси локал екстремум нөгтәсиндә сыфра бәрабәр (XVII, § 4) олдуғундан

$$\varphi'(x_к) = f'_{x_к}(X^{(0)}) = 0 \quad (к = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

олар.

Функсија, локал екстремум гијмәт алдығы $X^{(0)}$ нөгтәсиндә диференсиалланан олдугда, екстремумун варлығы үчүн зәрури шәрти башга шәкилдә дә сөјләмәк олар. Доғрудан да, (3) бәрабәрликләри өдәнилдикдә функсијанын там диференсиалы аргументләрин $dx_к \, (к = 1, 2, \ldots, n)$ диференсиалларына нәзәрән $X^{(0)}$ нөгтәсиндә ејниликлә сыфра бәрабәр олар:

$$df(X^{(0)}) = 0. \tag{4}$$

Бунун тәрси дә доғрудур: (4) → (3). Әкәр $dx_к \neq 0$ вә $dx_1 = \cdots = dx_{к-1} = dx_{к+1} = \cdots = dx_n = 0$ гәбул етсәк, онда

$$df(X^{(0)}) = \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_n} dx_n = \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_к} dx_к = 0$$

мүнасибәтиндән (3) алыныр.

Бурадан ашағыдакы тәклиф алыныр: әкәр $f(X)$ функсијасы диференсиалланан олдуғу $X^{(0)}$ нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алырса, онда һәмин нөгтәдә $f(X)$ функсијасы үчүн (4) шәрти өдәнилир.

Функсија локал екстремум гијмәтини хүсуси төрәмәләринин бири вә ја бир нечәси олмадығы нөгтәләрдә дә ала биләр.

Мәсәлән, $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ вә $\psi(x, y) = |x| + |y|$ функсијалары (0, 0) нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алыр, лакин һәмин нөгтәдә хүсуси төрәмәләри јохдур.

Бирдәјишәнли функсијалара аналожи олараг чохдәјишәнли функсијанын биртәртибли бүтүн хүсуси төрәмәләринин сыфра чеврилдији вә ја һеч олмаса бир дәјишәнә нәзәрән хүсуси төрәмәсинин олмадығы нөгтәләрә функсијанын „бөһран нөгтәләри“ дејилир.

Демәли, функсијанын локал екстремум гијмәт алдығы һәр бир нөгтә һәмин функсијанын бөһран нөгтәсидир.

Локал екстремумун варлығы үчүн бу зәрури шәрт кафи дејилдир. Бөһран нөгтәсиндә функсија локал екстремум гијмәт алмаја да биләр. Мәсәлән, (0, 0) нөгтәси $f(x, y) = xy$ функсијасынын бөһран нөгтәсидир, лакин функсија бу нөгтәдә локал екстремум гијмәт алмыр. Чүнки (0, 0) нөгтәсинин истәнилән әтрафында $f(x, y)$ функсијасы $f(0, 0) = 0$ гијмәтиндән һәм бөјүк вә һәм дә кичик гијмәтләр алыр.

Функсијанын верилмиш бөһран нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алдығыны нечә билмәк олар?

§ 2. ЕКСТРЕМУМУН ВАРЛЫҒЫ ҮЧҮН КАФИ ШӘРТ

Икидәјишәнли $f(x, y)$ функсијасынын верилмиш (x_0, y_0) бөһран нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алмасы шәртини мүәјјән едәк.

Бу мәгсәдлә фәрз едәк ки, $f(x, y)$ функсијасынын (x_0, y_0) бөһран нөгтәсинин мүәјјән әтрафында бүтүн икитәртибли хүсуси төрәмәләри вар, бу $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yy}(x, y)$ хүсуси төрәмәләри һәмин нөгтәдә кәсилмәјәндир вә $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Бундан башга, $a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0)$ вә $\lambda = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ олсун.

Онда верилмиш бөһран нөгтәсиндә локал екстремумун варлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат етмәк олар.

Теорем. *$\lambda > 0$ вә $a_{11} > 0$ олдугда $f(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) бөһран нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алыр, $\lambda > 0$ вә $a_{11} < 0$ олдугда $f(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) бөһран нөгтәсиндә локал максимум гијмәт алыр, $\lambda < 0$ олдугда исә функсија (x_0, y_0) бөһран нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алмыр, $\lambda = 0$ олдугда $f(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) бөһран нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт ала да биләр, алмаја да биләр.*

Исбаты. Ајдындыр ки, $f(x, y)$ функсијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алмасы үчүн һәмин нөгтәнин јахын әтрафында онун

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{1}$$

там артымы өз ишарәсини сахламалыдыр:

локал максимум гијмәт алдыгда $\Delta f \leqslant 0$, (2)
локал минимум гијмәт алдыгда $\Delta f \geqslant 0$.

Буна көрә дә $f(x, y)$ функсијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алмасыны јохламаг үчүн онун (x_0, y_0) нөгтәси әтрафында (1) там артымыны тәдгиг етмәк лазымдыр. Бу мәгсәдлә, $f(x, y)$ функсијасынын (x_0, y_0) нөгтәси әтрафында Тејлор дүстуруну јазаг $(n=2)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \frac{1}{2}[f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)(\Delta y)^2], \quad 0 < \theta < 1.$$

Бурадан $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ олдуғуна әсасән

$$\Delta f = \frac{1}{2}[f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)(\Delta x)^2 +$$
$$+ 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\cdot\Delta y +$$
$$+ f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)(\Delta y)^2],\quad 0 < \theta < 1 \tag{3}$$

аларыг. Икитәртибли хүсуси төрәмәләр (x_0, y_0) нөгтәсиндә кәсилмәјән олдуғундан

$$f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y) = a_{11} + \alpha,$$
$$f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y) = a_{12} + \beta,$$
$$f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y) = a_{22} + \gamma$$
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \gamma = 0$$

мүнасибәтләрини јазмаг олар. Онда (3) бәрабәрлији ашағыдакы кими јазылар:

$$\Delta f = \frac{1}{2}[a_{11}(\Delta x)^2 + 2a_{12}\Delta x\cdot\Delta y + a_{22}(\Delta y)^2 +$$
$$+ \alpha(\Delta x)^2 + 2\beta\Delta x\cdot\Delta y + \gamma(\Delta y)^2]. \tag{4}$$

$M_0=(x_0, y_0)$ вә $M=(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ нөгтәләри арасындакы мәсафә ρ вә $\overline{M_0M}$ векторунун абсис охунун мүсбәт истигамәти илә әмәлә кәтирдији бучаг φ олсун. Онда

$$\Delta x = \rho\cos\varphi, \qquad \Delta y = \rho\sin\varphi$$

олар. Бу гијмәтләри (4) бәрабәрлијиндә јеринә јаздыгда,

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2}(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\cdot\sin\varphi + a_{22}\cdot\sin^2\varphi + \alpha\cos^2\varphi +$$
$$+ 2\beta\cos\varphi\sin\varphi + \gamma\sin^2\varphi)$$

вә ја

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2}[A(\varphi) + \varepsilon(\varphi)] \tag{5}$$

алыныр; бурада

$$A(\varphi) = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\cdot\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi,$$
$$\varepsilon(\varphi) = \alpha\cos^2\varphi + 2\beta\cos\varphi\cdot\sin\varphi + \gamma\sin^2\varphi$$

вә

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon(\varphi) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon(\varphi) = 0.$$

(5) бәрабәрлијиндән ајдындыр ки, ρ-нун кифајәт гәдәр кичик гијмәтләриндә функсијанын Δf там артымынын ишарәси $A(\varphi)$ ифадәсинин гијмәтиндән асылыдыр (чүнки, $\rho\to 0$ шәртиндә $\varepsilon(\varphi)\to 0$). Инди $A(\varphi)$ ифадәсини

$$A(\varphi) = \frac{1}{a_{11}}[(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2\varphi] \tag{6}$$

шәклиндә јазаг вә теоремдә көстәрилән һаллары ајрылыгда тәдгиг едәк.

I. $\lambda=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ вә $a_{11}>0$ олдугда $A(\varphi)$ ифадәси һәмишә мүсбәт олар. Доғрудан да, $\sin\varphi\neq 0$ олдугда (6) бәрабәрлијиндә мө'тәризәнин дахилиндәки ифадә мүсбәт олар:

$$(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + \lambda\sin^2\varphi > 0.$$

$\sin\varphi=0$ олдугда исә $\cos\varphi\neq 0$ олар ки, бу һалда да мө'тәризә дахилиндәки ифадә јенә дә мүсбәтдир:

$$(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + \lambda\sin^2\varphi = a_{11}^2\cos^2\varphi > 0.$$

Бурадан вә (5) бәрабәрлијиндән ајдындыр ки, $\lambda > 0$ вә $a_{11}>0$ олдугда (x_0, y_0) нөгтәсинин јахын әтрафындакы бүтүн нөгтәләрдә функсијанын там артымы мүсбәт олур: $\Delta f>0$, јә'ни $f(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алыр.

II. $\lambda>0$ вә $a_{11}<0$ олдугда исә јенә дә (6) бәрабәрлијиндә мө'тәризә дахилиндәки ифадә һәмишә мүсбәт олар (I һалда көстәрилдији кими) вә буна көрә дә $A(\varphi)$-нин ишарәси a_{11}-ин ишарәсинин ејни олур, јә'ни $A(\varphi)<0$.

Демәли, бу һалда (5) бәрабәрлијинә көрә $\Delta f<0$ олур ки, бу да $f(x, y)$ функсијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә локал максимум гијмәт алдығыны көстәрир.

III. $\lambda<0$ олдугда $A(\varphi)$ кәмијјәти (x_0, y_0) нөгтәсинин истәнилән әтрафында һәм мүсбәт вә һәм дә мәнфи гијмәтләр алыр. Доғрудан да, $a_{11}\neq 0$ оларса, $\varphi=\varphi_1=0$ көтүрдүкдә $A(\varphi) = A(\varphi_1)=a_{11}$, φ-јә $a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi=0$ тәнлијиндән тә'јин олунмуш $\varphi=\varphi_2$ гијмәтини вердикдә исә

$$A(\varphi) = A(\varphi_2) = \frac{\lambda}{a_{11}}\sin^2\varphi_2$$

олар. $A(\varphi_1)$ вә $A(\varphi_2)$ сыфырдан фәргли вә мүхтәлиф ишарәли әдәдләрдир. Демәли, $A(\varphi)$ кәмијјәти вә буна көрә дә Δf там артымы, (x_0, y_0) нөгтәсиндән чыхан $\varphi=\varphi_1$ вә $\varphi=\varphi_2$ шүалары үзәриндә мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр алыр. $a_{11}=0$ олдугда да $A(\varphi)$ кәмијјәтинин (x_0, y_0) нөгтәсинин истәнилән јахын әтрафында мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр алдығыны көстәрмәк олар. Бурадан ајдындыр ки, $f(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алмыр.

IV. $\lambda=0$ олдугда $f(x, y)$ функсијасы бөһран нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт ала да биләр, алмаја да биләр. Доғрудан да, $f(x, y)=x^4+y^4$ вә $\varphi(x, y) = x^3 + y^3$ функсијаларынын $(0, 0)$ бөһран нөгтәсидир. Бу функсијаларын һәр икиси үчүн $\lambda=0$ бәрабәрлији өдәнилир. Һәмин функсијаларын бири $f(x, y)=x^4+y^4$ функсијасы, $(0, 0)$ бөһран нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алыр, о бири $\varphi(x, y) = x^3 + y^3$ функсијасы исә $(0, 0)$ бөһран нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алмыр.

Мисал. $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 - 4xy + 3$ функсијасынын локал екстремум гијмәтләрини тапмалы.

$f'_x = x^2 - 4y$ вә $f'_y = 2y - 4x$ олдуғундан бөһран нөгтәләри

$$\begin{cases} x^2 - 4y = 0, \\ 2y - 4x = 0 \end{cases}$$

системини һәлл етмәклә тапылыр: (0, 0) вә (8, 16).

Икитәртибли хүсуси төрәмәләри тапаг:

$$f''_{xx} = 2x, \quad f''_{xy} = -4, \quad f''_{yy} = 2.$$

Ајдындыр ки, (0, 0) бөһран нөгтәсиндә $\lambda = 0 \cdot 2 - (-4)^2 = -16 < 0$, (8, 16) бөһран нөгтәсиндә исә $\lambda = 32 - 16 = 16 > 0$ олар. Демәли, (0, 0) нөгтәсиндә локал екстремум јохдур, $\lambda > 0$ вә $a_{11} = 16 > 0$ олдуғуна көрә исә (8, 16) нөгтәсиндә функсија локал минимум гијмәт алыр.

§ 3. ФУНКСИЈАНЫН ГЛОБАЛ ЕКСТРЕМУМУ

Фәрз едәк ки, $z = f(x, y)$ функсијасы гапалы мәһдуд σ областында тә'јин олунмуш кәсилмәјән функсијадыр. Онда кәсилмәјән функсијанын хассәсинә (XXVI, § 6) көрә онун һәмин областда сонлу дәгиг ашағы сәрһәди вә сонлу дәгиг јухары сәрһәди вар вә бу сәрһәдләрин һәр бирини һәмин гапалы областын һеч олмаса бир нөгтәсиндә алыр.

Бу һалда f функсијасынын дәгиг ашағы сәрһәди онун σ областында ән кичик гијмәти, дәгиг јухары сәрһәди исә σ областында онун ән бөјүк гијмәти олар. f функсијасынын σ областында ән бөјүк гијмәти онун һәмин областда *максимуму* (вә ја максимал гијмәти), ән кичик гијмәти исә һәмин областда *минимуму* (вә ја минимал гијмәти) адланыр.

Функсијанын гапалы σ областында максимумуна вә минимумуна бирликдә онун *глобал екстремуму* дејилир. Функсијанын локал екстремуму нөгтәләрин јахын әтрафына аид олдуғу һалда, онун глобал екстремуму бүтүн областа аиддир, јә'ни глобал екстремум бүтүн областа нәзәрән көтүрүлүр.

Функсија σ областындакы максимал гијмәтини ја областын дахили нөгтәсиндә, ја да областын сәрһәд нөгтәсиндә (областын контуру үзәриндә) алыр. Әкәр функсија σ областындакы максимал гијмәтини областын бир дахили нөгтәсиндә алырса, онда һәмин нөгтә онун локал максимум нөгтәси олар.

Функсија σ областындакы минимал гијмәтини дә ја областын сәрһәд нөгтәсиндә, ја да локал минимум нөгтәси олан дахили нөгтәдә алыр.

Беләликлә, функсијанын гапалы мәһдуд σ областында глобал екстремумуну тапмаг үчүн ашағыдакы гајда алыныр: *функсијанын σ областындакы бүтүн бөһран нөгтәләри тапылыр, функсијанын бу нөгтәләрдәки гијмәтләри вә областын сәрһәди үзәриндәки ән бөјүк вә ән кичик гијмәти һесабланыр. Бу гијмәтләрин ән кичији функсијанын σ областында минимуму, ән бөјүјү исә функсијанын σ областында максимумудур.*

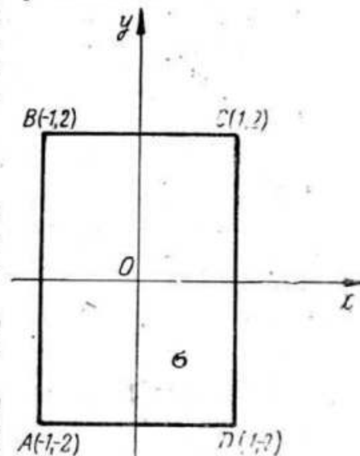
Мисал. $z = x^2 + y^2$ функсијасынын $\sigma = \begin{pmatrix} -1 \leq x \leq 1 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{pmatrix}$ дүзбучаглысында глобал екстремумуну тапмалы.

Функсијанын σ областынын дахилиндә јерләшән јеканә бөһран нөгтәси вардыр: $O(0, 0)$. Бу нөгтәдә функсија локал минимум гијмәт алыр:

$$z_{\lambda \min} = 0.$$

Функсијанын AB, BC, CD вә DA парчалары үзәриндә (шәкил 231) ән кичик гијмәти ујғун олараг 1, 16, 1 вә 16-дыр.

Функсијанын AB, BC, CD вә DA парчалары үзәриндә ән бөјүк гијмәти исә 17-дир.



Шәкил 231

Демәли, σ областынын $ABCD$ контуру үзәриндә функсијанын ән кичик гијмәти 1 вә ән бөјүк гијмәти исә 17-дир. Бурадан ајдындыр ки, верилмиш функсијанын σ дүзбучаглысында минимуму 0, максимуму исә 17 әдәдинә бәрабәрдир:

$$z_{\min} = 0, \qquad z_{\max} = 17.$$

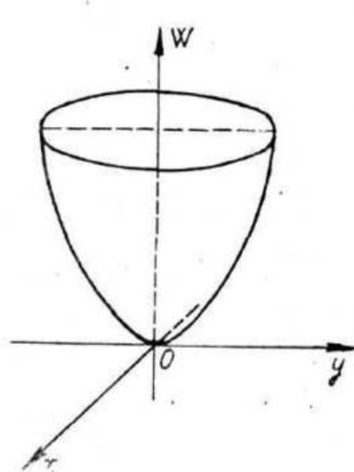
§ 4. ШӘРТИ ЕКСТРЕМУМ

Чохдәјишәнли функсијанын локал екстремуму тә'јин олундугда онун аргументләри асылы олмајан (сәрбәст) дәјишәнләр һесаб олунур. Функсијанын аргументләри сәрбәст дәјишәнләр олмајыб мүәјјән мүнасибәтләрлә (бунлара рабитә тәнликләри дејилир) бағлы да ола билир. Бу һалда, функсијанын һәмин мүнасибәтләрин өдәнилдији нөгтәләр чохлуғунда екстремумуна *шәрти екстремум* дејилир. Буну бир мисал үзәриндә изаһ едәк.

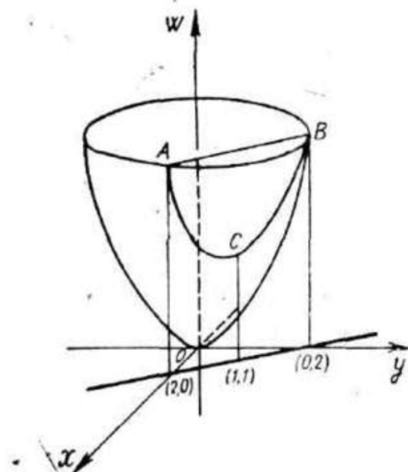
Бүтүн мүстәвидә тә'јин олунмуш $W = x^2 + y^2$ функсијасынын (0, 0) нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алдығы мә'лумдур (§ 1, мисал 1). Бу, функсијанын графикиндән дә ајдындыр (шәкил 232). Бурада x вә y дәјишәнләри һеч бир мүнасибәтлә бағлы дејилдир (онлар асылы олмајан дәјишәнләрдир).

Инди, фәрз едәк ки, x вә y дәјишәнләри $y + x - 2 = 0$ мүнасибәти (рабитә тәнлији) илә бағлыдыр. Бу рабитә тәнлијини өдәјән нөгтәләр чохлуғу дүз хәтдир. Верилмиш $W = x^2 + y^2$ функсијасынын һәмин дүз хәтт үзәриндә алдығы гијмәтләр

ABC параболасыны тәшкил едир (шәкил 233). Бу гиjмәтләрин ән кичиjи олан әдәд, jә'ни функсиjанын (1, 1) нөгтәсиндә (бу нөгтә дүз хәтт үзәриндә jерләшир) алдығы гиjмәт, һәмин функсиjанын *шәрти минимум* гиjмәтидир. Функсиjанын көстәрилән шәрти минимум гиjмәтини белә тапмаг олар: рабитә



Шәкил 232



Шәкил 233

тәнлиjиндән y дәjишәни x васитәсилә $y=2-x$ кими тапылараг функсиjада jеринә jазылыр. Алынан бирдәjишәнли $W=x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4$ функсиjасынын локал екстремуму тапылыр. Бу функсиjа $x=1$ нөгтәсиндә $W=2$ локал минимум гиjмәтини алыр. $W=x^2+y^2$ функсиjасы һәмин гиjмәти рабитә тәнлиjинә әсасән (1, 1) нөгтәсиндә алыр. Бу гиjмәт функсиjанын шәрти минимумудур.

Демәли, функсиjанын шәрти екстремуму онун бүтүн тә'jин областындакы локал екстремуму олмаjыб, jалныз рабитә тәнликләринин өдәнилдиjи нөгтәләр чохлуғундакы локал екстремумудур. Функсиjанын шәрти екстремуму анлаjышыны үмуми һалда ашағыдакы кими тә'jин етмәк олар.

Фәрз едәк ки, $f(X, Y)=f(x_1,\ldots, x_n, \; y_1,\ldots, y_m)$ вә

$$F_k(X, Y)=F_k(x_1,\ldots, x_n, \; y_1,\ldots, y_m) \quad (k=1, 2,\ldots m)$$

$\sigma \subset E_{n+m}$ областында тә'jин олунмуш функсиjалардыр. σ областынын

$$F_k(x_1,\ldots, x_n, \; y_1,\ldots, y_m)=0 \quad (k=1, 2,\ldots, m) \qquad (1)$$

бәрабәрликләрини (рабитә тәнликләрини) өдәjән (X, Y) нөгтәләри чохлуғу E вә бу чохлуғун һәр һансы нөгтәси $(X^{(0)}, Y^{(0)})=(x_1^{(0)},\ldots, x_n^{(0)}, \; y_1^{(0)},\ldots, y_m^{(0)})\in E$ олсун.

Тә'риф. $(X^{(0)}, Y^{(0)})\in E$ *нөгтәсинин һәр һансы* $O_\delta[(X^{(0)}, Y^{(0)})]$ $(\delta>0)$ *әтрафында jерләшән бүтүн* $(X, Y)\in E$ *нөгтәләриндә*

$$f(X, Y)\leqslant f(X^{(0)}, Y^{(0)}) \qquad (2)$$

бәрабәрсизлиjи өдәнилдикдә, дејирләр ки, $f(X, Y)$ *функсиjасы* $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ *нөгтәсиндә шәрти локал максимум гиjмәт алыр.* $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ *нөгтәсинин һәр һансы* $O_\delta[(X^{(0)}, Y^{(0)})]$ *әтрафынын бүтүн* $(X, Y)\in E$ *нөгтәләриндә*

$$f(X, Y)\geqslant f(X^{(0)}, Y^{(0)}) \qquad (3)$$

бәрабәрсизлиjи өдәнилдикдә исә, дејирләр ки, $f(X, Y)$ *функсиjасы* $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ *нөгтәсиндә шәрти локал минимум гиjмәт алыр.*

Функсиjанын шәрти локал максимуму вә шәрти локал минимуму бирликдә функсиjанын шәрти (локал) екстремуму адланыр. Гејд едәк ки, функсиjанын шәрти екстремумуна бә'зән функсиjанын нисби екстремуму да дејилир.

Верилмиш $(n+m)$-дәjишәнли $W=f(X, Y)$ функсиjасынын (1) рабитә шәртләри дахилиндә шәрти екстремумунун тапылмасы бә'зән бир n дәjишәнли функсиjанын ади (шәртсиз) локал екстремумунун тапылмасына кәтирилир. Бу мәгсәдлә (1) рабитә тәнликләр системиндән $y_1, y_2,\ldots, y_m$ дәjишәнләри $x_1, x_2,\ldots, x_n$ васитәсилә тапылыр (әлбәттә, бу мүмкүндүрсә!):

$$y_k=\varphi_k(x_1, x_2,\ldots, x_n) \quad (k=1, 2,\ldots, m). \qquad (4)$$

Сонра исә бу гиjмәтләри верилмиш функсиjада jеринә jазмагла ашағыдакы кими бир n-дәjишәнли функсиjа алыныр:

$$W=f(X, Y)=f(x_1,\ldots, x_n, \; y_1,\ldots, y_m)=$$
$$=f[x_1,\ldots, x_n, \; \varphi_1(x_1,\ldots, x_n), \varphi_2(x_1,\ldots, x_n),\ldots,\varphi_m(x_1,\ldots,x_n)]=$$
$$=\Phi(x_1, x_2,\ldots, x_n)$$

вә jа

$$W=\Phi(x_1, x_2,\ldots, x_n). \qquad (5)$$

Бу функсиjанын аргументләри асылы олмаjан дәjишәнләрдир (онлар һеч бир мүнасибәтлә бағлы дејилдир). Беләликлә, верилмиш $(n+m)$-дәjишәнли $W=f(X, Y)$ функсиjасынын шәрти екстремумунун тапылмасы мәсәләси n-дәjишәнли (5) функсиjасынын ади локал екстремумунун тапылмасына кәтирилмиш олур. Функсиjанын локал екстремумунун тапылма гаjдасы исә әввәлки параграфлардан мә'лумдур.

Әлбәттә, бу әмәлиjјаты апармаг һәмишә мүмкүн олмур. Чүнки (1) рабитә тәнликләри системини $y_1, y_2,\ldots, y_m$ дәjишәнләринә нәзәрән һәлл етмәк чох вахт чәтин олур. Белә һалларда верилмиш функсиjанын шәрти екстремуму башга үсулларла тапылыр.

Мисал. Верилмиш мүсбәт a әдәдини n саjда мәнфи олмаjан елә $x_1, x_2,\ldots, x_n$ топлананларынын чәми шәклиндә көстәрмәли ки, онларын һасили ән бөjүк олсун.

Һ ә л л и. Шәртә көрә n-дәјишәнли

$$W = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \qquad (6)$$

функсијасынын

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \qquad (7)$$

мүнасибәти (рабитә тәнлији) өдәнилдикдә шәрти екстремумуну тапмаг тәләб олунур. (7) бәрабәрлијиндән x_n кәмијјәтини тапыб (6) функсијасында јеринә јазаг:

$$W = x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1}(a - x_1 - \cdots - x_{n-1}). \qquad (8)$$

$(n-1)$-дәјишәнли (8) функсијасынын екстремумуну тапмаг үчүн әввәлчә бөһран нөгтәләрини тапаг. Буну исә

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x_1} = x_2 \cdot x_3 \cdots x_{n-1}(a - 2x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}) = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_2} = x_1 \cdot x_3 \cdots x_{n-1}(a - x_1 - 2x_2 - \cdots - x_{n-1}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_{n-1}} = x_1 \cdot x_3 \cdots x_{n-2}(a - x_1 - x_2 - \cdots - 2x_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

системини вә ја

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = a, \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + x_{n-1} = a, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + 2x_{n-1} = a \end{array}\right\} \qquad (9)$$

системини һәлл етмәклә тапмаг олар.

(9) тәнликләрини тәрәф-тәрәфә топласаг, аларыг:

$$n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) = (n-1)a,$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = a - \frac{a}{n}.$$

Бурадан вә (9) бәрабәрликләриндән

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{a}{n} \qquad (10)$$

алынныр. Онда (7) бәрабәрлијинә көрә $x_n = \frac{a}{n}$ олар.

$(n-1)$-дәјишәнли (8) функсијасы

$$0 \leqslant x_1 \leqslant a, \ldots, 0 \leqslant x_{n-1} \leqslant a, \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leqslant a \quad (11)$$

шәртләри илә тә'јин олунан $(n-1)$ өлчүлү гапалы областда тә'јин олунмушдур вә онун сәрһәдләриндә сыфра бәрабәрдир. (10) бәрабәрликләри илә тә'јин олунан јеканә $\left(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}\right)$ екстремум нөгтәси исә (11) областынын дахили нөгтәсидир. Демәли, (8) функсијасы һәмин нөгтәдә максимум гијмәт (бунa көрә дә (11) областында ән бөјүк гијмәт) алыр. Бурадан ајдындыр ки, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вуругларынын һамысы бир-биринә бәрабәр олдугда (6) функсијасы ән бөјүк гијмәт алыр.

$$W_0 = \max W = \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} \cdots \frac{a}{n} = \left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

§ 5. ЛАГРАНЖЫН ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ВУРУГЛАР УСУЛУ

Јухарыда көстәрдик ки, верилмиш чохдәјишәнли функсијанын шәрти екстремумуну тапмагы ади локал екстремум тапмаға кәтирмәк чох вахт мүмкүн олмур. Бир сыра һалларда исә бу үсул әлверишли дејилдир. Буна көрә дә функсијанын шәрти екстремум гијмәтләрини ала биллији нөгтәләри (бунлары, шәрти екстремум үчүн стасионар нөгтәләр адландыраг) башга үсулларла тапараг онлары тәдгиг етмәк лазым кәлир.

Чохдәјишәнли функсијанын шәрти екстремум үчүн стасионар нөгтәләрини шәрти екстремумун варлығы үчүн зәрури шәрт васитәсилә тапмаг олур.

Чохдәјишәнли функсијаларын шәрти екстремум үчүн стасионар нөгтәләрини Лагранжын гејри-мүәјјән вуруглар үсулу илә тапмаг даһа мүнасибдир. Буну изаһ етмәк үчүн, фәрз едәк ки, $W = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ функсијасынын

$$F_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1)$$

рабитә шәртләри (тәнликләри) дахилиндә шәрти екстремумуну тапмаг тәләб олунур. Функсијанын диференсиалланан олдуғу нөгтәдә локал екстремум гијмәт алмасы үчүн зәрури шәрт һәмин нөгтәдә там диференсиалын сыфра бәрабәр олмасыдыр (§ 1):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_m}dy_m = 0. \qquad (2)$$

(1) бәрабәрликләриндән исә

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_k}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m}dy_m = 0. \qquad (3)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m)$$

мүнасибәтләри алыныр. Бу бәрабәрликләри ујғун олараг, һәләлик мә'лум олмајан $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ әдәдләринә вураraг, алынан бәрабәрликләри (2) бәрабәрлији илә тәрәф-тәрәфә топлајаг. Онда

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_m}dy_m = 0 \qquad (4)$$

мүнасибәти алынар; бурада

$$\psi = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_m F_m. \qquad (5)$$

Инди $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ көмәкчи вуругларыны елә сечәк ки,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_2} = 0, \cdots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_m} = 0 \qquad (6)$$

бәрабәрликләри өдәнилсин. (6) бәрабәрликләринин өдәнилмәси үчүн $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ вуруглары

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0 \end{cases}$$

хәтти тәнликләр системиндән тапылмалыдыр. Системин әсас детерминанты олан

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$$

Јакобианы сыфырдан фәргли олдугда исә бу һәмишә мүмкүндүр.

(6) бәрабәрликләринә әсасән (4) бәрабәрлији

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n = 0 \qquad (7)$$

шәклиндә јазылар. Бурадан $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сәрбәст дәјишәнләр олдуғуна көрә)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_n} = 0 \qquad (8)$$

алыныр. (1), (6) вә (8) бәрабәрликләри бирликдә ашағыдакы $n+2m$ сајда тәнликләр системини әмәлә кәтирир:

$$\begin{cases} F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_m = 0, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y_1} = 0, \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial y_2} = 0, \ldots, \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial y_m} = 0, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0, \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial x_n} = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Бу системдән шәрти екстремум үчүн стасионар нөгтәләрин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ координатлары вә $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ көмәкчи әмсаллары тапылыр. Тапылан стасионар нөгтәләрдә f функсијасы шәрти екстремум гијмәт ала да биләр, алмаја да биләр. Буну јохламаг үчүн әлавә тәдгигат апармаг лазымдыр.

Беләликлә, функсијанын шәрти екстремум гијмәтләри ала билдији нөгтәләри тапмаг үчүн ашағыдакы садә гајда алыныр:

$(n+m)$-дәјишәнли f функсијасынын (1) рабитә шәртләри дахилиндә шәрти екстремум гијмәтләри ала билдији $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ нөгтәләрини тапмаг үчүн (5) көмәкчи функсијасы (буна Лагранж функсијасы дејилир) гурулур. Сонра исә бу функсијанын $x_k (k=1, 2, \ldots, n)$, $y_i (i=1, 2, \ldots, m)$ вә $\lambda_i (i=1, 2, \ldots, m)$ дәјишәнләринә көрә хүсуси төрәмәләри тапылараг сыфра бәрабәр едилир. Алынан (9) системиндән шәрти екстремум үчүн стасионар нөгтәләрин координатлары $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ вә $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ вуруглары тапылыр.

Хүсуси һалда, икидәјишәнли $f(x, y)$ функсијасынын $\varphi(x, y) = 0$ шәртиндә ахтарылан екстремуму үчүн стасионар нөгтәләрин x, y координатлары ә көмәкчи λ вуруғу

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

системиндән тапылмалыдыр.

Тутаг ки, (10) системинин һәлләриндән бири x_0, y_0 вә λ әдәдләридир. Онда $M_0 = (x_0, y_0)$ нөгтәси $f(x, y)$ функсијасынын шәрти екстремуму үчүн стасионар нөгтә олар. Јухарыда дедијимиз кими бу стасионар нөгтәдә f функсијасы шәрти екстремум гијмәт ала да биләр, алмаја да биләр. Буну јохламаг үчүн ашағыдакы тәклифдән истифадә етмәк олар.

Шәрти екстремумун варлығы үчүн кафи шәрт: $f(x, y)$ вә $\varphi(x, y)$ функсијаларынын M_0 стасионар нөгтәсиндә икитәртибли кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри варса вә $\psi(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ Лагранж функсијасы васитәсилә дүзәлдилмиш

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & \psi''_{xx}(M_0) & \psi''_{xy}(M_0) \\ \varphi'_y(M_0) & \psi''_{xy}(M_0) & \psi''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} \qquad (11)$$

детерминанты мүсбәтдирсә $(\Delta > 0)$, онда f функсијасы M_0 нөгтәсиндә шәрти минимум гијмәт алыр, детерминант мәнфи $(\Delta < 0)$ олдугда исә f функсијасы M_0 нөгтәсиндә шәрти максимум гијмәт алыр.

Бу тәклифин исбаты верилмир.

Мисал. $W = xy$ функсијасынын $x + y = 2$ шәртиндә екстремуму тапмалы.

Бу һалда Лагранж функсијасы

$$\psi(x, y) = xy + \lambda(x + y - 2)$$

вә онун хүсуси төрәмәләри $\psi'_x = y + \lambda$, $\psi'_y = x + \lambda$ вә $\psi'_\lambda = x + y - 2$ олдуғундан (10) системи

$$\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ y + x - 2 = 0 \end{cases}$$

кими олар. Бурадан

$$y = -\lambda, \quad x = -\lambda, \quad -2\lambda - 2 = 0, \quad \lambda = -1,$$
$$x = 1, \qquad y = 1$$

алыныр. Демәли, (1, 1) нөгтәси шәрти екстремум үчүн стасионар нөгтәдир. Һәмин нөгтәдә (11) детерминанты мәнфи әдәдә бәрабәр $(\Delta = -1 < 0)$ олдуғундан функсија (1, 1) нөгтәсиндә шәрти максимум гијмәт алыр:

$$W_{max} = 1.$$

§ 6. ӘН КИЧИК КВАДРАТЛАР ҮСУЛУ

Тутаг ки, y кәмијјәтинин x-дән функсионал асылылығыны експериментал (емпирик) олараг тә'јин етмәк лазымдыр. Бу мәгсәдлә x-ин мүхтәлиф $x_1, x_2, \ldots, x_n$ гијмәтләринә y-ин ујғун олан $y_1, y_2, \ldots, y_n$ гијмәтләри експеримент нәтиҹәсиндә тапылыр вә алынмыш гијмәтләр ашағыдакы ҹәдвәл шәклиндә јазылыр:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Беләликлә, експеримент нәтиҹәсиндә

$$(x_1, y_1),\quad (x_2, y_2),\ldots, (x_n, y_n) \qquad (1)$$

кими n дәнә „експериментал нөгтә“ алыныр. Бу нөгтәләри (Oxy) координат мүстәвиси үзәриндә гејд едирләр. Нөгтәләрин јерләшмә характеринә вә ја башга нәзәри мүлаһизәләрә әсасән ахтарылан функсионал асылылығын формасы тәхмини олараг мүәјјән едилир. Намә'лум функсија

$$y = a_1x + a_2,\quad y = a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

$$y = a_1x^{a_2},\quad y = a_1 + a_2\sin x + a_3\cos x, \ldots$$

вә с. шәклиндә ола биләр. Бу функсијалар $a_1, a_2, a_3, \ldots$ кими намә'лум параметрләрдән асылыдыр. Әкәр експеримент заманы һеч бир хәтаја јол верилмирсә, онда m дәнә параметрдән хәтти асылы олан функсијаны тә'јин етмәк үчүн x-ин m дәнә гијмәтиндә y-ин ујғун гијмәтләрини билмәк кифајәтдир. Хүсуси һалда, ики параметрдән асылы

$$y = a_1x + a_2$$

функсијасыны тапмаг үчүн (јә'ни онун a_1 вә a_2 параметрләрини тә'јин етмәк үчүн) x-ин ики x_1 вә x_2 гијмәтиндә y-ин y_1 вә y_2 гијмәтләрини билмәк кифајәтдир:

$$y_1 = a_1x_1 + a_2,\qquad y_2 = a_1x_2 + a_2.$$

Бурадан a_1 вә a_2 параметрләри дәгиг тапылыр.

Лакин реал иш просесиндә белә олмур. Експеримент апарыларкән бир чох тәсадүфи хәталара (өлчмә апаранын бурахдығы хәта, өлчү апаратынын хәтасы вә с.) јол верилир вә бунун да нәтиҹәсиндә x вә y үчүн тапылан гијмәтләр дәгиг олмур. Буна көрә дә m дәнә параметрдән асылы олан

$$y = \varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad (2)$$

функсијасыны дәгиг тапмаг үчүн m дәнә експериментин нәтиҹәсини билмәк, јә'ни x-ин $x_1, x_2, \ldots, x_m$ гијмәтләриндә y-ин $y_1, y_2, \ldots, y_m$ гијмәтләрини експериментдән тапмаг кифајәт етмир. Нәтиҹәдә чохлу сајда ($n>m$) експеримент апармаг лазым кәлир.

Експеримент нәтиҹәсиндә алынан y_k гијмәтләри илә ахтарылан (2) функсијасынын x_k нөгтәсиндәки $\varphi(x_k, a_1, \ldots, a_m)$ гијмәтләри (нәзәри һесабланан гијмәтләри), үмумијјәтлә, уст-үстә дүшмүр. Бу заман һәмин гијмәтләрин мејли адланан

$$\varepsilon_k = y_k - \varphi(x_k, a_1, \ldots, a_m)\quad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (3)$$

фәргләри алыныр.

Бурада әсас мәсәлә намә'лум $a_1, a_2, \ldots, a_m$ параметрләри үчүн елә гијмәтләр тапмагдыр ки, тапылан (2) функсијасы һәр һансы мә'нада ахтарылан функсијаја даһа јахын олсун. Параметрләрин гијмәтләри мүхтәлиф үсулларла тапылыр.

Бу мәсәләни ән кичик квадратлар үсулу илә дә һәлл етмәк олар. Бу үсул ашағыдакы „ән кичик квадратлар принсипинә“ әсасланыр: параметрләр үчүн ән әлверишли гијмәтләр (3) мејлләри квадратлары ҹәминин ән кичик, јә'ни

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} [y_k - \varphi(x_k, a_1, a_2, \ldots, a_m)]^2 = \min \qquad (4)$$

олмасы шәртиндән тапылыр.

Беләликлә, гојулмуш мәсәләнин һәлли m-дәјишәнли

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{k=1}^{n} [y_k - \varphi(x_k, a_1, a_2, \ldots, a_m)]^2 \qquad (5)$$

функсијасынын минимум гијмәтини алдығы нөгтәләрин тапылмасына кәтирилир. Белә нөгтәләр исә § 1-дә шәрһ едилән үсулла тапылыр.

(5) функсијасынын минимум гијмәт алдығы нөгтәләри

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_m} = 0 \qquad (6)$$

системини вә ја

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} [y_k - \varphi(x_k, a_1, a_2, \ldots, a_m)]\, \frac{\partial \varphi(x_k, a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_1} = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} [y_k - \varphi(x_k, a_1, a_2, \ldots, a_m)]\, \frac{\partial \varphi(x_k, a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_2} = 0, \qquad (7) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{k=1}^{n} [y_k - \varphi(x_k, a_1, a_2, \ldots, a_m)]\, \frac{\partial \varphi(x_k, a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_m} = 0 \end{aligned}$$

системини һәлл етмәклә тапмаг олар. (7) системинин тәнликләринин сајы ахтарылан $a_1, a_2, \ldots, a_m$ параметрләринин сајына бәрабәрдир.

Һәр бир конкрет һалда (7) системинин һәллинин варлығы вә тапылмыш нөгтәдә (5) функсијасынын минимум гијмәт алмасы ајрыҹа тәдгиг едилмәлидир. Мәсәлән, тутаг ки, (2) функсијасы $\varphi(x, a_1, a_2) = a_1x + a_2$ шәклиндә ахтарылыр. Онда (5) функсијасы

$$f(a_1, a_2) = \sum_{k=1}^{n} [y_k - (a_1x_k + a_2)]^2 \qquad (8)$$

шәклиндә олар. Бурада x_k вә y_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) илә експериментдән тапылмыш вә ҹәдвәл шәклиндә јазылмыш мә'-

лум әдәдләр ишарә олунмушдур. (8) функсијасы үчүн (7) системи

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a_1} = -2\sum_{k=1}^{n} [y_k - (a_1 x_k + a_2)]\, x_k = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a_2} = -2\sum_{k=1}^{n} [y_k - (a_1 x_k + a_2)] = 0 \end{cases}$$

вә ја

$$a_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + a_2 \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

$$a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k + a_2 \cdot n = \sum_{k=1}^{n} y_k \qquad (9)$$

шәклиндә олар. Бурадан a_1 вә a_2 параметрләри тапылыр:

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - (\overline{x}) \cdot (\overline{y})}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \quad a_2 = \frac{\overline{x^2} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}. \qquad (10)$$

Бурада

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k,$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

ишарәләри гәбул едилмишдир.

Тапылмыш (10) нөгтәсиндә (8) функсијасы минимум гијмәт алыр. Доғрудан да,

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} = 2n, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} = 2\sum_{k=1}^{n} x_k$$

олдуғундан

$$\lambda = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 4n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(2\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 =$$

$$= 4\sum_{i,k} (x_i - x_k)^2 > 0, \quad a_{11} > 0$$

олар ки, бу да (§ 2) (8) функсијасынын (10) нөгтәсиндә минимум гијмәт алдығыны көстәрир.

Ејни гајда илә үч, дөрд вә с. сајда параметрдән асылы олан хәтти функсијалары да тапмаг олар.

V ҺИССӘ

АДИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР ВӘ ОНЛАРЫН ҺӘЛЛИ ҮСУЛЛАРЫ

§ 1. ҮМУМИ АНЛАЈЫШЛАР

Намә'лум функсијанын төрәмәси верилдикдә ону интеграллама (III һиссә) васитәсилә тапмаг олур. Бир чох һалларда исә функсијанын төрәмәси дејил, ахтарылан y функсијасы, x аргументи вә y функсијасынын x-ә нәзәрән $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ төрәмәләри арасында мүәјјән асылылыг верилир. Бу асылылыгдан һәмин намә'лум функсијаны тапмаг тәләб олунур. Belә мәсәләләрлә диференсиал тәнликләр нәзәријјәсиндә мәшғул олурлар.

Тә'риф. *Ихтијари x дәјишәни, онун $y = y(x)$ функсијасы вә бу функсијанын һәмин x дәјишәнинә нәзәрән $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ төрәмәләри дахил олан тәнлијә ади диференсиал тәнлик дејилир.*

Ики вә ја чох сајда дәјишәндән асылы олан функсија вә бу функсијанын һәмин дәјишәнләрә нәзәрән хүсуси төрәмәләри дахил олан тәнлијә исә *хүсуси төрәмәли диференсиал тәнлик* дејилир.

Диференсиал тәнлијә дахил олан ән јүксәктәртибли төрәмәнин тәртибинә һәмин *диференсиал тәнлијин тәртиби* дејилир. n-тәртибли ади диференсиал тәнлик үмуми шәкилдә

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

кими јазылыр. Мәсәлән,

$$y' + 4xy + 3 = 0$$

вә

$$3y'' + 2y' + xy + 5 = 0$$

тәнликләри ујғун олараг биртәртибли вә икитәртибли ади диференсиал тәнликләрдир.

Бурада јалныз ади диференсиал тәнликләр өјрәнилир.

(1) диференсиал тәнлијини x-ин E чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә еднијән һәр бир $y = \varphi(x)$ функсијасына һәмин

тәнлијин E чохлуғунда һәлли дејилир. Бу, о демәкдир ки, $y=\varphi(x)$ функсијасыны вә онун $\varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ төрәмәләрини (1) тәнлијиндә јеринә јаздыгда һәмин тәнлик E чохлуғунда x-ә нәзәрән ејнилијә чеврилир:

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0.$$

Верилмиш диференсиал тәнлијин өдәјән функсија гејри-ашкар вә параметрик шәкилдә дә верилә биләр. Бу һалда һәмин функсијаја бә'зән диференсиал тәнлијин интегралы дејилир.

Биз кәләчәкдә диференсиал тәнлијин һәлли вә интегралы истилаһларынын икисини дә (һеч бир фәрг гојмадан) ишләдәчәјик.

Мәсәлән, $y=e^x$ вә $y=e^{-x}$ функсијаларынын һәр бири бүтүн әдәд охунда

$$y''-y=0 \qquad (2)$$

диференсиал тәнлијинин һәллидир:

$$(e^x)''-e^x\equiv 0, \quad (e^{-x})''-e^{-x}\equiv 0.$$

Үмумијјәтлә, C_1 вә C_2 сабитләринин истәнилән гијмәтләриндә

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

функсијасы бүтүн әдәд охунда (2) тәнлијинин һәллидир:

$$(C_1e^x+C_2e^{-x})''-(C_1e^x+C_2e^{-x})\equiv 0.$$

Бурадан ајдындыр ки, верилмиш диференсиал тәнлијин бир нечә вә һәтта сонсуз сајда һәлли ола биләр.

Верилмиш диференсиал тәнлијин бүтүн һәлләрини тапмаг вә онларын хассәләрини өјрәнмәк диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин әсас мәсәләсидир. Диференсиал тәнликләрин һәлли чох заман функсијаларын интегралланмасы васитәсилә тапылыр. Буна көрә дә диференсиал тәнлијин һәлләринин тапылмасы әмәлинә чох заман диференсиал тәнлијин интегралланмасы дејилир.

Диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин бөјүк елми вә практики әһәмијјәти вардыр. Физика, механика вә с. кими мүхтәлиф елм саһәләринин вә техниканын бир чох мүһүм мәсәләләринин һәлли диференсиал тәнликләрә кәтирилир.

Буну ики мисал үзәриндә изаһ едәк.

Мисал 1. Күтләси m олан мадди нөгтә мүәјјән јүксәкликдән ағырлыг гүввәсинин тә'сири илә сәрбәст дүшүр. Һаванын мүгавимәтини нәзәрә алмадан, нөгтәнин һәрәкәт гануну тапмалы.

Һәлли. Һәрәкәт едән нөгтәјә тә'сир едән F гүввәси онун һәрәкәтинин a тә'чили васитәсилә

$$F=ma \qquad (3)$$

кими тапылыр (Нјутонун икинчи гануну). Нөгтәјә анчаг

ағырлыг гүввәси тә'сир етдијиндән $F=P=mg$ олар. Һәрәкәт едән чисмин тә'чили исә кедилән мәсафәнин замана көрә икитәртибли төрәмәси (XIV, § 3)

$$a=\frac{d^2S(t)}{dt^2}=S''(t)$$

олдуғундан (3) бәрабәрлијини

$$m\cdot S''(t)=mg$$

вә ја

$$S''(t)=g \qquad (4)$$

кими јазмаг олар.

(4) бәрабәрлији ахтарылан $S(t)$ функсијасына нәзәрән икитәртибли диференсиал тәнликдир. Јохламаг олар ки, бу тәнлијин һәлли

$$S(t)=\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2 \qquad (5)$$

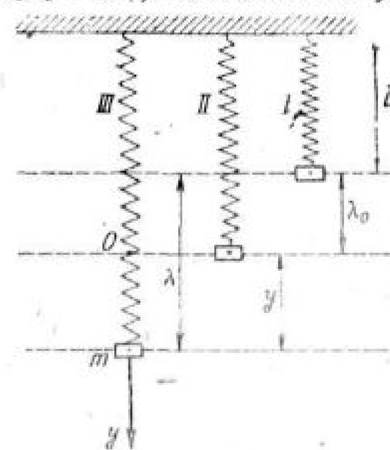
функсијасыдыр. Һәрәкәт едән нөгтәнин башланғыч сүр'әти $S'(0)=V_0$ вә башланғыч мәсафәси $S(0)=S_0$ мә'лум олдугда (5) функсијасына дахил олан ихтијари C_1 вә C_2 сабитләрини тапмаг олар:

$$C_1=V_0 \quad \text{вә} \quad C_2=S_0.$$

Бу һалда мадди нөгтәнин һәрәкәт гануну ашағыдакы кими јазылыр:

$$S(t)=\frac{gt^2}{2}+V_0t+S_0.$$

Мисал 2 (һармоник рәгс). Күтләси m олан јүк еластики јај (тәбии вәзијјәтдә јајын узунлуғу l-дир) васитәсилә шагули вәзијјәтдә асылмышдыр. Ону мүәјјән гүввә илә ашағыја тәрәф чәкәрәк сонра бурахырлар. Һаванын мүгавимәтини вә јајын күтләсини нәзәрә алмадан јүкүн һәрәкәт ганунуну тапмалы.



Шәкил 234

Һәлли. Јүкүн таразлыг вәзијјәтини координат башланғычы көтүрмәклә координат охуну јај истигамәтиндә ашағыја тәрәф узадаг (шәкил 234). Јүкүн таразлыг вәзијјәтиндән ашағыја тәрәф узаглашдығы мәсафә (инһирафы) y олсун. Бахылан анда јај чәми λ гәдәр узанмышдырса (I һалдан III һала кечәркән) вә онун дартылмамыш һалындан таразлыг һалына (I һалдан II һала) кечәркән узандығы мәсафә λ_0 оларса, онда $\lambda=\lambda_0+y$ олар.

Ајдындыр ки, верилмиш јүкә ики гүввә тә'сир едир: јајын еластиклик гүввәси вә ағырлыг гүввәси.

Һүк[1] ганунуна көрә јајын еластиклик гүввәси онун узандығы мәсафә илә мүтәнасибдир: $-\kappa\lambda$ (бурада κ һәр јај үчүн сабит кәмијјәт олуб „јајын бәрклији" адланыр).

Сүкунәт һалында исә јүкүн ағырлыг гүввәси јајын еластиклик гүввәси илә таразлашдығындан $P = \kappa\lambda_0$ олар. Онда Нјутонун икинчи ганунуна көрә

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa\lambda + \kappa\lambda_0$$

вә ја

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y$$

олар. Бурадан $\left(\frac{\kappa}{m} = \omega^2\right.$ гәбул етмәклә$\left.\right)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

вә ја

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (6)$$

диференсиал тәнлији алыныр.

(6) тәнлији *һармоник осилјаторун тәнлији* адланыр. Һәмин тәнлик јүкүн сәрбәст рәгсләрини тә'јин едир. (6) тәнлијини һәлл етмәклә јүкүн һәрәкәт ганунуну тапмаг олар.

Белә тәнликләрин һәлли үсуллары кәләчәкдә көстәриләчәкдир (XXXI).

§ 2. БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР ВӘ ОНЛАРЫН ҺӘНДӘСИ МӘ'НАСЫ

Биртәртибли диференсиал тәнлик үмуми шәкилдә

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

кими јазылыр. Бу тәнлији ахтарылан функсијанын y' төрәмәсинә нәзәрән һәлл етмәк мүмкүн олдугда

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

шәклиндә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли диференсиал тәнлик алыныр.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли диференсиал тәнлији, һәминдә

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (3)$$

диференсиал шәклиндә јазмаг олар. Доғрудан да, (2) тәнлијини

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad f(x, y)\,dx - dy = 0$$

[1] Роберт Һук (1635—1703) инкилис алимидир.

кими јазмаг олар. Бурада $M(x, y) = f(x, y)$ вә $N(x, y) = -1$ гәбул етмәклә (3) шәклиндә диференсиал тәнлик алыныр.

Тәрсинә, (3) шәклиндә диференсиал тәнлији $N(x, y) \neq 0$ олдугда

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \qquad (4)$$

$M(x, y) \neq 0$ олдугда исә

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \qquad (5)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Беләликлә, $N(x, y) \neq 0$ олдугда (2) вә (3) тәнликләри ејникүчлү олар. Үмуми һалда исә (3) тәнлији ики тәнликлә: (4) вә (5) тәнликләри илә ејникүчлүдүр.

Биртәртибли диференсиал тәнлијин (3) диференсиал шәклинин үстүн чәһәти ондан ибарәтдир ки, орада x вә y дәјишәнләри ејни һүгуглудур, онларын һәр бирини аргумент вә ја функсија һесаб етмәк олар.

Мә'лумдур ки, диференсиал тәнлијин һәлли $y = \varphi(x)$ ашкар шәкилдән башга гејри-ашкар вә параметрик шәкилләрдә дә верилә биләр.

Әкәр

$$\Phi(x, y) = C \qquad (6)$$

тәнлији васитәсилә тә'јин олунан гејри-ашкар $y = y(x)$ функсијасы (XXVIII, § 1) (1) тәнлијини өдәјирсә, јә'ни x-ин мүәјјән E чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә $F[x, y(x), y'(x)] \equiv 0$ ејнилији өдәнилирсә, онда дејирләр ки, (2) тәнлијинин һәлли (6) тәнлији васитәсилә гејри-ашкар шәкилдә верилмишдир.

(1) тәнлији һәллинин

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

параметрик шәкилдә верилмәси о демәкдир ки, t-нин мүәјјән (α, β) интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$F\left[\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] \equiv 0$$

ејнилији өдәнилир.

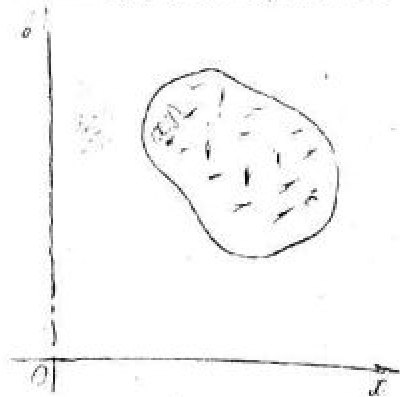
Инди (2) тәнлијинин һәндәси мә'насыны изаһ едәк. Бу мәгсәдлә фәрз едәк ки, x вә y мүстәви нөгтәсинин координатлары вә $y = \varphi(x)$ функсијасы (2) тәнлијинин һәллидир. $y = \varphi(x)$ функсијасынын графики мүстәви үзәриндә бир әјри олар. Бу әјријә (вә һәм дә (2) тәнлијинин интегралынын графикинә) (2) тәнлијинин интеграл әјриси дејилир.

Ајдындыр ки, интеграл әјриси кәсилмәјәндир вә онун һәр бир нөгтәсиндә тохунаны вар.

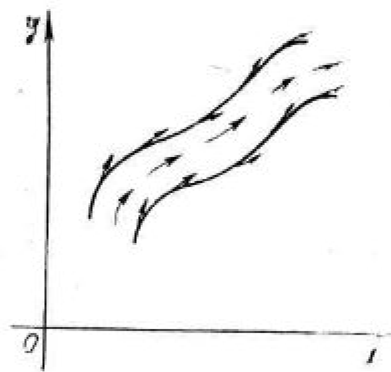
Фәрз едәк ки, (2) тәнлијинин сағ тәрәфиндәки $f(x, y)$ функсијасы һәр һансы σ областында тә'јин олунмушдур вә онун бүтүн нөгтәләриндә сонлу гијмәтләр алыр. Әкәр $(x, y) \in \sigma$ нөгтәси (2) тәнлијинин интеграл әјриси үзәриндә јерләширсә, онда һәмин нөгтәдә интеграл әјрисинә чәкилмиш тохунанын

бучаг әмсалы y' вә ја (2) бәрабәрлијинә көрә $f(x, y)$ олар: $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$. Бурадан интеграл әјрисинә (x, y) нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын абсис охундан мејл бучағы тапылыр: $\alpha = \operatorname{arc\,tg} f(x, y)$.

Инди һәр бир $(x, y) \in \sigma$ нөгтәсиндән абсис оху илә $\alpha = \operatorname{arc\,tg} f(x, y)$ бучағы әмәлә кәтирән ох ишарәси чәкәк. Беләликлә, (2) тәнлијинин сағ тәрәфи васитәсилә σ областында

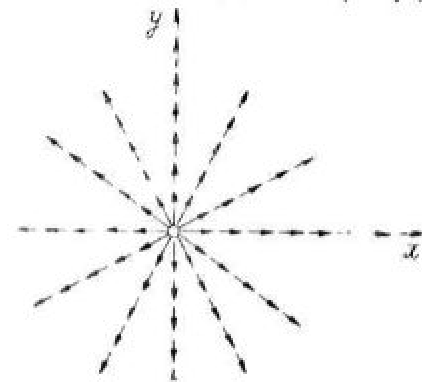


Шәкил 235



Шәкил 236

истигамәтләр мејданы тә'јин олунур (шәкил 235). (2) тәнлији көстәрир ки, интеграл әјрисинин һәр бир нөгтәсиндә тохунанын истигамәти ујғун нөгтәдә мејданын истигамәти илә үст-үстә дүшүр. Интеграл әјриләри бүтүн башга әјриләрдән елә бу хассә илә фәргләнир. Демәли, диференсиал тәнлији һәлл етмәк, һәндәси олараг елә әјри тапмаг демәкдир ки, бу әјринин истәнилән нөгтәсиндә тохунанын истигамәти ујғун нөгтәдә мејданын истигамәти илә үст-үстә дүшсүн (шәкил 236). Белә әјриләр чох олур. Онлар мүәјјән әјриләр аиләсини (интеграл әјриләри аиләсини) тәшкил едир. Бу аиләдән мүәјјән әјри ајырмаг үчүн һәмин әјринин кечдији бир (x_0, y_0) нөгтәси верилмәлидир.



Шәкил 237

Мисал 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0). \qquad (7)$$

Бу тәнлик васитәсилә тә'јин олунан истигамәтләр мејданы 237-чи шәкилдә көстәрилир.

Ајдындыр ки, координат башланғычындан чыхан вә истәнилән (x, y) нөгтәсиндән кечән һәр бир дүз хәттин истигамәти һәмин нөгтәдә мејданын истигамәти илә үст-үстә дүшүр. Бу көстәрир ки, $y = Cx$ дүз хәтләри (7) диференсиал тәнлијинин интеграл әјриләридир.

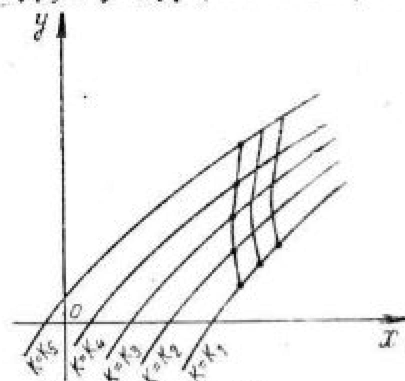
Верилмиш диференсиал тәнлијин интеграл әјриләринин нечә јерләшдијини тәсәввүр етмәк вә һәм дә интеграл әјриләрини тәгриби гурмаг үчүн изоклинләр (бәрабәр мејлли хәтләр) үсулундан истифадә етмәк олар.

Интеграл әјриләринин ејниистигамәтли нөгтәләри чохлуғуна истигамәтләр мејданынын *изоклини* дејилир. (2) тәнлијинин интеграл әјрисинин истигамәтини (јә'ни, тохунанын бучаг әмсалыны) $y' = k$ илә тә'јин етсәк, онда белә истигамәти олан нөгтәләр

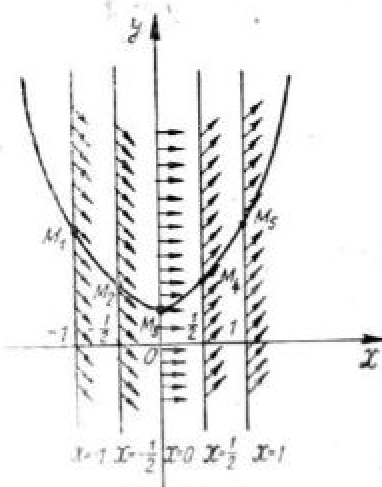
$$f(x, y) = k \qquad (8)$$

шәртини өдәјән нөгтәләр олар. Демәли, (8) тәнлији истигамәтләр мејданынын $y' = k$ истигамәтинә ујғун олан изоклининин тәнлијидир. Бурада k-ја мүхтәлиф гијмәтләр вердикдә мүхтәлиф изоклинләр, јә'ни (2) тәнлији үчүн изоклинләр аиләси алыныр.

Тутаг ки, k-нын бир-биринә чох јахын $k_1, k_2, \ldots, k_n$ гијмәтләринә ујғун изоклинләр гурулмушдур (шәкил 238). Инди



Шәкил 238



Шәкил 239

$k = k_1$-ә ујғун олан изоклин үзәриндә бир нечә нөгтә көтүрәк, бу нөгтәләрдән бучаг әмсаллары k_1 олан вә $k = k_2$ изоклининә гәдәр узадылмыш дүз хәтт парчалары чәкәк. Сонра исә бу дүз хәтт парчаларынын $k = k_2$ изоклинини кәсдији нөгтәләрдән бучаг әмсаллары k_2 олан вә $k = k_3$ изоклинини кәсәнә гәдәр узадылмыш јени дүз хәтт парчалары чәкилир.

Беләликлә, бу просес нәтичәсиндә гурулмуш дүз хәтт парчалары верилмиш диференсиал тәнлијин интеграл әјрисини тәгриби ифадә едән (вә она чох јахын олан) сыныг хәтти

тәшкил едир. Ајдындыр ки, $\kappa_{i+1}-\kappa_i$ ($i=1, 2, 3, \ldots, n-1$) фәргләри чох кичик олдугда гурулан дүз хәтт парчалары чох гыса олар вә онларын әмәлә кәтирдији сыныг хәтт тәнлијин интеграл әјрисинә даһа јахын олур.

Мисал 2.

$$y' = 2x. \qquad (9)$$

Диференсиал тәнлијин изоклинләр аиләсинин тәнлији $2x=\kappa$ вә ја $x=\frac{\kappa}{2}$ олар. Бурада κ-ја $\kappa=0$, $\kappa=1$, $\kappa=2$, ... вә с. кими гијмәтләр вердикдә тәнликләри

$$x=0,\ x=1/2,\ x=-1/2,\ x=1,\ \ldots$$

олан изоклинләр алыныр. Бу изоклинләр ординат охуна паралел олан дүз хәтләрдир (*шәкил 239*). *Оу* охундан ибарәт олан $x=0$ изоклининин бүтүн нөгтәләриндә мејданын истигамәти абсис охуна паралелдир ($y'=0=\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha=0$). $x=\frac{1}{2}$ изоклининин бүтүн нөгтәләриндә мејданын истигамәти абсис оху илә $\alpha=45^\circ$ бучаг әмәлә кәтирир ($y'=\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=45^\circ$). $x=-1/2$ изоклининин бүтүн нөгтәләриндә мејданын истигамәти абсис оху илә $\alpha=-45^\circ$ ($y'=\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=-45^\circ$) бучаг әмәлә кәтирир вә с.

Јухарыда дедијимиз гајда илә гурулмуш $M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 \ldots$ сыныг хәтти (9) тәнлијинин интеграл әјрисини тәгриби ифадә едир. Бу сыныг хәтт $y=x^2+C$ параболасына чох јахындыр. (9) тәнлијинин һәлли исә $y=x^2+C$ функсијаларыдыр. Бурада C параметринә мүхтәлиф гијмәтләр вермәклә алынан параболалар (9) тәнлијинин интеграл әјриләри олар.

§ 3. КОШИ МӘСӘЛӘСИ ВӘ БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН ҮМУМИ ҺӘЛЛИ

Биртәртибли диференсиал тәнликләрин һәндәси изаһы вә индијә кими һәлл олунмуш мисаллар көстәрир ки, диференсиал тәнликләрин, үмумијјәтлә, чох вә һәтта сонсуз сајда һәлли вардыр. Бу һәлләрин графикләри верилмиш диференсиал тәнлијин интеграл әјриләри аиләсини тәшкил едир.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

диференсиал тәнлији үчүн белә бир мәсәлә гојулур: бу тәнлијин көстәрилән һәлләри ичәрисиндән еләсини тапмалы ки, аргументин $x=x_0$ гијмәтиндә верилмиш $y=y_0$ гијмәтини алсын. Буну белә јазырлар:

$$y|_{x=x_0} = y_0. \qquad (2)$$

Верилмиш x_0 әдәдинә аргументин башланғыч гијмәти, y_0 әдәдинә исә ахтарылан функсијанын башланғыч гијмәти

дејилир. Үмумијјәтлә, x_0, y_0 әдәдләри һәллин башланғыч гијмәтләри вә ја башланғыч шәртләри адланыр.

Һәллин x_0, y_0 башланғыч гијмәтләринин верилмәси һәндәси олараг мүстәви үзәриндә бир (x_0, y_0) нөгтәсинин вә ја (x_0, y_0) башланғыч нөгтәсинин верилмәси демәкдир.

(1) тәнлијинин $y=\varphi(x)$ һәлли (2) шәртини вә ја $\varphi(x_0)=y_0$ бәрабәрлијини өдәдикдә дејирләр ки, һәмин һәлл верилмиш x_0, y_0 башланғыч шәртләрини (вә ја башланғыч гијмәтләрини) өдәјир.

Диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин әсас мәсәләләриндән бири (1) тәнлијинин верилмиш x_0, y_0 башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинин ахтарылмасыдыр. Буна (1) тәнлији үчүн Коши мәсәләси дејилир.

Коши мәсәләси һәндәси олараг белә сөјләнир: (1) тәнлијинин верилмиш (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тапмалы.

Белә тәбии бир суал гаршыја чыхыр: (1) диференсиал тәнлији үчүн Коши мәсәләси һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында нә демәк олар? Бу суала ашағыдакы теорем чаваб верир:

Коши теореми (биртәртибли диференсиал тәнлијин һәллинин варлығы вә јеканәлији): *$f(x, y)$ функсијасы (Oxy) мүстәвисинин σ областында кәсилмәјәндирсә вә бу областда кәсилмәјән $f'_y(x, y)$ хүсуси төрәмәси варса, онда һәмин областын һәр бир $(x_0, y_0)\in\sigma$ нөгтәси үчүн (1) тәнлијинин (2) башланғыч шәртини өдәјән јеканә $y=\varphi(x)$ һәлли вар.*

Бу, һәндәси олараг о демәкдир ки, теоремин шәртләри өдәнилдикдә σ областынын һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән (1) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир.

Теоремин там исбаты бурада верилмир. Лакин исбатын әсас идејасы ашағыда гыса шәрһ олунур:

(1) диференсиал тәнлијинин (2) башланғыч шәртини өдәјән һәллинин ахтарылмасы

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\,dt \qquad (3)$$

тәнлијинин һәллинә еквивалентдир. Ахтарылан y функсијасы интеграл ишарәси алтында олдуғу үчүн (3) тәнлијинә *интеграл тәнлик* дејилир.

(1) диференсиал тәнлијинин (3) интеграл тәнлији илә ејнигүчлү олмасы асанлыгла исбат олунур. (1) тәнлијинин (2) башланғыч шәртини өдәјән һәр бир һәлли (3) интеграл тәнлијинин һәллидир, (3) интеграл тәнлијинин һәр бир һәлли исә (1) тәнлијини вә (2) башланғыч шәртини өдәјир.

y дәјишәнинин t-дән асылылығы мә'лум олмадығы үчүн (3) тәнлијинин сағ тәрәфиндәки интегралы һесабламаг мүмкүн

дејилдир. Буна көрә дә билаваситә интеграллама васитәсилә (3) бәрабәрлијиндән һәмин тәнлијин һәллини тапмаг олмаз.

(3) тәнлијинин тәгриби вә дәгиг һәллини ардычыл јахынлашма үсулу васитәсилә ашағыдакы кими тапмаг олар:

Әввәлчә $y = y_0$ әдәди (3) тәнлијинин сыфырынчы јахынлашмасы һесаб олунур. Сонра исә

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt$$

бәрабәрлији васитәсилә тәнлијин биринчи јахынлашмасы тапылыр. Бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки интеграл алтында t-нин мә'лум функсијасы (y_0 һәгиги әдәд олуб t-дән асылы дејилдир) јазылдығындан һәмин интегралы һесабламаг мүмкүндүр. Тәнлијин икинчи јахынлашмасы

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\, dt$$

бәрабәрлији васитәсилә вә нәһајәт, n-чи јахынлашмасы

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt \qquad (4)$$

бәрабәрлији васитәсилә тапылыр.

Теоремин шәртләри өдәнилдикдә, белә гурулан $\{y_n\}$ ($y_n = y_n(x)$) ардычыллығы мүәјјән $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ интервалында мүнтәзәм јығыландыр. Ардычыллығын

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$$

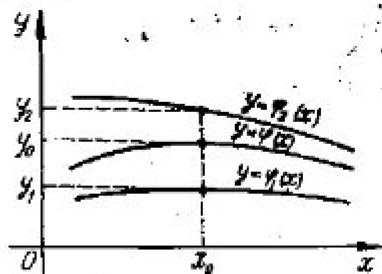
лимити (3) интеграл тәнлијинин јеганә һәллидир. Онда һәмин функсија (1) тәнлијинин дә (2) башланғыч шәртини өдәјән јеганә һәлли олар.

Гејд едәк ки, $y_n(x)$ функсијаларынын һәр бирини (1) тәнлијинин тәгриби һәлли һесаб етмәк олар.

Коши теореминдән ајдындыр ки, (1) тәнлијинин сонсуз сајда һәлли вар. Доғрудан да, теоремин шәртләри өдәнилдикдә һәр бир $(x_0, y_0) \in \sigma$ нөгтәси үчүн (1) тәнлијинин $\varphi(x_0) = y_0$ башланғыч шәртини өдәјән јеганә $y = \varphi(x)$ һәлли вар. Инди һәмин областын башга бир (x_0, y_1) нөгтәсини $(y_1 \neq y_0)$ көтүрәк. Теоремә көрә (1) тәнлијинин $\varphi_1(x_0) = y_1$ башланғыч шәртини өдәјән $y = \varphi_1(x)$ һәлли дә вар. Бу һәлл әввәлки $y = \varphi(x)$ һәллиндән фәрглидир (чүнки бир $x = x_0$ нөгтәсиндә $y = \varphi(x)$ функсијасы ики мүхтәлиф y_0 вә y_1 гијмәтләрини ала билмәз). Јени (x_0, y_2) башланғыч шәрти $(y_2 \neq y_0,\ y_2 \neq y_1)$ башга бир $y = \varphi_2(x)$ һәллини тә'јин едәр (шәкил 240) вә с.

Беләликлә, x_0, y_0 башланғыч гијмәтләринин биринчисини, јә'ни x_0-ы, сабит һесаб едәрәк, икинчисини, јә'ни y_0-ы мүәјјән интервалда дәјишдирсәк, онда y_0-ын һәр бир гијмәтинә (1)

тәнлијинин бир һәлли ујғун олар. Ајдындыр ки, бу һәлләр чохлуғу y_0-дан асылыдыр: $y = \varphi(x, y_0)$.



Шәкил 240

Бурада y_0 әдәди C (параметри) илә әвәз едилдикдә (1) тәнлијинин

$$y = \varphi(x, C) \qquad (5)$$

һәлли алыныр. Буна (1) тәнлијинин *үмуми һәлли* дејилир.

Тә'риф. *(1) диференсиал тәнлијинин ихтијари C параметриндән асылы олан $y = \varphi(x, C)$ һәллинә о заман һәмин тәнлијин үмуми һәлли дејилир ки, һәмин һәлдән C параметринә мүәјјән C_0 гијмәти вермәклә истәнилән $y|_{x=x_0} = y_0$ башланғыч шәрти өдәјән $y = \varphi(x, C_0)$ һәллини алмаг мүмкүн олсун. Бурада (x_0, y_0) нөгтәси (1) тәнлијинин һәллинин варлығы вә јеганәлији теореми шәртләринин өдәнилдији σ областына дахилдир.*

(1) диференсиал тәнлијинин үмуми һәлли

$$F(x, y, C) = 0 \qquad (6)$$

тәнлији васитәсилә гејри-ашкар шәкилдә дә верилә биләр. Бу һалда, (6) бәрабәрлијинә (1) диференсиал тәнлијинин *үмуми интегралы* дејилир.

(1) диференсиал тәнлијинин үмуми һәлли

$$x = \varphi(t, C), \quad y = \psi(t, C)$$

параметрик шәкилдә дә верилә биләр.

(1) диференсиал тәнлијинин (5) үмуми һәллиндән C параметринә мүәјјән $C = C_0$ гијмәти вермәклә алынан $y = \varphi(x, C_0)$ функсијасына һәмин тәнлијин хүсуси һәлли дејилир. $F(x, y, C_0) = 0$ мүнасибәти исә диференсиал тәнлијин *хүсуси интегралы* адланыр.

Һәндәси олараг үмуми һәлл (вә ја үмуми интеграл) бир ихтијари сабитдән (вә ја бир параметрдән) асылы олан интеграл әјриләри аиләсиндән ибарәтдир. Хүсуси һәлл (вә ја хүсуси интеграл) исә мүстәвинин верилмиш (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјридир.

Диференсиал тәнлијин (2) башланғыч шәртини өдәјән (хүсуси) һәллини вә ја (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тапмаг үчүн (5) үмуми һәллиндә $x = x_0$ вә $y = y_0$ көтүрәрәк, алынан

$$y_0 = \varphi(x_0, C) \ (F(x_0, y_0, C) = 0) \qquad (7)$$

бәрабәрлијини C-јә нәзәрән һәлл етмәк лазымдыр. Бурадан тапылан $C = C_0$ әдәдини (5) бәрабәрлијиндә (вә ја (6) бәра-

бәрлијиндә) C әвәзинә јазмагла (2) башланғыч шәртини өдәјән
$$y = \varphi(x, C_0)$$
һәлли (вә ја $F(x, y, C_0) = 0$ интегралы) алыныр.

Тутаг ки, (1) диференсиал тәнлијинин сағ тәрәфи y-дән асылы дејилдир, јә'ни һәмин тәнлик
$$y' = f(x) \tag{8}$$
шәклиндәдир вә $f(x)$ функсијасы һәр һансы (a, b) интервалында кәсилмәјәндир. Онда интеграл һесабындан мә'лумдур ки, ахтарылан y функсијасы ашағыдакы кими тапылыр:
$$y = \int f(x)\,dx + C. \tag{9}$$

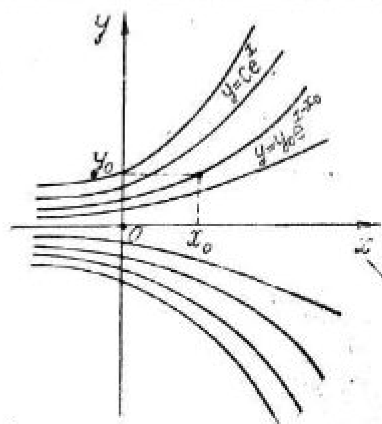
Бир C параметриндән асылы олан (9) бәрабәрлији (8) тәнлијинин үмуми һәллини (вә ја интегралыны) тә'јин едир. Ола биләр ки, (9) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки интеграл һесабланыр вә нәтичәси елементар функсијаларла ифадә олунур. Ола да биләр ки, һәмин интегралы елементар функсијаларла ифадә етмәк мүмкүн дејилдир (XXI, § 7).

Бу һалларын һәр икисиндә (8) тәнлији һәлл олунмуш һесаб олунур.

Үмумијјәтлә, верилмиш диференсиал тәнлијин һәллинин тапылмасы бир вә ја бир нечә гејри-мүәјјән интегралын һесабланмасына кәтирилдикдә һәмин диференсиал тәнлик һәлл олунмуш һесаб олунур. Бу һалда, бә'зән дејирләр ки, верилмиш диференсиал тәнлик квадратура илә һәлл олунур.

Мисал.
$$y' = y. \tag{10}$$

Тәнлијин сағ тәрәфиндәки $f(x, y) = y$ функсијасы үчүн бүтүн (Oxy) мүстәвисиндә Коши теореминин шәртләри өдәнилир. Буна көрә дә мүстәвинин истәнилән (x_0, y_0) нөгтәсиндән верилмиш тәнлијин јеканә интеграл әјриси кечир.



Шәкил 241

Тәнлијин үмуми һәлли бир параметрдән асылы
$$y = Ce^x \tag{11}$$
функсијасыдыр. Доғрудан да, (11) функсијасы ихтијари C үчүн (10) тәнлијини өдәјир:
$$(Ce^x)' = Ce^x, \; Ce^x \equiv Ce^x.$$

Верилмиш ихтијари (x_0, y_0) башланғыч гијмәтләри үчүн исә C параметринин елә C_0 гијмәтини тапмаг олар ки,
$$y = C_0 e^x$$

һәлли
$$y|_{x=x_0} = y_0$$
башланғыч шәртини өдәсин.

Бу мәсәләдә C-нин C_0 гијмәтини
$$y_0 = Ce^{x_0}$$
бәрабәрлијиндән тапмаг лазымдыр: $C = C_0 = y_0 e^{-x_0}$.

Алынан
$$y = y_0 e^{-x_0}\cdot e^x \text{ вә ја } y = y_0 e^{x-x_0}$$
һәлли (2) башланғыч шәртини өдәјир.

C параметринин мүхтәлиф гијмәтләринә ујғун интеграл әјриләри 241-чи шәкилдә көстәрилмишдир. $y = y_0 e^{x-x_0}$ һәллинин графики (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечир.

§ 4. ДӘЈИШӘНЛӘРИНӘ АЈРЫЛАН ТӘНЛИКЛӘР

1. Тутаг ки, $M(x)$ вә $N(y)$ функсијалары ујғун олараг (a, b) вә (l, d) интервалында кәсилмәјәндир. Бу һалда
$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{1}$$
тәнлијинә *дәјишәнләринә ајрылмыш диференсиал тәнлик* дејилир. (1) тәнлијиндә dx-ин әмсалы анчаг x-дән, dy-ин әмсалы анчаг y-дән асылыдыр.

Фәрз едәк ки, $y(x)$ функсијасы (1) тәнлијинин һәллидир. Онда һәмин функсија (a, b) интервалында (1) тәнлијини ејнилијә чевирир:
$$M(x)\,dx + N[y(x)]\,dy(x) \equiv 0 \tag{2}$$

Бу ејнилији интегралладыгда
$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C \tag{3}$$
мүнасибәти алыныр; бурада C ихтијари сабитдир.

Демәли, (1) тәнлијинин һәр бир һәлли (3) тәнлијини дә өдәјир. Тәрсинә, әкәр $y(x)$ функсијасы (3) тәнлијини өдәјирсә, онда һәмин ејнилији диференсиалладыгда (2) мүнасибәти алыныр. Бу да һәмин функсијанын (1) тәнлијини өдәдијини көстәрир.

Бурадан ајдындыр ки, (3) тәнлији (вә ја бәрабәрлији) (1) тәнлијинин бүтүн һәлләрини тә'јин едир. Буна көрә дә (3) мүнасибәти (1) тәнлијинин үмуми интегралы олар. Ола биләр ки, (3) бәрабәрлијиндә иштирак едән интегралларын бири вә ја һәр икиси елементар функсијаларла ифадә олуна билмир. Јухарыда гејд етдијимиз кими, бу һалда да (1) диференсиал тәнлији һәлл олунмуш һесаб олунур вә (3) бәрабәрлији онун үмуми интегралыны (һәллини) тә'јин едир. $N(y) \neq 0$ олдугда (3) бәрабәрлијиндән (1) тәнлијинин y һәлли x-ин гејри-ашкар функсијасы кими тә'јин олуна биләр.

(1) тәнлијинин үмуми интегралыны мүәјјән интеграл васитәсилә

$$\int_{x_0}^{x} M(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(y)\,dy = C \qquad (4)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан (1) тәнлијинин $y(x_0) = y_0$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$\int_{x_0}^{x} M(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(y)\,dy = 0$$

кими тапылыр.

Мисал 1. $e^x dx + y\,dy = 0$ тәнлијини һәлл етмәли.

Бурада $M(x) = e^x$ вә $N(y) = y$ функсијаларынын һәр икиси $(-\infty, \infty)$ интервалында кәсилмәздир. Буна көрә дә һәмин тәнлијин үмуми һәлли (3) бәрабәрлијиндән

$$\int e^x\,dx + \int y\,dy = C$$

вә ја

$$e^x + \frac{y^2}{2} = C$$

шәклиндә тапылыр.

2. Фәрз едәк ки, $M_i(x)$ вә $N_i(y)$ $(i = 1, 2)$ функсијалары ујғун олараг (a, b) вә (l, d) интервалында кәсилмәјәндир. Бу һалда

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \qquad (5)$$

тәнлијинә дәјишәнләринә ајрылан тәнлик дејилир. (5) тәнлији дәјишәнләринә ајрылмыш тәнлијә кәтирилир. Бу мәгсәдлә һәмин тәнлијин һәр ики тәрәфини $N_1(y)\,M_2(x) \neq 0$ һасилинә бөлмәк лазымдыр:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = 0.$$

Дәјишәнләринә ајрылмыш бу тәнлијин үмуми интегралы

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = C \qquad (6)$$

олар. (5) тәнлијинин (6) үмуми интегралындан алына билмәјән башга һәлләри дә ола биләр. Белә һәлләр $N_1(y)\,M_2(x) = 0$ бәрабәрлијинин өдәнилдији нөгтәләр ичәрисиндә олар.

Тутаг ки, $y = y_1$ әдәди $N_1(y) = 0$ тәнлијинин һәллидир: $N_1(y_1) = 0$ $(l < y_1 < d)$. $dy_1 = 0$ вә $N_1(y_1) = 0$ олмасындан ајдындыр ки, $y = y_1$ функсијасы (5) тәнлијинин һәллидир.

$M_2(x_1) = 0$ $(a < x_1 < b)$ бәрабәрлији өдәнилдикдә исә $x = x_1$ функсијасы (5) тәнлијинин һәлли олар.

Мисал 2. $xy\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$ тәнлијини һәлл етмәли.

Бу тәнлијин һәр ики тәрәфини $y(1 + x^2) \neq 0$ һасилинә бөлдүкдә дәјишәнләринә ајрылмыш

$$\frac{x}{1 + x^2}\,dx + \frac{dy}{y} = 0$$

тәнлији алыныр. Бунун үмуми интегралы

$$\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \ln|y| = \ln C, \quad C > 0$$

(бурада C сабити $\ln C$ илә ишарә олунур),

$$\sqrt{1 + x^2}\,|y| = C$$

олар.

Мисал 3. $e^y \sin x\,dx + x\,dy = 0$ тәнлијинин үмуми интегралы ашағыдакы кими тапылар:

$$\frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{dy}{e^y} = 0,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx + \int \frac{dy}{e^y} = C,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx - e^{-y} = C.$$

§ 5. БИРЧИНСЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

1. Тутаг ки, мүәјјән σ областында тә'јин олунмуш икидәјишәнли $f(x, y)$ функсијасы верилмишдир. Истәнилән $(x, y) \in \sigma$ нөгтәси вә $(tx, ty) \in \sigma$ шәртини өдәјән һәр бир t әдәди үчүн

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y) \qquad (1)$$

ејнилији өдәнилдикдә $f(x, y)$ функсијасына σ областында α дәрәчәли *бирчинсли функсија* дејилир. Мәсәлән,

$$f_1(x, y) = xy + x^2, \quad f_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_3(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{xy}}$$

функсијалары ујғун олараг 2, -1 вә 0 дәрәчәли бирчинсли функсијалардыр:

$$f_1(tx, ty) = tx \cdot ty + (tx)^2 = t^2(xy + x^2) = t^2 f_1(x, y),$$

$$f_2(tx, ty) = \frac{1}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}} = \frac{1}{t\sqrt{x^2 + y^2}} = t^{-1} f_2(x, y),$$

$$f_3(tx, ty) = \frac{tx + ty}{\sqrt{tx \cdot ty}} = \frac{t(x + y)}{t\sqrt{xy}} = t^0 f_3(x, y).$$

2. $f(x, y)$ функсијасы x вә y дәјишәнләринә нәзәрән сыфыр дәрәчәли бирчинсли функсија олдугда

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

тәнлијинә бирчинсли диференсиал тәнлик дејилир.

Бу тәнлији һәлл етмәк үчүн $f(x, y)$ функсијасынын сыфыр дәрәчәли бирчинсли функсија олмасыны, ја'ни һәмин функсијанын

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y) \qquad (3)$$

бәрабәрлијини өдәмәсини нәзәрә алаг. (3) бәрабәрлијиндә $t=\frac{1}{x}$ гәбул етсәк,

$$f(x, y)=f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

олар. Бу бәрабәрлијин саг тәрәфиндәки $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ ифадәси $\frac{y}{x}$ нисбәтинин мүәјјән функсијасыдыр. Һәмин функсијаны $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ илә ишарә етдикдә, (2) тәнлији

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

шәклиндә јазылыр. (2) вә (4) тәнликләринин еквивалент олмасы үчүн $x \neq 0$ һесаб етмәк лазымдыр.

(4) тәнлији $\frac{y}{x}=z$ әвәзләмәси васитәсилә дәјишәнләринә ајрылан тәнлијә кәтирилир.

Догрудан да,

$$y=xz, \frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$$

олар вә (4) тәнлији

$$z+x\frac{dz}{dx}=\varphi(z), \quad x\frac{dz}{dx}=\varphi(z)-z$$

кими јазылар. Бурадан

$$\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\frac{dx}{x}, \quad \varphi(z)-z \neq 0;$$

$$\ln C+\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\ln x, \quad x=Ce^{\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}}$$

алыныр. $\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\psi(z)$ гәбул етсәк, (4) тәнлијинин үмуми интегралы

$$x=Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{5}$$

шәклиндә јазылар.

Гејд. Хүсуси һалда, $\varphi(z)\equiv z$ олдугда (4) тәнлији дәјишәнләринә ајрылан $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ тәнлијинә чеврилир. Бу тәнлијин үмуми һәлли $y=Cx$ $(x\neq 0)$ функсијасыдыр. Әкәр $\varphi(z)-z\neq 0$ өдәнилирсә, лакин мүәјјән $z=z_1$ гијмәтиндә $\varphi(z_1)-z_1=0$ бәрабәрлији догрудурса, онда $z=z_1$ функсијасы $xdz=[\varphi(z)-z]\,dx$ тәнлијинин һәлли олар. Буна (4) тәнлијинин $y=z_1x$ һәлли ујгундур. Һәмин һәлли, бә'зән (5) үмуми интегралындан (һәллиндән) алмаг мүмкүн олмур.

Мисал 1. Бирчинсли $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$ тәнлијини һәлл етмәли.

$\frac{y}{x}=z$ вә ја $y=xz$ әвәзләмәсини апарсаг, $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$ олар. Онда

$$z+x\frac{dz}{dx}=z+z^2, \quad x\frac{dz}{dx}=z^2$$

(дәјишәнләринә ајрылан тәнлик),

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z^2}, \quad \ln x=\ln C-\frac{1}{z}, \quad x=Ce^{-\frac{1}{z}},$$

$$x=Ce^{-\frac{x}{y}}$$

олар. Сончу ифадә верилмиш тәнлијин үмуми интегралыдыр.

3. $M(x, y)$ вә $N(x, y)$ функсијалары ејни дәрәчәли бирчинсли функсијалар олдугда

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{6}$$

тәнлији дә бирчинсли тәнлик адланыр. Бу тәнлији (2) бирчинсли тәнлик шәклинә кәтирмәк олур:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}=f(x, y), \; (N(x, y)\neq 0).$$

Гејд едәк ки, бирчинсли (6) тәнлијини (2) шәклинә кәтирмәдән дә һәлл етмәк олар. Бу мәгсәдлә $y=xz$ $(dy=xdz+zdx)$ әвәзләмәсиндән истифадә етмәк лазымдыр.

Мисал 2. Бирчинсли $(x+y)\,dx-(y-x)\,dy=0$ тәнлијини һәлл етмәли.

$y=xz$ әвәзләмәсини апарсаг, $dy=xdz+zdx$ олар. Онда верилмиш тәнлик

$$(x+xz)\,dx-(xz-x)(xdz+zdx)=0$$

вә ја

$$(1+2z-z^2)\,dx+x(1-z)\,dz=0$$

шәклиндә јазылар. Бурадан тәнлијин үмуми интегралы алыныр:

$$\frac{1-z}{1+2z-z^2}dz+\frac{dx}{x}=0, \quad \frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2|+\ln|x|=\ln C,$$

$$(1+2z-z^2)\,x^2=C^2, \quad x^2+2yx-y^2=C^2.$$

4. f мүәјјән кәсилмәјән функсија олдугда

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \tag{7}$$

шәклиндә тәкликләр бирчинсли тәнлијә кәтирилир. $c=c_1=0$ олдугда (7) тәнлијинин бирчинсли олмасы ајдындыр. Буна көрә дә c вә c_1 әдәдләринин һеч олмаса биринин сыфырдан фәрли олдугу һала бахаг.

Тутаг ки, $ab_1-a_1b\neq 0$. Бу һалда (7) тәнлијиндә

$$x=\xi+\alpha, \quad y=\eta+\beta$$

әвәзләмәсини апармаг лазымдыр:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right). \tag{8}$$

Әкәр α вә β әдәдләрини

$$\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0,\\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0\end{cases}$$

системинин һәлли кими тә'јин етсәк, онда (8) тәнлији бирчинсли

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right)$$

тәнлијинә чевриләр.

$ab_1-a_1b=0$ олдугда исә $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$ мүнасибәтиндән $a_1=\lambda a$, $b_1=\lambda b$ алыныр. Бу гијмәтләри (7) тәнлијиндә јеринә јазсаг вә $z=ax+by$ әвәзләмәсини апарсаг, онда (7) тәнлији дәјишәнләринә ајрылан тәнлијә чевриләр.

Мисал 3.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x+2y-9}{3x-y-1}. \qquad (9)$$

Бу һалда $ab_1-a_1b=-11\neq 0$ олдуғундан $x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\beta$ әвәзләмәсини апармаг лазымдыр. Намә'лум α вә β әдәдләри

$$\begin{cases} 5\alpha+2\beta-9=0,\\ 3\alpha-\beta-1=0\end{cases}$$

системинин һәлли кими тә'јин едилир: $\beta=2$ вә $\alpha=1$.

Онда $x=\xi+1$, $y=\eta+2$ әвәзләмәси васитәсилә (9) тәнлији бирчинсли

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{5\xi+2\eta}{3\xi-\eta}$$

тәнлијинә кәтирилир. Бу тәнлији $\eta=\xi z$ әвәзләмәсини апармагла һәлл етмәк олар:

$$z+\xi\frac{dz}{d\xi}=\frac{5+2z}{3-z},\quad \frac{(3-z)\,dz}{z^2-z+5}=\frac{d\xi}{\xi},$$

$$\frac{5}{2}\int\frac{dz}{z^2-z+5}-\frac{1}{2}\int\frac{(2z-1)\,dz}{z^2-z+5}=\ln|\xi|+\ln C,$$

$$\frac{5}{\sqrt{19}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z-1}{\sqrt{19}}-\frac{1}{2}\ln|z^2-z+5|=\ln\xi C.$$

Бурадан (9) тәнлијинин үмуми интегралы тапылыр:

$$\frac{5}{\sqrt{19}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{19}}\left(\frac{2y-x-3}{x-1}\right)=\ln C|x-1|\sqrt{\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2-\left(\frac{y-2}{x-1}\right)+5}.$$

§ 6. БИРТӘРТИБЛИ ХӘТТИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Ахтарылан функсија вә онун төрәмәсинә нәзәрән хәтти олан тәнлијә биртәртибли хәтти диференсиал тәнлик дејилир. Биртәртибли хәтти диференсиал тәнлији

$$y'+p(x)\,y=f(x) \qquad (1)$$

шәклиндә јазмаг олар.

$f(x)\equiv 0$ олдугда алынан

$$y'+p(x)\,y=0 \qquad (2)$$

тәнлијинә (1) тәнлијинә ујғун олан хәтти бирчинсли тәнлик дејилир. $f(x)\neq 0$ олдугда (1) тәнлији *хәтти бирчинсли олмајан диференсиал тәнлик* адланыр.

Фәрз едәк ки, $p(x)$ вә $f(x)$ функсијалары мүәјјән (a, b) интервалында кәсилмәздир. (1) тәнлијини ашағыдакы кими јазаг.

$$y'=-p(x)\,y+f(x).$$

Ајдындыр ки, бу һалда $f(x, y)=-p(x)\,y+f(x)$ функсијасы $\sigma=(a<x<b;\ -\infty<y<\infty)$ областында кәсилмәздир вә һәмин областда кәсилмәјән $f_y(x, y)=-p(x)$ хүсуси төрәмәси вар. Буна көрә дә диференсиал тәнлијин һәллинин варлығы вә јеканәлији теореминә (§ 3) көрә (1) тәнлијинин истәнилән x_0, y_0 $((x_0, y_0)\in\sigma)$ башланғыч шәртини өдәјән јеканә һәлли вар:

(2) тәнлијинин һәлли. Бу тәнлик дәјишәнләринә ајрылыр.

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0,\quad \frac{dy}{y}=-p(x)\,dx.$$

Ахырынчы тәнлији интегралласаг,

$$\ln|y|=-\int p(x)\,dx+\ln|C|$$

$$y=Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (3)$$

аларыг. Бу (2) тәнлијинин үмуми һәллидир.

(1) тәнлијинин һәлли. (1) тәнлијини мүхтәлиф үсулларла һәлл етмәк олар. Бурада һәмин тәнлик сабитин вариасијасы үсулу илә һәлл едилир.

(1) тәнлијинә ујғун олан (2) хәтти бирчинсли тәнлијинин (3) үмуми һәллиндәки ихтијари C сабитини x-дән асылы елә $C=C(x)$ функсијасы һесаб едәк ки, алынан

$$y=C(x)\,e^{-\int p(x)dx} \qquad (4)$$

функсијасы (1) тәнлијинин һәлли олсун. Онда

$$\left[C(x)e^{-\int p(x)dx}\right]'+p(x)\left[C(x)e^{-\int p(x)dx}\right]=f(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)\,p(x)\,e^{-\int p(x)dx}+C(x)\,p(x)\,e^{-\int p(x)dx}=f(x),$$

$$C'(x)\,e^{-\int p(x)dx}=f(x),$$

$$C'(x)=f(x)\,e^{\int p(x)dx}$$

Бурадан намә'лум $C(x)$ функсијасы тапылыр:

$$C(x)=\int f(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx+C.$$

Бу гијмәти (4) бәрабәрлијиндә јеринә јаздыгда (1) тәнлијинин үмуми һәлли алыныр:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]. \qquad (5)$$

Ајдындыр ки, (1) тәнлијинин (5) үмуми һәлли ики интеграллама (квадратура) васитәсилә тапылыр вә ики топлананын чәминдән ибарәтдир: биринчи топланан (2) бирчинсли тәнлијинин үмуми һәлли

$$Ce^{-\int p(x)dx};$$

икинчи топланан исә (1) тәнлијинин бир хүсуси һәлли

$$e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

(бу хүсуси һәлл (5) үмуми һәллиндән $C=0$ олдугда алыныр)

Мисал. $y'+\frac{y}{x}=x^2$ хәтти тәнлијини һәлл етмәли.

Бу тәнлијә ујғун олан бирчинсли

$$y'+\frac{y}{x}=0$$

тәнлијинин үмуми һәлли

$$y=\frac{C}{x}$$

олар. Инди елә $C(x)$ функсијасы тапаг ки,

$$y=\frac{C(x)}{x} \qquad (6)$$

функсијасы верилмиш тәнлијин һәлли олсун. Бу мәгсәдлә (6) функсијасыны верилмиш тәнликдә јеринә јазаг;

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=x^2,\quad C'(x)=x^3$$

$$C(x)=\frac{x^4}{4}+C_1.$$

Бурадан ајдындыр ки, верилмиш тәнлијин үмуми һәлли

$$y=\frac{x^3}{4}+\frac{C_1}{x}.$$

олар.

§ 7. БЕРНУЛЛИ ТӘНЛИЈИ

Тутаг ки, $p(x)$ вә $f(x)$ һәр һансы (a, b) интервалында кәсилмәјән функсијалар вә m истәнилән һәгиги әдәддир. Бу һалда

$$y'+p(x)y=f(x)y^m \qquad (1)$$

шәклиндә тәнлијә *Бернулли тәнлији* дејилир. $m=0$ вә $m=1$ олдугда (1) тәнлији ујғун олараг хәтти вә дәјишәнләринә ајрылан тәнлијә чеврилир.

Бернулли тәнлији $m\neq1$ олдугда әвәзләмә васитәсилә хәтти тәнлијә кәтирилир. Буна инанмаг үчүн (1) тәнлијинин һәр ики тәрәфини y^m ($y\neq0$) ифадәсинә бөләк вә алынан

$$y^{-m}\cdot y'+p(x)y^{1-m}=f(x)$$

тәнлијиндә $y^{1-m}=z$ әвәзләмәсини апараг. Онда

$$(1-m)y^{-m}\cdot y'=z',\quad y^{-m}\cdot y'=\frac{z'}{1-m}$$

вә z дәјишәнинә нәзәрән

$$z'+(1-m)p(x)z=f(x)(1-m) \qquad (2)$$

хәтти тәнлији алыныр. Бу хәтти тәнлијин үмуми һәлли (§ 6)

$$z=e^{-\int(1-m)p(x)dx}\left[C+\int(1-m)f(x)e^{\int(1-m)p(x)dx}dx\right]$$

олар. Бурадан $y=z^{\frac{1}{1-m}}$ олдуғундан (1) тәнлијинин үмуми һәлли ашағыдакы шәкилдә алыныр:

$$y=\left\{e^{-\int(1-m)p(x)dx}\left[C+\int(1-m)f(x)e^{\int(1-m)p(x)dx}dx\right]\right\}^{\frac{1}{1-m}}. \qquad (3)$$

Ајдындыр ки, $y=0$ функсијасы $m>0$ олдугда Бернулли тәнлијинин һәллидир. Бу һәлл $m>1$ олдугда (3) үмуми һәллиндән $C=\infty$ ($C\to\infty$) көтүрмәклә алыныр, $0<m<1$ олдугда исә бу һәлл үмуми һәлдән C сабитинин һеч бир гијмәтиндә алынмыр.

Мисал. $y'+xy=xy^3$ ($m=3$) тәнлијини һәлл етмәли.

Тәнлијин һәр ики тәрәфини y^3 функсијасына бөләрәк, $y^{-2}=z$ әвәзләмәсини апардыгда

$$\frac{z'}{-2}+xz=x,\quad z'-2xz=-2x$$

хәтти тәнлији алыныр. Бу тәнлијин үмуми һәлли

$$z=Ce^{x^2}+1$$

функсијасыдыр. Бурадан верилмиш тәнлијин

$$y^{-2}=Ce^{x^2}+1$$

үмуми һәлли алыныр.

§ 8. ТАМ ДИФЕРЕНСИАЛЛЫ ТӘНЛИКЛӘР

1. Тутаг ки, $M(x, y)$ вә $N(x, y)$ функсијалары биррабитәли σ областында тә'јин олунмуш кәсилмәјән функсијалардыр. Диференсиал шәклиндә јазылмыш

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \qquad (1)$$

тәнлијинин сол тәрәфи һәр һансы икидәјишәнли $U(x, y)$ функсијасынын там диференсиалы оларса, ја'ни

$$dU(x, y)=M(x, y)dx+N(x, y)dy \qquad (2)$$

өдәнилирсә, онда һәмин тәнлијә σ областында *там диференсиаллы тәнлик* дејилир.

(1) тәнлији там диференсиаллы тәнлик олдугда ону

$$dU(x, y) = 0$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини интегралламагла (1) тәнлијинин үмуми интегралы тапылыр:

$$U(x, y) = C.$$

Мисал 1. $\left(2x + \frac{y}{x}\right)dx + \ln x\,dy = 0$ тәнлијинин сол тәрәфи $U(x, y) = x^2 + y\ln x$ функсијасынын там диференсиалыдыр:

$$dU(x, y) = \left(2x + \frac{y}{x}\right)dx + \ln x\,dy.$$

Буна көрә дә верилмиш тәнлијин үмуми интегралы

$$x^2 + y\ln x = C$$

олар.

Бурадан ајдындыр ки, там диференсиаллы тәнликләр квадратура илә чох асан һәлл олунур. Она көрә дә верилмиш диференсиал тәнлијин там диференсиаллы олмасыны билмәјин бөјүк әһәмијјәти вардыр. Буну нечә билмәк олар?

2. **Теорем.** ***Тутаг ки, $M(x, y)$ вә $N(x, y)$ функсијалары биррабитәли σ областында тә'јин олунмушдур, кәсилмәјәндир вә кәсилмәјән $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ хүсуси төрәмәләри вар. Бу һалда (1) тәнлијинин σ областында там диференсиаллы тәнлик олмасы үчүн һәмин областын бүтүн нөгтәләриндә***

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \qquad (3)$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, (1) тәнлији там диференсиаллыдыр вә (2) бәрабәрлији өдәнилир. Онда σ областынын бүтүн нөгтәләриндә

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

олар. Бурадан

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

ејниликләри алыныр. Бу бәрабәрликләрин биринчисини y-ә нәзәрән, икинчисини исә x-ә нәзәрән диференсиалладыгда

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

мүнасибәтләри, бурадан исә икитәртибли гарышыг төрәмәләрин бәрабәрлији һаггында Шварс теореминә (XVII, § 8) әсасән (3) бәрабәрлији алыныр.

Шәртин кафилији. Тутаг ки, σ областынын бүтүн нөгтәләриндә (3) бәрабәрлији өдәнилир. Онда елә $U(x, y)$ функсијасы тапмаг олар ки,

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \qquad (4)$$

бәрабәрликләри σ областында өдәнилсин. Бу функсијаны тапмаг үчүн σ областынын истәнилән (x_0, y_0) нөгтәсини көтүрәк вә (4) бәрабәрликләринин биринчисиндән $U(x, y)$ функсијасыны тапаг:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y). \qquad (5)$$

(5) бәрабәрлијиндә интегралламa x-ә нәзәрән апарылдығы үчүн ихтијари C сабити әвәзинә диференсиалланан ихтијари $\varphi(y)$ функсијасы көтүрүлмүшдүр. Инди бу $\varphi(y)$ функсијасыны илә сечәк ки, (5) бәрабәрлији илә тә'јин олунан $U(x, y)$ функсијасы (4) бәрабәрликләринин икинчисини дә өдәсин. Онда

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi'(y)$$

олар. Бурада

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\,dx$$

бәрабәрлијини вә (3) шәртинә көрә

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$N(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\,dx + \varphi'(y)$$

вә ја

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

мүнасибәти алынар. Сонунчу бәрабәрликдән ахтарылан $\varphi(y)$ функсијасы тапылыр:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C$$

(C ихтијари сабитдир). $\varphi(y)$ функсијасынын бу гијмәтини (5) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг, тәләб олунан $U(x, y)$ функсијасыны аларыг:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C. \qquad (6)$$

Ајдындыр ки, (6) бәрабәрлији илә тә'јин олунан $U(x, y)$ функсијасы (4) бәрабәрликләринин икисини дә өдәјир, јә'ни (1) тәнлији там диференсиаллы тәнликдир.

Беләликлә, шәртин кафилији исбат олунаркән, һәм дә ахтарылан $U(x, y)$ функсијасынын тапылма гајдасы (јә'ни (6) дүстуру) көстәрилди. Апарылан мүһакимәдән ајдындыр ки, там диференсиаллы тәнлијин үмуми интегралы

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C \qquad (7)$$

олар.

Мисал 2. $(3x^2+y)\,dx+(x+4y^3)\,dy=0$ **тәнлијини һәлл етмәли.**

Бу тәнлик үчүн

$$M(x, y)=3x^2+y \text{ вә } N(x, y)=x+4y^3$$

олдуғундан бүтүн (Oxy) мүстәвисиндә теоремин

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1=\frac{\partial N}{\partial x}$$

шәрти өдәнилир. Демәли, верилмиш тәнлик там диференсиаллы тәнликдир. Бу тәнлијин үмуми интегралы (7) дүстуру илә тапылар:

$$\int_0^x (3x^2+y)\,dx+\int_0^y 4y^3\,dy=C, \ (x_0=y_0=0),$$

$$x^3+yx+y^4=C.$$

3. (1) тәнлији там диференсиаллы олмадыгда ону бә'зән там диференсиаллы тәнлијә кәтирмәк мүмкүн олур. Бу мәгсәдлә (1) тәнлијинин һәр ики тәрәфини елә $\mu=\mu(x, y)$ функсијасына вурурлар ки, алынан

$$\mu M(x, y)\,dx+\mu N(x, y)\,dy=0 \qquad (8)$$

тәнлији там диференсиаллы олсун. Белә $\mu(x, y)$ функсијасына (1) тәнлијинин *интеграллајычы вуруғу* дејилир.

Верилмиш тәнлијин интеграллајычы вуруғуну нечә тапырлар?

$\mu(x, y)$ функсијасы (1) тәнлијинин интеграллајычы вуруғу олмасы үчүн (8) тәнлији там диференсиаллы олмалыдыр. Бунун үчүн исә

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

вә ја

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (9)$$

шәрти өдәнилмәлидир. (9) тәнлијинә ахтарылан $\mu(x, y)$ функсијасынын хүсуси төрәмәләри дахилдир.

Демәли, (1) тәнлијинин $\mu(x, y)$ интеграллајычы вуруғуну тапмаг үчүн (9) хүсуси төрәмәли диференсиал тәнлијини һәлл етмәк лазымдыр. Бу мәсәлә, үмуми һалда, (1) тәнлијини интегралламаг мәсәләсиндән чәтиндир.

Бир сыра хүсуси һалларда интеграллајычы вуруғу тапмаг мүмкүн олур. Бурада $\mu(x, y)$ функсијасынын x, y дәјишәнләринин анчаг бириндән асылы олдугда тапылма гајдасы көстәрилир.

$\mu=\mu(x)$. Бу һалда (9) тәнлији

$$N\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=\mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

вә ја

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx$$

шәклиндә јазылыр. Бурадан интеграллајычы вуруг тапылыр:

$$\ln\mu(x)=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx+C$$

вә ја

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}, \ (C=0). \qquad (10)$$

Ајдындыр ки, бу һалда $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ нисбәти y-дән асылы дејилдир.

$\mu=\mu(y)$. Бу һалда (9) тәнлији

$$M\frac{\partial\mu(y)}{\partial y}=-\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

вә ја

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)}=-\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}\,dy$$

шәклиндә јазылар. Бурадан $\mu(y)$ интеграллајычы вуруғу тапылыр:

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}dy}. \qquad (11)$$

Бу һалда $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}$ нисбәти x-дән асылы олмур.

Мисал 3. $3(1+y^2)dx+2xydy=0$ **тәнлијини һәлл етмәли.**

Бурада $M(x, y)=3(1+y^2)$ вә $N(x, y)=2xy$ олдуғундан

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=6y-2y=4y$$

олар вә ајдындыр ки,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4y}{2xy}=\frac{2}{x}$$

нисбәти y-дән асылы дејилдир Демәли, верилмиш тәнлијин интеграллајычы вуруғу анчаг x-дән асылыдыр: $\mu=\mu(x)$. Онда (10) дүстуруна әсасән интеграллајычы вуруғу тапмаг олар:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2.$$

Тәнлијин һәр ики тәрәфини тапдығымыз $\mu=x^2$ функсијасына вурдугда там диференсиаллы тәнлик алынып:

$$3x^2(1+y^2)\,dx+2x^3y\,dy=0.$$

Бу тәнлијин үмуми интегралы (7) дүстуру илә тапылыр:

$$\int_0^x 3x^2(1+y^2)\,dx+\int_0^y 0\cdot dy=C\ \ (x_0=y_0=0),$$

$$x^3(1+y^2)=C.$$

§ 9. БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН МӘХСУСИ НӨГТӘЛӘРИ ВӘ МӘХСУСИ ҺӘЛЛИ

Тутаг ки, төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли

$$y'=f(x,\ y) \tag{1}$$

тәнлији верилмишдир вә онун сағ тәрәфиндәки $f(x,\ y)$ функсијасы σ областында тә'јин олунмушдур.

σ областынын дахили $(x_0,\ y_0)$ нөгтәсинин һәр һансы әтрафында тәнлијин һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында Коши теореминин (§ 3) шәртләри (јә'ни $f(x,\ y)$ функсијасынын кәсилмәзлији вә кәсилмәјән $f'_y(x,\ y)$ хүсуси төрәмәсинин варлығы) өдәнилирсә, һәмин нөгтәјә (1) тәнлијинин дүзкүн нөгтәси дејилир. Тәнлијин дүзкүн нөгтәси үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли вар вә јеканәдир. Башга сөзлә, тәнлијин һәр бир дүзкүн нөгтәсиндән јеканә интеграл әјриси кечир.

σ областынын сәрһәд нөгтәләринә вә һәм дә дүзкүн нөгтә олмајан дахили нөгтәләринә (1) тәнлијинин мәхсуси нөгтәләри дејилир. Тәнлијин мәхсуси нөгтәси үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли ола да биләр, олмаја да биләр. $(x_0,\ y_0)$ мәхсуси нөгтәси үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли, јә'ни (1) тәнлијинин $y|_{x=x_0}=y_0$ башлангыч шәртини өдәјән һәлли бир, чох вә һәтта сонсуз сајда ола биләр. Бу о демәкдир ки, тәнлијин мәхсуси нөгтәсиндән интеграл әјриси кечә дә биләр (бир, чох вә һәтта сонсуз сајда), һеч бир интеграл әјриси кечмәјә дә биләр. Әкәр $(x_0,\ y_0)$ мәхсуси нөгтәсиндән (1) тәнлијинин бир нечә интеграл әјриси кечирсә, онда онларын һа-

мысынын ејни тохунаны олмалыдыр (чүнки бунларын һамысынын бучаг әмсалы ејни $y'_0=f(x_0,\ y_0)$ әдәдидир). Бу һалда һәмин интеграл әјриләри $(x_0,\ y_0)$ нөгтәсиндә бир-биринә тохунмалыдыр.

Верилмиш хәттин бүтүн нөгтәләри диференсиал тәнлијин мәхсуси нөгтәләри олдугда она һәмин тәнлијин *мәхсуси хәтти* дејилир.

Мәхсуси хәтт диференсиал тәнлијин интеграл әјриси дә ола биләр. Әкәр интеграл әјрисинин һәр бир нөгтәсиндә һәллин јеканәлији позулурса, јә'ни онун һәр бир нөгтәсиндән диференсиал тәнлијин ән азы ики интеграл әјриси кечирсә, онда она диференсиал тәнлијин *мәхсуси интеграл әјриси* дејилир.

Графики мәхсуси интеграл әјриси олан һәллә тәнлијин *мәхсуси һәлли* дејилир. Дедикләримиздән ајдындыр ки, (1) тәнлијинин мәхсуси һәллини тапмаг үчүн онун мәхсуси хәттини (сәрһәд нөгтәләри вә $f(x,y)$, $f'_y(x,\ y)$ функсијаларынын кәсилмә нөгтәләри чохлуғуну) тапмаг, сонра исә һәмин хәттин интеграл әјриси олдуғуну вә онун һәр бир нөгтәсиндә һәллин јеканәлијинин позулдуғуну јохламаг лазымдыр.

Диференсиал тәнлијин мәхсуси һәлли, үмумијјәтлә, онун үмуми һәллинә дахил дејилдир. Буна көрә дә әксәр һалларда тәнлијин мәхсуси һәлли параметрин һеч бир гијмәтиндә онун үмуми һәллиндән алынмыр.

Мисал 1.

$$y'=\frac{y}{x} \tag{2}$$

тәнлијинин сағ тәрәфи $f(x,\ y)=\frac{y}{x}$ вә онун хүсуси төрәмәси $f'_y(x,\ y)=\frac{1}{x}$ мүстәвинин абсиси сыфырдан фәргли олан бүтүн нөгтәләриндә кәсилмәјәндир. Демәли, бүтүн $(x,\ y)$ $(x\neq 0)$ нөгтәләри (2) тәнлији үчүн дүзкүн нөгтәләрдир. Ординат охунун (јә'ни, $x=0$ дүз хәттинин) бүтүн нөгтәләри исә (2) тәнлијинин мәхсуси нөгтәләридир.

(2) тәнлијинин үмуми һәлли $y=Cx$ функсијасыдыр (бурада C ихтијари сабитдир). $x=0$ мәхсуси хәттинин (0, 0) нөгтәсиндән сонсуз сајда интеграл әјриси (координат башланғычындан чыхан шүалар) чыхыр, јердә галан нөгтәләриндән исә һеч бир интеграл әјриси чыхмыр. Бу һалда (0, 0) мәхсуси нөгтәсинә *дүјүн нөгтәси* дејилир (шәкил 242).

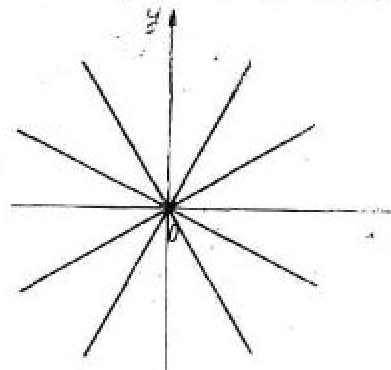
Мисал 2.

$$y'=2\sqrt{y} \tag{3}$$

тәнлијинин сағ тәрәфи $f(x,\ y)=2\sqrt{y}$ вә онун хүсуси төрәмәси $f'_y(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{y}}$ јухары јарыммүстәвидә $(y>0)$ кәсилмәјәндир, јә'ни јухары јарыммүстәвинин бүтүн нөгтәләри (3) тәнлијинин дүзкүн нөгтәләридир.

$y=0$ дүз хәттинин бүтүн нөгтәләри тәнлијин мәхсуси нөгтәләридир. $y=0$ мәхсуси хәтти (3) тәнлијинин интеграл әјри-

сидир, чүнки $y=0$ функсиjасы (3) тәнлиjини өдәjир. $y=0$ дүз хәттинин (абсис охунун) бүтүн нөгтәләриндә һәллин jеканәлиjи позулур. Абсис охунун истәнилән $(x_0, 0)$ нөгтәсиндән һәм тәнлиjин

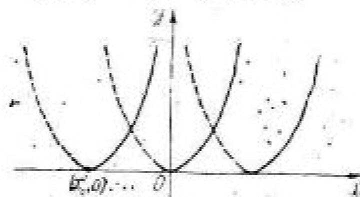


Шәкил 242

$$y=(x+C)^2 \ (x \geqslant -C) \qquad (4)$$

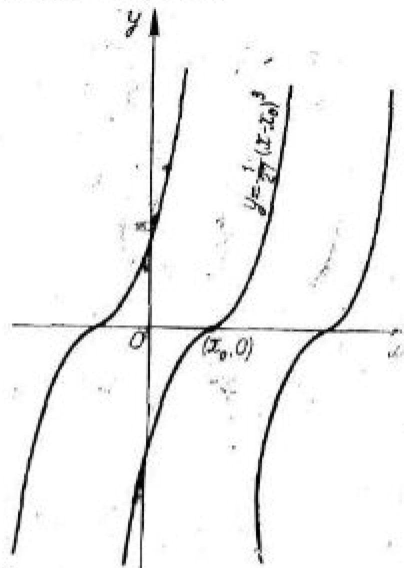
үмуми һәллиндән алынан ($C=-x_0$)

$$y=(x-x_0)^2 \ \ (x \geqslant x_0)$$



Шәкил 243

хүсуси һәлли вә һәм дә $y=0$ һәлли кечир (шәкил 243). Демәли, $y=0$ һәлли (3) тәнлиjинин мәхсуси һәллидир. Бу мәхсуси һәлл (4) үмуми һәллиндән C параметринин һеч бир гиjмәтиндә алынмыр.



Шәкил 244

Jадда сахламаг лазымдыр ки, (4) параболаларынын анчаг сағ голлары (3) тәнлиjинин интеграл әjриләридир (һәмин һиссәләрдә $y'>0$ олур).

Мисал 3. $y'=y^{\frac{2}{3}}$ (5)

тәнлиjинин үмуми һәлли $y=\frac{1}{27}(x+C)^3$ (C ихтиjари сабитдир) функсиjасыдыр.

Доғрудан да, $\left(y^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\cdot y'$ олдуғундан (5) тәнлиjини $\left(3y^{\frac{1}{3}}\right)'=1$ кими jазмаг олар. Бурадан $3y^{\frac{1}{3}}=x+C$, $27y=(x+C^3)$, $y=\frac{1}{27}(x+C)^3$ алыныр.

(5) тәнлиjинин мәхсуси хәтти олан абсис оху һәмин тәнлиjин еjни заманда интеграл әjрисидир, чүнки $y=0$ функсиjасы (5) тәнлиjини өдәjир. $y=0$ дүз хәттинин һәр бир нөгтәсиндә һәллин jеканәлиjи позулур. Абсис охунун истәнилән $(x_0, 0)$ нөгтәсиндән тәнлиjин һәм $y=\frac{1}{27}(x-x_0)^3$ хүсуси һәлли вә һәм дә $y=0$ һәлли кечир (шәкил 244). Демәли, $y=0$ тәнлиjин мәхсуси һәллидир.

Мисал 4.

$$y'=y^{\frac{2}{3}}+2 \qquad (6)$$

тәнлиjинин мәхсуси хәтти абсис охудур. Мүстәвинин jердә галан бүтүн нөгтәләри (6) тәнлиjинин дүзкүн нөгтәсидир.

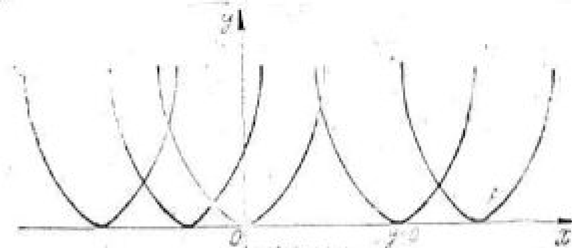
Бу һалда мәхсуси хәтт тәнлиjин интеграл әjриси деjилдир. $y=0$ функсиjасы тәнлиjи өдәмир.

§ 10. БИРПАРАМЕТРЛИ ӘJРИЛӘР АИЛӘСИНИН БҮРҮJӘНИ ВӘ ТӘНЛИJИН МӘХСУСИ ҺӘЛЛИНИН ТАПЫЛМАСЫ

1. Тутаг ки, мүәjjән областда ихтиjари гиjмәтләр ала билән C параметриндән асылы олан

$$F(x, y, C)=0 \qquad (1)$$

тәнлиjи верилмишдир. C параметринин көстәрилән областдакы һәр бир гиjмәтиндә (1) тәнлиjи $(0xy)$ мүстәвисиндә бир әjри тә'jин едир. C параметринә мүмкүн олан бүтүн гиjмәтләри вердикдә (1) тәнлиjи васитәсилә тә'jин олунан бүтүн әjриләр чохлуғу алыныр. Бу әjриләр чохлуғуна *бирпараметрли* ((1) тәнлиjиндә бир дәнә C параметри иштирак едир) *әjриләр аиләси*, (1) мүнасибәтинә исә һәмин *аиләнин тәнлиjи* деjилир.

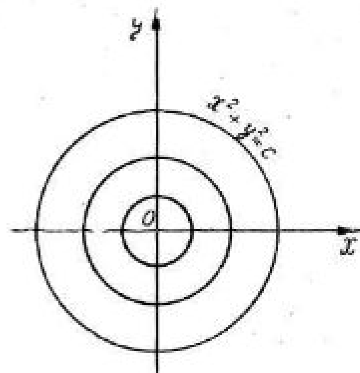


Шәкил 245

Тә'риф. Бирпараметрли әjриләр аиләсинин бүрүjәни (гуршаjаны) елә һамар L әjрисинә деjилир ки, о өзүнүн һәр бир нөгтәсиндә аиләнин һеч олмаса бир әjрисинә тохунур вә һеч бир һиссәси аиләнин әjриләриндән бири илә үст-үстә дүшмүр. Бирпараметрли әjриләр аиләсинин бүрүjәни ола да биләр, олмаjа да биләр.

Мисал 1. $y=(x+C)^2$, $-\infty<C<\infty$ тәнлиjи васитәсилә параболалар аиләси тә'jин олунур. Бу аиләнин бүрүjәни $y=0$ дүз хәттидир, jә'ни абсис оху һәмин параболалар аиләсинин бүрүjәнидир (шәкил 245).

Мисал 2. $x^2+y^2=C$, $0<C<\infty$ тәнлији васитәсилә мәркәзи $(0, 0)$ нөгтәсиндә олан консентрик чevrәләр аиләси тә'јин олунур (шәкил 246). Бу бирпараметрли әјриләр аиләсинин бүрүјәни јохдур.



Шәкил 246

2. Фәрз едәк ки, (1) бирпараметрли әјриләр аиләсинин бүрүјәни вардыр. Бүрүјәнин һәр бир нөгтәси (1) аиләсинин бир әјриси үзәриндә јерләшир. Бу әјри үзәриндә исә (1) мүнасибәти өдәнилир (C-нин гејд олунмуш гијмәтиндә). Онда бүрүјәнин нөгтәләриндә дә (1) мүнасибәти өдәниләр.

Көстәрәк ки, бүрүјәнин нөгтәләри

$$F_c'(x, y, C)=0 \qquad (2)$$

мүнасибәтини дә өдәјир. Бу мәгсәдлә, гејд едәк ки, бүрүјән үзрә һәрәкәт етдикдә C параметри дәјишир $C=C(x)$ ($C_x'=C'(x)\neq 0$) вә буна көрә дә (1) бәрабәрлијини x-ә нәзәрән („бүрүјән үзрә") диференсиалладыгда

$$F_x'+F_y'\cdot y_{бүр.}'+F_c'\cdot C_x'=0 \qquad (3)$$

алынар. Бу бәрабәрликдә иштирак едән $y_{бүр.}'$ кәмијјәти бүрүјәнин ихтијари (x, y) нөгтәсиндә бучаг әмсалыдыр. Бүрүјән өзүнүн һәмин (x, y) нөгтәсиндә (1) әјриләр аиләсинин бир хәттинә тохунур. Буна көрә дә онларын бучаг әмсаллары ејни олмалыдыр: $y_{бүр.}'=y_{хәт.}'$ Хәттин $y_{хәт.}'$ бучаг әмсалы (1) бәрабәрлијини (гејд олунмуш C үчүн) диференсиалламагла тапылыр:

$$F_x'+F_y'\cdot y_{хәт.}'=0. \qquad (4)$$

(3) вә (4) бәрабәрликләринә әсасән $F_c'\cdot C_x'=0$ олар. Бурадан $C_x'\neq 0$ олдуғундан (2) бәрабәрлији алыныр.

Беләликлә, биз көстәрдик ки, (1) аиләси бүрүјәнинин нөгтәләри

$$\begin{cases} F(x, y, C)=0, \\ F_c'(x, y, C)=0 \end{cases} \qquad (5)$$

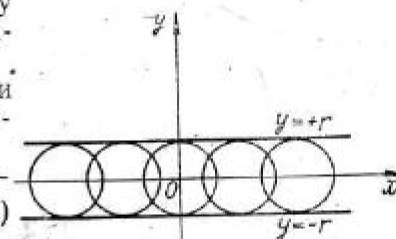
тәнликләрини өдәјир. Бу системдән C параметрини јох етдикдә $\Delta(x, y)=0$ шәклиндә тәнлик алыныр. (5) системинин тә'јин етдији хәттә *дискриминант әјри* дејилир.

Нәзәрә алмаг лазымдыр ки, (1) аиләси әјриләринин мәхсуси нөгтәләри дә (5) системини өдәјир (әјринин мәхсуси нөгтәсини диференсиал тәнлијин мәхсуси нөгтәси илә гарышдырмаг олмаз!). Доғрудан да, $F(x, y, C)=0$ аиләси әјриләринин мәхсуси нөгтәләриндә $F_x'(x, y, C)=F_y'(x, y, C)$ бәрабәрликләри өдәнилир (XXVIII, § 2). Онда (3) бәрабәрлијиндән јенә дә (2) мүнасибәтинин өдәнилмәси алыныр.

Бурадан ајдындыр ки, тапдығымыз дискриминант әјрисинин бүтүн нөгтәләриндә $(F_x')^2+(F_y')^2>0$ мүнасибәти өдәнилдикдә (5) системинин тә'јин етдији әјри (1) аиләсинин бүрүјәнидир вә (5) системиндән C параметрини јох етмәклә алынан $\Delta(x, y)=0$ мүнасибәти һәмин бүрүјәнин тәнлијидир.

Дискриминант әјрисинин нөгтәләрин дә $(F_x')^2+F_y')^2=0$ мүнасибәти өдәнилдикдә исә $\Delta(x, y)=0$ тәнлији әјриләрин мәхсуси нөгтәләри чохлуғуну тә'јин едир, бу исә (1) аиләсинин бүрүјәни олмаја да биләр.

Мисал 3. Бирпараметрли $(x-C)^2+y^2-r^2=0$ әјриләр аиләсинин бүрүјәнини тапмалы.



Шәкил 247

Бурада $F(x, y, C)=(x-C)^2+y^2-r^2$ олдуғундан $F_c'=-2(x-C)$ олар вә (5) системи

$$\begin{cases} (x-C)^2+y^2-r^2=0, \\ -2(x-C)=0 \end{cases}$$

шәклиндә јазылар. Бу системдән C параметрини јох етсәк, $y=\pm r$ тәнликләрини аларыг. Бу әјриләр, јә'ни $y=+r$ вә $y=-r$ дүз хәтләри үзәриндә

$$(F_x')^2+(F_y')^2=4(x-C)^2+4r^2>0$$

мүнасибәти өдәнилдијиндән һәмин дүз хәтләр верилмиш чevrәләр аиләсинин бүрүјәни олар (шәкил 247).

3. Тутаг ки,

$$F(x, y, C)=0$$

мүнасибәти биртәртибли

$$y'=f(x, y) \quad (\text{вә ја } \Phi(x, y, y')=0) \qquad (6)$$

тәнлијинин үмуми интегралыдыр. (1) тәнлији бирпараметрли интеграл әјриләри аиләсини тә'јин едир. Әкәр (1) интеграл әјриләри аиләсинин бүрүјәни варса, һәмин бүрүјән (6) тәнлијинин мәхсуси һәллидир (мәхсуси интеграл әјрисидир).

Доғрудан да, (1) аиләсинин бүрүјәни өзүнүн һәр бир (x, y) нөгтәсиндә һәмин аиләнин бир әјрисинә тохунур. Буна көрә дә һәмин нөгтәјә ујғун олан x, y вә y' кәмијјәтләри (6) тәнлијини өдәјәр. Башга сөзлә, (1) аиләси бүрүјәнинин бүтүн нөгтәләри (6) тәнлијини өдәјир, јә'ни бүрүјән (6) тәнлијинин интеграл әјрисидир. Бу интеграл әјрисинин бүтүн нөгтәләриндә һәллин јеканәлији позулур: һәр бир нөгтәдән һәм бүрүјән вә һәм дә (1) аиләсинин һеч олмаса бир әјриси кечир.

Демәли, (1) интеграл әјриләри аиләсинин бүрүјәни (6) тәнлијинин мәхсуси һәллидир.

Беләликлә, јухарыда көстәрилән гајда илә верилмиш (6) диференсиал тәнлијинин үмуми интегралы (һәлли) мә'лум олдугда онун мәхсуси һәллини (әлбәттә, варса) тапмаг олар.

Мисал 4. $y' = y^{\frac{2}{3}}$ тәнлијинин мәхсуси һәллини тапмалы.

Бу тәнлијин үмуми һәлли $y = \frac{1}{27}(x+C)^3$ функсијасыдыр (§ 9, мисал 3). Интеграл әјриләри аиләсинин бүрүјәнини тапмаг үчүн

$$\begin{cases} y - \frac{1}{27}(x+C)^3 = 0, \\ -\frac{1}{9}(x+C)^2 = 0 \end{cases}$$

системиндән C параметрини јох едәк. Нәтичәдә $y=0$ бүрүјәни алыныр ки, бу да верилмиш тәнлијин мәхсуси һәллидир (шәкил 244).

§ 11. ТӨРӘМӘЈӘ НӘЗӘРӘН ҺӘЛЛ ОЛУНМАМЫШ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН САДӘ НӨВЛӘРИ

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш биртәртибли диференсиал тәнлик үмуми шәкилдә

$$\Phi(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

кими јазылыр. Белә тәнликләри төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш диференсиал тәнлик шәклинә кәтирмәк чох вахт мүмкүн олмур.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш диференсиал тәнликләрин һамысыны һәлл етмәк үчүн үмуми үсул көстәрмәк мүмкүн дејилдир. Лакин (1) тәнлијинин елә садә нөвләри вардыр ки, онлары јени параметр дахил етмәклә һәлл етмәк мүмкүн олур. Бу заман тәнликләрин һәлли параметрик шәкилдә тапылыр.

Әввәлчә бир хүсуси һала бахаг.

Тутаг ки, (1) тәнлији (Oxy) мүстәвисинин һәр һансы областында сонлу сајда гејри-ашкар

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2)$$

функсијаларыны тә'јин едир. Мәсәлән, (1) тәнлији y'-ә нәзәрән

$$(y')^m + p_1(x, y)(y')^{m-1} + \cdots + p_{m-1}(x, y)\, y' + p_m(x, y) = 0$$

шәклиндә m дәрәчәли чохһәдлидирсә вә бу чохһәдли y'-әјнәзәрән һәлл олуна билирсә, онда нәтичәдә m дәнә (2) шәклиндә бәрабәрлик алынар.

(2) тәнликләринин үмуми һәлли ујғун олараг $F_1(x, y, C_1) = 0$, $F_2(x, y, C_2) = 0, \ldots, F_m(x, y, C_m) = 0$ олсун. Бу үмуми һәлләр чохлуғуна (1) тәнлијинин үмуми һәлли дејилир. Буну бә'зән

$$F_1(x, y, C_1) \cdot F_2(x, y, C_2) \cdots F_m(x, y, C_m) = 0$$

кими јазырлар. Үмумилији азалтмадан бүтүн $C_1, C_2, \ldots, C_m$ параметрләрини бир C параметри илә әвәз етмәк олар. Онда (1) тәнлијинин үмуми һәлли

$$F_1(x, y, C) \cdot F_2(x, y, C) \cdots F_m(x, y, C) = 0 \qquad (3)$$

шәклиндә алыныр.

Мисал 1. $y'^2 - (2x + y)\, y' + 2xy = 0$ тәнлијини һәлл етмәли.

Бу тәнлик y'-ә нәзәрән квадрат тәнлик олдуғундан ону һәлл едәрәк,

$$y' = 2x \text{ вә } y' = y$$

тәнликләрини аларыг. Бу тәнликләрин үмуми һәлли исә ујғун олараг

$$y = x^2 + C, \quad y = Ce^x \quad (-\infty < C < \infty) \qquad (4)$$

функсијаларыдыр. (4) һәлләри бирликдә верилмиш тәнлијин үмуми һәллидир. Бу үмуми һәлли

$$(y - x^2 - C)(y - Ce^x) = 0$$

кими бир бәрабәрлик шәклиндә дә јазмаг олар.

Инди параметр дахилетмә үсулу илә һәлл олунан бир сыра тәнлик нөвләринә бахаг.

I. $y = f(y')$. (5)

Тәнлији һәлл етмәк үчүн $y' = p$ гәбул едәк. Онда верилмиш тәнликдән $y = f(p)$ бәрабәрлији алыныр.

Бурада p-ни параметр һесаб едәк вә x дәјишәнини p илә ифадә етмәјә чалышаг. Бу мәгсәдлә $y' = p$ бәрабәрлијини $dx = \frac{dy}{p}$ шәклиндә јазаг вә алынан бәрабәрлији һиссә-һиссә интеграллама гајдасыны тәтбиг етмәклә интеграллајаг:

$$x = \int \frac{dy}{p} + C = \frac{y}{p} + \int \frac{y\,dp}{p^2} + C = \frac{y}{p} + \int \frac{f(p)\,dp}{p^2} + C$$

вә ја

$$x = \frac{f(p)}{p} + \int \frac{f(p)\,dp}{p^2} + C.$$

Беләликлә, алынан

$$\begin{cases} y = f(p), \\ x = \frac{f(p)}{p} + \int \frac{f(p)\,dp}{p^2} + C \end{cases} \qquad (6)$$

тәнликләр системи (5) тәнлијинин параметрик шәкилдә үмуми һәллидир. (6) системиндән p параметрини јох етмәклә (5) тәнлијинин $F(x, y, C) = 0$ шәклиндә үмуми интегралы алыныр.

Мисал 2. $y = (y')^2 e^{y'}$ тәнлијини $y' = p$ параметрини дахил етмәклә һәлл едәк.

Бу һалда $y = p^2e^p$ бәрабәрлијини вә ону диференсиалламагла $y' = (2pe^p + p^2e^p)\frac{dp}{dx}$ мүнасибәтини аларыг. Бурадан

$$dx = \frac{2pe^p + p^2e^p}{p}dp, \quad x = \int (2e^p + pe^p)\,dp + C =$$
$$= e^p + pe^p + C.$$

Беләликлә, верилмиш тәнлијин үмуми һәлли

$$\begin{cases} y = p^2e^p, \\ x = e^p + pe^p + C \end{cases}$$

олар.

II. $x = f(y')$. (7)

Бу һалда да $y' = p$ параметри көтүрүлүр вә x, y дәјишәнләри p вә C васитәсилә ифадә олунур.

(7) тәнлијиндән $x = f(p)$ бәрабәрлији вә $y' = p$ мүнасибәтиндән $dy = pdx$, $y = \int pdx + C$

$$y = px - \int xdp + C$$

вә ја

$$y = pf(p) - \int f(p)\,dp + C$$

алыныр. Демәли, (7) тәнлијинин параметрик шәкилдә үмуми һәлли

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = pf(p) - \int f(p)\,dp + C \end{cases}$$

олар. Бу системдән p параметрини јох етмәклә (7) тәнлијинин $F(x, y, C) = 0$ шәклиндә үмуми интегралы алыныр.

Мисал 3. $x = y' + \sin y'$ тәнлијини һәлл етмәли. $y' = p$ гәбул етсәк, $x = p + \sin p$ вә $dx = (1 + \cos p)\,dp$ олар. $y' = p$ бәрабәрлијиндән исә $dy = pdx = p(1 + \cos p)\,dp$ вә ја $y =$

$$= \int p(1 + \cos p)\,dp = \frac{p^2}{2} + p\sin p + \cos p + C$$

алыныр. Демәли, верилмиш тәнлијин үмуми һәлли

$$\begin{cases} x = p + \sin p, \\ y = \frac{p^2}{2} + p\sin p + \cos p + C \end{cases}$$

олар.

III. Клеро тәнлији.

x вә y дәјишәнләринә нәзәрән хәтти олан

$$y = y'x + \varphi(y') \quad (8)$$

тәнлијинә *Клеро*[1] *тәнлији* дејилир.

Бу тәнлији һәлл етмәк үчүн јенә дә көмәкчи $y' = p$ параметри көтүрүлүр. Онда (8) тәнлијинә әсасән

$$y = xp + \psi(p) \quad (9)$$

олар. Бу бәрабәрлији диференсиалладыгда

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

вә ја

$$\frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0$$

алыныр. Бурадан ајдындыр ки, ја

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad (10)$$

вә ја

$$x + \psi'(p) = 0 \quad (11)$$

олмалыдыр.

(10) бәрабәрлијиндән $p = C$ алыныр. Бу гијмәти (9) бәрабәрлијинә p-нин әвәзинә јаздыгда (8) тәнлијинин

$$y = Cx + \psi(C) \quad (12)$$

шәклиндә үмуми һәллини алырыг.

(11) вә (9) бәрабәрликләри бирликдә Клеро тәнлијинин параметрик шәкилдә һәллини тә'јин едир:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = xp + \psi(p). \end{cases} \quad (13)$$

Бу әјри $\psi''(p) \neq 0$ олдугда (12) бирпараметрли әјриләр аиләсинин бүрүјәнидир. Диференсиал тәнлијин интегрел әјриләри аиләсинин бүрүјәни исә һәмин тәнлијин мәхсуси һәллидир (§ 10, 3). Демәли, (13) һәлли Клеро тәнлијинин мәхсуси һәллидир.

(13) системиндән p параметрини јох етмәклә Клеро тәнлијинин $F(x, y) = 0$ шәклиндә мәхсуси һәлли алыныр.

Мисал 4. $y = xy' - y'^2$ тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = Cx - C^2 \quad (14)$$

олар. (14) бирпараметрли әјриләр аиләсинин бүрүјәнини тапмаг үчүн (14) бәрабәрлијиндән C-јә нәзәрән төрәмә алаг:

$$x - 2C = 0, \quad C = \frac{x}{2}.$$

Бу гијмәти (14) бәрабәрлијиндә C-нин јеринә јаздыгда верилмиш тәнлијин мәхсуси һәлли вә ја (14) интеграл әјриләринин бүрүјәни алыныр:

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

IV. Лагранж тәнлији.

Клеро тәнлијинин үмумиләшмәси олан

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad (15)$$

тәнлијинә *Лагранж тәнлији* дејилир. $\varphi(y') = y'$ олдугда

[1] Алексис Клеро (1713—1765) Франса ријазијјатчысыдыр.

Лагранж тәнлији Клеро тәнлијинә чеврилир. Буна көрә дә $\varphi(y')\neq y'$ олдуғуну гәбул едәк.

Лагранж тәнлији Клеро тәнлији кими һәлл олунур. $y'=p$ гәбул етдикдә, (15) тәнлији

$$y = x\varphi(p)+\psi(p) \tag{16}$$

шәклиндә јазылыр. Бу бәрабәрлији x-ә нәзәрән диференсиалладыгда

$$y'=\varphi(p)+x\varphi'(p)\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

вә ја $y'=p$ олмасындан истифадә етдикдә,

$$\frac{dx}{dp}-\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)} \tag{17}$$

алыныр. (17) тәнлији x вә онун $\frac{dx}{dp}$ төрәмәсинә нәзәрән хәтти тәнликдир. Онун үмуми һәлли

$$F(x, p, C)=0 \tag{18}$$

шәклиндә олар. (16) вә (18) тәнликләри бирликдә Лагранж тәнлијинин үмуми һәллини параметрик шәкилдә тә'јин едир:

$$\begin{cases} y = x\varphi(p)+\psi(p), \\ F(x, p, C)=0. \end{cases}$$

Бу системдән p параметрини јох етдикдә Лагранж тәнлијинин $F_1(x, y, C)=0$ шәклиндә үмуми интегралы алыныр.

Гејд едәк ки, јухарыда тәтбиг етдијимиз параметр дахил етмә үсулу илә

$$x=f(y, y'), \quad y=f(x, y'), \dots$$

вә с. кими тәнликләри төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнлијә кәтирәрәк һәлл етмәк олар.

XXXI ФӘСИЛ

ЈҮКСӘКТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

§ 1. ҮМУМИ АНЛАЈЫШЛАР ВӘ ТӘКЛИФЛӘР

Тәртиби бирдән бөјүк олан

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0 \tag{1}$$

шәклиндә тәнлијә *јүксәктәртибли диференсиал тәнлик* дејилир. (1) тәнлији n-тәртибли диференсиал тәнликдир (XXX, § 1). Бу тәнлији n-тәртибли $y^{(n)}$ төрәмәсинә нәзәрән һәлл етмәк мүмкүн олдуғда јүксәктәртибли төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

тәнлији алыныр.

Биртәртибли диференсиал тәнликләр кими јүксәктәртибли диференсиал тәнликләрин дә, үмумијјәтлә, чох вә һәтта сонсуз сајда һәлли вардыр. Бу һәлләрин графикләри диференсиал тәнлијин интеграл әјриләри адланыр.

(1) вә ја (2) тәнлијинин верилмиш нөгтәдән кечән мүәјјән интеграл әјрисини тапмаг үчүн әлавә шәртләр верилмәлидир. Бу шәртләр мүхтәлиф формаларда верилә биләр.

Әлавә шәртләр ахтарылан функсијанын һәр һансы парчанын уч нөгтәләриндә вә ја мүәјјән сајда дахили нөгтәләриндә гијмәтләри кими верилә биләр. Бу һалда, диференсиал тәнлијин белә шәртләри өдәјән һәллинин ахтарылмасына *сәрһәд мәсәләси* дејилир.

Әлавә шәртләр ахтарылан функсијанын вә онун төрәмәләринин һәр һансы бир нөгтәдә гијмәтләри кими верилдикдә диференсиал тәнлик үчүн *Коши мәсәләси* алыныр.

n-тәртибли диференсиал тәнликләр үчүн Коши мәсәләси белә гојулур: (1) вә ја (2) тәнлијинин верилмиш $x=x_0$ нөгтәсиндә

$$\begin{aligned} y(x_0)&=y_0, \\ y'(x_0)&=y_0', \\ &\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0)&=y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{3}$$

шәртләрини өдәјән $y=y(x)$ һәллини тапмалы.

Бу һалда $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ әдәдләри һәллин *башланғыч гијмәтләри* вә ја *башланғыч шәртләри* адланыр. (1) (вә ја (2)) тәнлијинин $y=\varphi(x)$ һәлли

$$\varphi(x_0)=y_0, \ \varphi'(x_0)=y_0', \dots, \ \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{4}$$

бәрабәрликләрини өдәдикдә, дејирләр ки, һәмин һәлл верилмиш $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ башланғыч шәртләрини (вә ја башланғыч гијмәтләрини) өдәјир.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш n-тәртибли (2) диференсиал тәнлијинин верилмиш башланғыч шәртләри өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији үчүн кафи шәрт ашағыдакы теоремдә көстәрилир.

Коши теореми. ***Тутаг ки, $(n+1)$-дәјишәнли $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функсијасы $(n+1)$-өлчүлү фәзанын һәр һансы σ областында кәсилмәјәндир, $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ дәјишәнләринә нәзәрән кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри вардыр вә $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})\in\sigma$. Онда (2) тәнлијинин мүәјјән $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ интервалында тә'јин олунмуш вә (4) башланғыч шәртләрини өдәјән јеканә $y=y(x)$ һәлли вар.***

Гејд едәк ки, $n>1$ олдугда (2) тәнлији үчүн Коши мәсәләси һәллинин јеканәлији һеч дә мүстәвинин верилмиш (x_0, y_0) нөгтәсиндән јекан интеграл әјрисинин кечдијини көстәр-

мир. Мәсәлән, $n = 2$ олдугда (2) тәнлијинин x_0, y_0, y_0' башланғыч шәртләри өдәјән һәллинин јеканә олмасы о демәклир ки, верилмиш (x_0, y_0) нөгтәсиндән тохунанынын бучаг әмсалы y_0' олан јеканә интеграл әјриси кечир. Әлбәттә, бу һалда (x_0, y_0) нөгтәсиндән тохунанынын бучаг әмсалы башга әдәдләр олан сонсуз сајда интеграл әјриләри дә кечә биләр.

Коши теореминдән ајдындыр ки, (2) тәнлијинин сонсуз сајда һәлли вар. Верилмиш башланғыч гијмәтләрин x_0 әдәдини сабит һесаб едәрәк, $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ әдәдләрини мүәјјән областда дәјишдирсәк (әлбәттә, $(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)})$ нөгтәси Коши теореминдә көстәрилән σ областында галмаг шәрти илә), онда һәр бир $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ әдәдләр системинә (2) тәнлијинин бир

$$y = \varphi(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$$

һәлли ујғун олар. Бурада $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ әдәдләрини ујғун олараг $C_1, C_2, \ldots, C_n$ илә әвәз етдикдә (2) тәнлијинин

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (5)$$

һәлли алыныр. Бу һәлл n дәнә ихтијари $C_1, C_2, \ldots, C_n$ параметриндән асылыдыр. Она (2) тәнлијинин *үмуми һәлли* дејилир.

Даһа дәгиг, (2) тәнлијинин ихтијари $C_1, C_2, \ldots, C_n$ параметриндән асылы олан $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ һәллинә о заман һәмин тәнлијин үмуми һәлли дејилир ки, һәмин һәлдән $C_1, C_2, \ldots, C_n$ параметрләринә мүәјјән $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ гијмәтләрини вермәклә истәнилән $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ башланғыч шәртини (әлбәттә, $(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \sigma$ олмалыдыр) өдәјән

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0) \qquad (6)$$

һәллини алмаг мүмкүн олсун.

(2) тәнлијинин үмуми һәлли

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \qquad (7)$$

тәнлији васитәсилә гејри-ашкар шәкилдә тә'јин олундугда она тәнлијин *үмуми интегралы* дејилир.

Диференсиал тәнлијин (5) үмуми һәллиндән $C_1, C_2, \ldots, C_n$ параметрләринә мүәјјән $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ гијмәтләри вермәклә алынан (6) функсијасына һәмин тәнлијин *хүсуси һәлли* дејилир. $F(x, y, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0) = 0$ мүнасибәти исә диференсиал тәнлијин *хүсуси интегралы* адланыр.

Һәндәси олараг үмуми һәлл (вә ја үмуми интеграл) n параметрдән асылы олан интеграл әјриләри аиләсиндән ибарәтдир. Бу аиләнин һәр бир әјриси диференсиал тәнлијин бир хүсуси һәллинин (хүсуси интегралынын) графики олар.

Јүксәктәртибли диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин әсас мәсәләси верилмиш диференсиал тәнлијин бүтүн һәлләрини тапмаг вә онларын хассәләрини өјрәнмәкдир. Јүксәктәртибли

диференсиал тәнликләрин һәлл едилмә мәсәләси биртәртибли тәнликләрин һәллиндән нисбәтән чәтин вә мүрәккәбдир. Бир сыра јүксәктәртибли диференсиал тәнликләр тәртиби азалдылараг, нисбәтән ашағы тәртибли диференсиал тәнлијә кәтирилмәклә һәлл олунур.

§ 2. ТӘРТИБИ АЗАЛДЫЛА БИЛӘН ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Бурада тәртиби азалдыла билән бир сыра јүксәктәртибли диференсиал тәнликләрин һәлли өјрәнилир.

1. $y^{(n)} = f(x)$. (1)

Бу тәнлијин үмуми һәллини тапмаг үчүн $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ олдуғуну нәзәрә алаг вә онун һәр ики тәрәфини ихтијари $[x_0, x]$ парчасы үзрә интеграллајаг:

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x_1)\,dx_1 + C_1$$

(C_1 ихтијари сабитдир). Алынан бәрабәрлији јенидән интегралласаг,

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} f(x_2)\,dx_2 + C_1(x - x_0) + C_2$$

олар. Бу интеграллама әмәлини јенидән $(n-2)$ дәфә тәкрар етдикдә

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n + C_1 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n \qquad (2)$$

алыныр. Бурада $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ихтијари сабитләрдир.

(1) тәнлијинин истәнилән $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ башланғыч шәртини өдәјән һәллини алмаг үчүн (2) һәллиндә

$$C_n = y_0,\ C_{n-1} = y_0', \ldots, C_1 = y_0^{(n-1)}$$

көтүрмәк кифајәтдир:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n + y_0^{(n-1)} \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + y_0'(x-x_0) + y_0.$$

Бурадан ајдындыр ки, (2) ифадәси (1) тәнлијинин үмуми һәллидир.

Хүсуси һалда, (1) тәнлијинин $x_0, 0, 0, \ldots, 0$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n \qquad (3)$$

олар. Јохламаг олар ки,

$$y^*(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt \qquad (4)$$

функсијасы да (1) тәнлијинин $x_0, 0, 0, \ldots, 0$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллидир. Коши теореминә көрә (1) тәнлијинин $x_0, 0, 0, \ldots, 0$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли јеканә олмалыдыр:

$$\int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt. \qquad (5)$$

Бу дүстура *Коши дүстуру* дејилир.

Мисал 1. $y''=e^x$ тәнлијинин үмуми һәллини вә

$$y(0)=3,\ y'(0)=2 \qquad (6)$$

башланғыч шәртләрини өдәјән хүсуси һәллини тапмалы.

Тәнлији ардычыл интегралламагла

$$y'(x)=\int_0^x e^x\,dx+C_1=e^x+C_1,$$

$$y(x)=\int_0^x (e^x+C_1)\,dx+C_2=e^x+C_1x+C_2$$

вә ја $y(x)=e^x+C_1x+C_2$ аларыг. Бу верилмиш тәнлијин үмуми һәллидир.

Верилән (6) башланғыч шәртләринә әсасән C_1 вә C_2 сабитләри тә'јин олуна биләр:

$$3=y(0)=C_2+1,\ C_2=2,$$
$$2=y'(0)=1+C_1,\ C_1=1.$$

Беләликлә, верилмиш тәнлијин (6) башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли

$$y=e^x+x+2$$

олар.

II. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)})=0.$ (7)

$y^{(k)}=z$ әвәзләмәси васитәсилә (7) тәнлијинин тәртиби k гәдәр азалыр. Доғрудан да,

$$y^{(k+1)}=z', \ldots, y^{(n)}=z^{(n-k)}$$

олдуғундан (7) тәнлији $(n-k)$ тәртибли

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)})=0 \qquad (8)$$

тәнлијинә кәтирилир.

Фәрз едәк ки, (8) тәнлијинин

$$z=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$$

шәклиндә үмуми һәлли тапылмышдыр. Бурада z әвәзинә $y^{(k)}$ јазмагла, (1) шәклиндә

$$y^{(k)}=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$$

тәнлији алынар. Бу тәнлијин үмуми һәлли исә јухарыда көстәрилән гајда илә тапылыр:

$$y=\psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Мисал 2. $y'''-y''=0$ тәнлији $y''=z$ әвәзләмәси васитәсилә $z'-z=0$ тәнлијинә кәтирилир. Ахырынчы тәнлијин үмуми һәллини тапа

$$z'=z,\ \frac{dz}{z}=dx,\ \ln|z|=x+\ln|C_1|.$$

$$z=C_1e^x.$$

Бурадан

$$y''=C_1e^x$$

тәнлији алыныр. Онун үмуми һәлли

$$y=C_1e^x+C_2x+C_3$$

олар.

III. $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0.$ (9)

Белә тәнликләрин тәртибини $y'=p$ әвәзләмәси васитәсилә бир ваһид азалтмаг мүмкүндүр. Бу мәгсәдлә y-и сәрбәст дәјишән вә ја аргумент, p-ни исә y-ин функсијасы $p(y)$ һесаб етмәк лазымдыр. Онда y-ин x-ә нәзәрән төрәмәләрини p-нин y-ә нәзәрән төрәмәләри илә ифадә етмәк мүмкүн олур:

$$\frac{dy}{dx}=p,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dy}\left(p\,\frac{dp}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,$$

. . . .

Бурадан ајдындыр ки, $\frac{d^ky}{dx^k}$ төрәмәси p-нин y-ә нәзәрән тәртиби $(k-1)$-дән бөјүк олмајан төрәмәләри васитәсилә ифадә олунур. Бу гијмәтләри (9) тәнлијиндә јеринә јаздыгда p-нин y-ә көрә төрәмәләринә нәзәрән $(n-1)$-тәртибли тәнлик алыныр:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0.$$

Алынмыш тәнлијин үмуми интегралы

$$\Phi_1(y, p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})=0$$

оларса, онда (9) тәнлијинин үмуми интегралыны тапмаг үчүн биртәртибли

$$\Phi_1\left(y, \frac{dy}{dx}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right) = 0$$

тәнлијини һәлл етмәк лазымдыр.

Мисал 3. $\frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ тәнлијини һәлл етмәли.

$\frac{dy}{dx} = p$ гәбул етдикдә $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$ олур. Онда верилмиш тәнлик дәјишәнләринә ајрылан $p\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$ тәнлијинә чеврилир. Бунун үмуми һәлли $p = C_1 e^y$ олар. Бурадан верилмиш тәнлијин үмуми һәлли тапылыр:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^y, \ e^{-y} dy = C_1 dx,$$

$$-e^{-y} = C_1 x + C_2.$$

IV. Ола биләр ки,

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (10)$$

тәнлијинин сол тәрәфи бир

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

шәклиндә ифадәнин там диференсиалыдыр:

$$d\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = (x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx.$$

Онда (10) тәнлијини

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан $(n-1)$-тәртибли

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1$$

диференсиал тәнлији алыныр. Буна (10) тәнлијинин *биринчи интегралы* дејилир.

Демәли, сол тәрәфи там диференсиал олан тәнлијин биринчи интегралыны тапмагла онун тәртибини бир ваһид азалтмаг мүмкүн олур.

Мисал 4. $xy'' + y' = 0$ тәнлијинин сол тәрәфи xy' ифадәсинин там диференсиалыдыр. Буна көрә дә һәмин тәнлији $d(xy') = 0$ кими јазмаг олар. Бурадан верилмиш тәнлијин $xy' = C_1$ шәклиндә биринчи интегралы алыныр.

$xy' = C_1$ тәнлијини һәлл етмәклә верилмиш тәнлијин $y = C_1 \ln x + C_2$ үмуми һәлли тапылыр.

§ 3. ХӘТТИ БИРЧИНСЛИ ТӘНЛИКЛӘР

Јүксәктәртибли диференсиал тәнликләрин ән јахшы өјрәнилмиш вә мүкәммәл нәзәријјәси олан нөвү хәтти диференсиал тәнликләрдир. Хәтти диференсиал тәнликләрин бир чох

тәтбигләри вардыр. Елм вә техниканын бир чох мәсәләләринин һәлли онларын интегралланмасына кәтирилир.

Тә'риф. *Мәчһул y функсијасы вә онун $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ төрәмәләринә нәзәрән бирдәрәчәли олан n-тәртибли диференсиал тәнлијә, јә'ни*

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = \varphi(x) \qquad (1)$$

*шәклиндә олан тәнлијә n-тәртибли **хәтти** диференсиал тәнлик дејилир.*

$a_0(x) \neq 0$ олдугда (1) тәнлијинин һәр ики тәрәфини $a_0(x)$ функсијасына бөлмәклә ону

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x) \quad (2)$$

шәклинә кәтирмәк олар. Бу тәнликдә иштирак едән $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, $f(x)$ функсијалары мүәјјән (a, b) интервалында кәсилмәз һесаб олунур.

(2) тәнлијинин сағ тәрәфиндә дуран $f(x)$ функсијасына тәнлијин сағ тәрәфи дејилир.

$f(x) \neq 0$ олдугда (2) тәнлијинә n-тәртибли хәтти бирчинсли олмајан (вә ја сағ тәрәфли) диференсиал тәнлик дејилир. $f(x) \equiv 0$ олдугда исә она, јә'ни

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = 0 \qquad (3)$$

тәнлијинә n-тәртибли хәтти бирчинсли (вә ја сағ тәрәфсиз) диференсиал тәнлик дејилир.

Ајдындыр ки, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, $f(x)$ функсијалары (a, b) интервалында кәсилмәјән олдугда верилмиш $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ $(a < x_0 < b)$ башланғыч гијмәтләринин тә'јин етдији $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ нөгтәсинин истәнилән әтрафында (2) вә (3) тәнликләри үчүн һәллин варлығы вә јеканәлији һаггында Коши теореминин (§ 1) шәртләри өдәнилир. Буна көрә дә (2) вә (3) хәтти тәнликләринин мүәјјән $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ интервалында тә'јин олунмуш вә $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ башланғыч шәртләрини өдәјән јеканә $y = y(x)$ һәлли вар. Инди хәтти бирчинсли диференсиал тәнликләрин һәллинин хассәләрини өјрәнәк.

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y \qquad (4)$$

ифадәсинә *хәтти диференсиал оператор* дејилир.

$L[y]$ ифадәсини алмаг үчүн хәтти диференсиал

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

оператору $y = y(x)$ функсијасына тәтбиг едилир. Бу вахт

$$\frac{d^k}{dx^k} y \equiv \frac{d^k y}{dx^k} \text{ вә } p_k(x)\frac{d^k}{dx^k} y \equiv p_k(x)\frac{d^k y}{dx^k} \ (k = 0, 1, \ldots, n)$$

олдуғу нәзәрә алынмалыдыр.

Ајдындыр ки, (4) хәтти диференсиал оператору васитәсилә n-чи тәртибдән диференсиалланан һәр бир $y(x)$ функсијасына бир $L[y]=\varphi(x)$ функсијасы гаршы гојулур. Мәсәлән, $L[y]=y''+3xy'+x^2y$ олдугда

$$L[x^2]=2+6x^2+x^4,\quad L(e^x)=e^x(1+3x+x^2),$$
$$L[x+1]=3x+x^3+x^2$$

вә с. олур. (4) мүнасибәтиндән истифадә едәрәк, (3) хәтти бирчинсли тәнлијини

$$L[y]=0 \qquad (5)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Хәтти диференсиал операторларын әсас ики хассәси вардыр.

I. Сабит вуруғу хәтти диференсиал оператор ишарәси харичинә чыхармаг олар:

$$L[Cy]\equiv CL[y].$$

Доғрудан да,

$$L[Cy]\equiv(Cy)^{(n)}+p_1(x)(Cy)^{(n-1)}+\dots+p_n(x)(Cy)\equiv$$
$$\equiv C\left[y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(y)y\right]\equiv CL[y].$$

Бу хассәјә хәтти операторун *бирчинслилик хассәси* дејилир.

II. Ики функсија чәминин хәтти оператору топлананларын хәтти операторлары чәминә бәрабәрдир, јә'ни n-чи тәртибдән диференсиалланан ихтијари y_1 вә y_2 функсијалары үчүн

$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2]$$

бәрабәрлији доғрудур.

Доғрудан да,

$$L[y_1+y_2]\equiv(y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)(y_1+y_2)^{(n-1)}+\dots+$$
$$+p_n(x)(y_1+y_2)\equiv\left[y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y_1\right]+$$
$$+\left[y_2^{(n)}+p_1(x)y_2^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y_2\right]\equiv L[y_1]+L[y_2].$$

Бу хассәјә хәтти операторун *адитивлик хассәси* дејилир.

Бу ики хассәдән ајдындыр ки, хәтти диференсиал L оператору ихтијари $C_1, C_2, \dots, C_n$ сабитләри вә $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсијалары үчүн

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} C_k y_k\right]\equiv\sum_{k=1}^{n} C_k L[y_k] \qquad (6)$$

бәрабәрлијини өдәјир.

Хәтти диференсиал операторун хассәләринә әсасән хәтти бирчинсли (5) тәнлијинин һәлли һаггында ашағыдакы тәклифләри сөјләмәк олар.

Теорем 1. *$y_1=y_1(x)$ функсијасы (5) тәнлијинин һәллидирсә вә C ихтијари сабитдирсә, онда Cy_1 функсијасы да һәмин тәнлијин һәллидир.*

Исбаты. Шәртә көрә $L[y_1]\equiv0$ мүнасибәти өдәнилир. Онда L операторунун I хассәсинә әсасән ихтијари C үчүн

$$L[Cy_1]\equiv CL[y_1]\equiv0$$

олар.

Теорем 2. *$y_1=y_1(x)$ вә $y_2=y_2(x)$ функсијалары (5) тәнлијинин һәллидирсә, онларын y_1+y_2 чәми дә һәмин тәнлијин һәллидир.*

Исбаты. Шәртә көрә $L[y_1]\equiv0$ вә $L[y_2]\equiv0$ мүнасибәтләри өдәнилир. Онда L операторунун II хассәсинә көрә

$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2]\equiv0.$$

Нәтичә. Әкәр $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсијалары (5) тәнлијинин һәллидирсә, онда онларын ихтијари $C_1, C_2, \dots, C_n$ әмсаллы $\sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ хәтти комбинасијасы да һәмин тәнлијин һәллидир.

Мә'лумдур ки, n-тәртибли диференсиал тәнлијин үмуми һәлли n дәнә ихтијари $C_1, C_2, \dots, C_n$ параметриндән асылы олур (§ 1). Әкәр $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсијалары n-тәртибли (5) хәтти тәнлијинин һәллидирсә, онда нәтичәјә көрә n дәнә ихтијари $C_1, C_2, \dots, C_n$ параметриндән асылы олан

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n \qquad (7)$$

хәтти комбинасијасы да һәмин тәнлијин һәллидир.

(7) функсијасынын (5) хәтти тәнлијинин үмуми һәлли олмасы һаггында нә демәк олар? (7) функсијасы (5) тәнлијинин үмуми һәлли ола да биләр, олмаја да биләр. Бу мәсәләнин һәлли $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсијалары системинин хәтти асылы олуб-олмамасындан асылыдыр.

§ 4. ФУНКСИЈАЛАР СИСТЕМИНИН ХӘТТИ АСЫЛЫЛЫҒЫ ВӘ ВРОНСКИ ДЕТЕРМИНАНТЫ

Векторларын вә хәтти фәза елементләринин хәтти асылылығы мәсәләси әввәлләр (III, IV, § 3) өјрәнилмишдир.

Бурада (a, b) интервалында тә'јин олунмуш $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функсијалары системинин хәтти асылылығы тәдгиг олунур.

Тә'риф 1. *$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функсијаларына о заман (a, b) интервалында хәтти асылы функсијалар дејилир ки, һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан вә (a, b) интервалында*

$$\lambda_1y_1(x)+\lambda_2y_2(x)+\dots+\lambda_ny_n(x)\equiv0 \qquad (1)$$

ејнилијини өдәјән һәгиги $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәдләри олсун. Әкәр (1) ејнилији јалныз $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$ олдугда өдәнилирсә, онда $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функсијаларына (a, b) интервалында хәтти асылы олмајан функсијалар дејилир.

Верилмиш $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функсијаларынын бири ејниликлә сыфра бәрабәр олдугда һәмин функсијалар һәмишә хәтти асылы олар.

Доғрудан да, $y_k(x)\equiv0$ оларса, онда $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_{k-1}=\lambda_{k+1}=\dots=\lambda_n=0$, $\lambda_k\neq0$ әмсаллары үчүн (1) ејнилији өдә-

нилләр. Верилмиш $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ функсијалары системинин һәр һансы алт һиссәси хәтти асылы олдугда, һәмин функсијалар системи дә хәтти асылы олар. Хәтти асылы олмајан $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ функсијалары системинин истәнилән алт һиссәси исә хәтти асылы олмајандыр.

Хәтти фәза елементләринин хәтти асылы олмасы һаггында китабын биринҹи һиссәсиндә (IV, § 3) исбат олунмуш теоремдән ашағыдакы нәтиҹә алыныр:

$y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ функсијаларынын (a, b) интервалында хәтти асылы олмасы үчүн онлардан биринин галанларынын хәтти комбинасијасы олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

Мисал 1. $y_1(x)=1$, $y_2(x)=\sin^2 x$, $y_3(x)=\cos^2 x$ функсијалары истәнилән (a, b) интервалында хәтти асылыдыр.

Доғрудан да, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ вә $\lambda_3=-1$ әдәдләри үчүн истәнилән (a, b) интервалында

$$\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\lambda_3 y_3(x)\equiv 1-\sin^2 x-\cos^2 x\equiv 0$$

ејнилији өдәнилир.

Мисал 2. $y_1(x)=1$, $y_2(x)=x$, $y_3(x)=x^2$, ..., $y_n(x)=x^{n-1}$ функсијалары бүтүн әдәд охунда хәтти асылы дејилдир (n истәнилән натурал әдәддир).

Доғрудан да, һеч олмаса бир әмсалы сыфырдан фәргли олан вә дәрәҹәси $(n-1)$-и ашмајан

$$\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_3 x^2+\dots+\lambda_n x^{n-1}$$

чохһәдлисинин $(n-1)$-дән чох сыфры (көкү) ола билмәз (XVIII, § 7, 8). Буна көрә дә

$$\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_3 x^2+\dots+\lambda_n x^{n-1}\equiv 0$$

ејнилији јалныз $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$ олдугда мүмкүндүр, јә'ни

$$1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^{n-1}$$

функсијалары бүтүн әдәд охунда хәтти асылы дејилдир.

Мисал 3. $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=e^{-x}$ вә $y_3(x)=\operatorname{ch} x$ функсијалары бүтүн әдәд охунда хәтти асылыдыр.

Доғрудан да, y_3 функсијасы y_1 вә y_2 функсијаларынын хәтти комбинасијасы шәклиндә көстәрилә билир:

$$y_3=\frac{1}{2}(y_1+y_2).$$

Тутаг ки, (a, b) интервалында тә'јин олунмуш $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ функсијалары һәмин интервалда $(n-1)$-ҹи тәртибдән диференсиаллананды. Һәмин функсијалар васитәсилә дүзәлдилмиш n-тәртибли

$$W(x)=W[y_1, y_2, \dots, y_n]=\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \dots, & y_n \\ y_1', & y_2', & \dots, & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \dots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

детерминантына $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ функсијаларынын Вронски[1] детерминанты вә ја вронскианы дејилир.

Теорем 1. *(a, b) интервалында хәтти асылы олан $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсијаларынын Вронски детерминанты һәмин интервалда ејниликлә сыфра бәрабәрдир.*

Исбаты. $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсијалары (a, b) интервалында хәтти асылы олдуғундан һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан елә $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәдләри вар ки, һәмин интервалда

$$\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\dots+\lambda_n y_n(x)\equiv 0 \qquad (1)$$

ејнилији өдәнилир. (1) ејнилијини $(n-1)$ дәфә ардычыл диференсиалладыгда

$$\begin{aligned} &\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\dots+\lambda_n y_n(x)\equiv 0,\\ &\lambda_1 y_1'(x)+\lambda_2 y_2'(x)+\dots+\lambda_n y_n'(x)\equiv 0,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x)+\lambda_2 y_2^{(n-1)}(x)+\dots+\lambda_n y_n^{(n-1)}(x)\equiv 0 \end{aligned}$$

мүнасибәтләри алыныр. Бу мүнасибәтләр көстәрир ки, λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәдләри n-мәчһуллу n хәтти бирҹинсли

$$\begin{cases} y_1(x) z_1+y_2(x) z_2+\dots+y_n(x) z_n=0,\\ y_1'(x) z_1+y_2'(x) z_2+\dots+y_n'(x) z_n=0,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ y_1^{(n-1)}(x) z_1+y_2^{(n-1)}(x) z_2+\dots+y_n^{(n-1)}(x) z_n=0 \end{cases} \qquad (3)$$

тәнликләр системинин ($z_1, z_2, \dots, z_n$ мәчһуллардыр) сыфырдан фәргли һәллидир ((3) системини өдәјән $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәдләринин һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир). Сыфырдан фәргли һәлли олан хәтти бирҹинсли (3) тәнликләр системинин детерминанты сыфра бәрабәр олмалыдыр (II, § 3). (3) системинин детерминанты исә $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсијаларынын вронскианыдыр. Демәли, хәтти асылы олан $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсијаларынын Вронски детерминанты (a, b) интервалынын истәнилән нөгтәсиндә сыфра бәрабәрдир.

Нәтиҹә. (a, b) интервалынын һеч олмаса бир нөгтәсиндә Вронски детерминанты сыфырдан фәргли олан y_1, $y_2, \dots, y_n$ функсијалары һәмин интервалда хәтти асылы дејилдир.

Гејд едәк ки, верилмиш функсијаларын Вронски детерминантынын ејниликлә сыфра бәрабәр олмасы онларын хәтти асылы олмасы үчүн зәрури шәрт олдуғу һалда кафи дејилдир.

Мисал 4.

$$y_1=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0 \text{ олдугда}\\ 0, & x<0 \text{ олдугда} \end{cases} \quad \text{вә} \quad y_2=\begin{cases} 0, & x\geqslant 0 \text{ олдугда}\\ x^2, & x<0 \text{ олдугда} \end{cases}$$

[1] Јузеф Вронски (1775—1853) Полша ријазијјатчысыдыр.

функсиjаларынын Вронски детерминанты бүтүн әдәд охунда еjниликлә сыфра бәрабәрдир:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Лакин һәмин функсиjалар хәтти асылы деjилдир.

Бунунла белә, әкәр $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ функсиjалары хәтти бирчинсли

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\,y = 0 \quad (4)$$

тәнлиjинин һәллидирсә, онда онларын хәтти асылы олмасы һаггында теоремдә көстәрилән зәрури шәрт еjни заманда кафи олур.

Теорем 2. ***(4) тәнлиjинин әмсаллары (a, b) интервалында кәсилмәjәндирсә вә онун $y_1, y_2, \dots, y_n$ һәлләринин $W(x)$ вронскианы һәмин интервалын һеч олмаса бир x_0 нөгтәсиндә сыфра чеврилирсә $W(x_0)=0$, онда $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсиjалары (a, b) интервалында хәтти асылыдыр.***

Исбаты. $y_k\ (k = 1, 2, \dots, n)$ функсиjалары вә онларын $(n-1)$-чи тәртибә гәдәр төрәмәләринин x_0 нөгтәсиндәки гиjмәтләри васитәсилә намә'лум $C_1, C_2, \dots, C_n$ кәмиjjәтләринә нәзәрән ашағыдакы n хәтти тәнликләр системинә бахаг:

$$\begin{aligned} &C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ &C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Бу системин детерминанты $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсиjалары вронскианынын x_0 нөгтәсиндә $W(x_0) = 0$ гиjмәтинә бәрабәрдир. Детерминанты сыфыр олан хәтти бирчинсли тәнликләр системинин сыфырдан фәргли һәлли вар (II, § 3). Бу һәлләрин бирини $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ илә ишарә едәк вә

$$y = \varphi(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \dots + C_n^{(0)} y_n(x) \quad (6)$$

кими функсиjа дүзәлдәк. $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсиjалары (4) тәнлиjинин һәлли олдуғундан онларын хәтти комбинасиjасы олан (6) функсиjасы да һәмин тәнлиjин һәллидир (§ 3). $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ әдәдләр системи (5) тәнликләр системинин һәлли олдуғундан (6) функсиjасы үчүн

$$\varphi(x_0) = 0,\ \varphi'(x_0) = 0,\ \varphi''(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (7)$$

шәртләри өдәнилир, jә'ни (4) хәтти тәнлиjинин (6) һәлли (7) башланғыч шәртләрини өдәjир. (7) башланғыч шәртләрини (6) һәллиндән башга (4) тәнлиjинин һәлли олан $y=0$ функсиjасы да өдәjир. Һәллин варлығы вә jеканәлиjи теореминә көрә (4) тәнлиjинин (7) башланғыч шәртләрини өдәjән һәлли jеканә

олмалыдыр. Демәли, һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ әдәдләри үчүн

$$C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \dots + C_n^{(0)} y_n(x) = 0$$

олар ки, бу да $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсиjаларынын хәтти асылы олдуғуну көстәрир.

*Нәтичә 1. Хәтти бирчинсли (4) тәнлиjинин $y_1, y_2, \dots, y_n$ хүсуси һәлләри (a, b) интервалында хәтти асылы олмадыгда онларын **$W(x)$** вронскианы һәмин интервалын һеч бир нөгтәсиндә сыфра чеврилмир.*

Нәтичә 2. Әмсаллары (a, b) интервалында кәсилмәjән функсиjалар олан (4) тәнлиjинин $y_1, y_2, \dots, y_n$ хүсуси һәлләринин $W(x)$ вронскианы һәмин интервалын һеч олмаса бир нөгтәсиндә сыфра бәрабәрдирсә, онда интервалын бүтүн нөгтәләриндә дә сыфра бәрабәрдир.

Доғрудан да, (4) тәнлиjинин $y_1, y_2, \dots, y_n$ хүсуси һәлләринин $W(x)$ вронскианы интервалын һеч олмаса бир нөгтәсиндә сыфра бәрабәр олдугда 2-чи теоремә көрә һәмин һәлләр хәтти асылы олар. Хәтти асылы олан функсиjаларын вронскианы исә 1-чи теоремә көрә еjниликлә сыфра бәрабәр олур.

Нәтичә 3. Әмсаллары (a, b) интервалында кәсилмәjән функсиjалар олан (4) тәнлиjинин $y_1, y_2, \dots, y_n$ хүсуси һәлләринин вронскианы һәмин интервалын бир нөгтәсиндә сыфырдан фәрглидирсә, онда интервалын бүтүн нөгтәләриндә дә сыфырдан фәрглидир.

Демәли, n-тәртибли хәтти бирчинсли тәнлиjин $y_1, y_2, \dots, y_n$ хүсуси һәлләринин $W(x)$ вронскианы jа (a, b) интервалында еjниликлә сыфра бәрабәрдир (һәлләр хәтти асылы олдугда), jа да (a, b) интервалынын бүтүн нөгтәләриндә сыфырдан фәрглидир (һәлләр хәтти асылы олмадыгда).

Дедикләримиздән хәтти бирчинсли тәнлиjин хүсуси һәлләринин хәтти асылы олмамасы һаггында ашағыдакы тәклиф алыныр:

Нәтичә 4. Әмсаллары (a, b) интервалында кәсилмәjән функсиjалар олан (4) тәнлиjинин $y_1, y_2, \dots, y_n$ хүсуси һәлләринин һәмин интервалда хәтти асылы олмамасы үчүн онларын вронскианынын интервалын һеч олмаса бир нөгтәсиндә сыфырдан фәргли олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

§ 5. ХӘТТИ БИРЧИНСЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН ҮМУМИ ҺӘЛЛИНИН ГУРУЛМАСЫ

Хәтти бирчинсли

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\,y = 0 \quad (1)$$

тәнлиjинин үмуми һәлли онун хәтти асылы олмаjан хүсуси һәлләри васитәсилә гурулур.

Тә'риф. *n-тәртибли хәтти бирчинсли (1) тәнлиjинин (a, b) интервалында хәтти асылы олмаjан n саjда $y_i(x)$,*

$y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *һәлләри системинә һәмин тәнлијин (a, b) интервалында фундаментал һәлләр системи дејилир.*

Ајдындыр ки, (1) тәнлијинин n сајда $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ хүсуси һәлләринин һәмин тәнлијин (a, b) интервалында фундаментал һәлләр системи олмасы үчүн онлардан дүзәлмиш Вронски детерминантынын (a, b) интервалынын һеч олмаса бир нөгтәсиндә сыфырдан фәргли олмасы зәрури вә кафи шәртдир (§ 4, нәтичә 4). Көстәрмәк олар ки, һәр бир хәтти бирчинсли диференсиал тәнлијин истәнилән сајда фундаментал һәлләр системи вардыр.

Хәтти бирчинсли диференсиал тәнлијин үмуми һәллини онун истәнилән фундаментал һәлләр системи васитәсилә гурмаг олар.

Теорем. ***Тутаг ки, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функсијалары (1) тәнлијинин фундаментал һәлләр системидир. Онда һәмин һәлләрин ихтијари $C_1, C_2, \ldots, C_n$ әмсаллы***

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) \qquad (2)$$

хәтти комбинасијасы (1) тәнлијинин үмуми һәллидир.

Исбаты. Мә'лумдур ки, n дәнә ихтијари сабитдән асылы олан (2) ифадәси (1) тәнлијинин һәллидир (§ 3, нәтичә). (2) функсијасынын (1) тәнлијинин үмуми һәлли олдуғуну көстәрмәк үчүн һәмин тәнлијин ихтијари

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

башланғыч шәртләрини өдәјән $y = y(x)$ һәллини (2) һәллиндән $C_1, C_2, \ldots, C_n$ сабитләрини сечмәклә алмаг мүмкүн олдуғуну көстәрмәк лазымдыр.

(2) функсијасынын (3) башланғыч шәртләрини өдәмәси үчүн $C_1, C_2, \ldots, C_n$ сабитләри

$$\begin{aligned} &C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \cdots + C_ny_n(x_0) = y_0, \\ &C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \cdots + C_ny_n'(x_0) = y_0', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (4)$$

тәнликләр системинин һәлли олмалыдыр. (4) системинин әсас детерминанты, ја'ни мәчһул һесаб олунан $C_1, C_2, \ldots, C_n$ параметрләринин әмсалларындан дүзәлмиш детерминант $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функсијалары вронскианынын x_0 нөгтәсиндәки $W(x_0)$ гијмәтидир. (1) тәнлијинин һәлли олан $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функсијалары фундаментал систем тәшкил етдијиндән онлар хәтти асылы олмајандыр. Буна көрә дә $W(x_0) \neq 0$ (§ 4, нәтичә 1) вә (4) системинин јеканә $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ һәлли

вардыр. Онда (1) тәнлијинин һәлли олан

$$y(x) = C_1^0y_1(x) + C_2^0y_2(x) + \cdots + C_n^0y_n(x)$$

функсијасы (3) башланғыч шәртләрини өдәјәр.

Теорем исбат олунду.

Бу теоремдән ајдындыр ки, n-тәртибли хәтти бирчинсли тәнлијин хәтти асылы олмајан хүсуси һәлләринин сајы n-дән чох ола билмәз, ја'ни онун $(n+1)$ дәнә истәнилән $y_1(x), \ldots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ һәлләри һәмишә хәтти асылыдыр.

Доғрудан да, бу һәлләрин биринчи n дәнәси хәтти асылы оларса, ја'ни һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан вә

$$\lambda_1y_1(x) + \lambda_2y_2(x) + \cdots + \lambda_ny_n(x) \equiv 0$$

ејнилијини өдәјән $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ әмсаллары варса, онда һәмин әмсаллар үчүн

$$\lambda_1y_1(x) + \lambda_2y_2(x) + \cdots + \lambda_ny_n(x) + 0\cdot y_{n+1}(x) \equiv 0$$

ејнилији дә өдәниләр ки, бу да верилмиш $(n+1)$ сајда $y_1(x), \ldots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ һәлләринин хәтти асылы олдуғуну көстәрир.

Әкәр бу һәлләрин биринчи n дәнәси хәтти асылы олмаса, онда теоремә әсасән тәнлијин истәнилән һәллини, хүсуси һалда онун $y_{n+1}(x)$ һәллини

$$y_{n+1}(x) = C_1^0y_1(x) + \cdots + C_n^0y_n(x)$$

шәклиндә көстәрмәк олар. Бу да верилмиш $(n+1)$ сајда хүсуси һәллин һәмишә хәтти асылы олдуғуну көстәрир.

Демәли, әмсаллары (a, b) интервалында кәсилмәјән функсијалар олан n-тәртибли хәтти бирчинсли диференсиал тәнлијин анчаг вә анчаг n сајда (тәртиби сајда) хәтти асылы олмајан хүсуси һәлли вардыр.

Мисал 1. $y'' + y = 0$ тәнлијинин үмуми һәллини тапмалы.

Јохламаг олар ки, $y_1 = \sin x$ вә $y_2 = \cos x$ функсијалары верилмиш тәнлијин хүсуси һәлләридир.

Бу һәлләрин вронскианы сыфырдан фәргли

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

олдуғундан онлар хәтти асылы олмајандыр. Буна көрә дә y_1 y_2 хүсуси һәлләри верилмиш тәнлијин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир. Онда теоремә көрә тәнлијин үмуми һәлли

$$y = C_1\sin x + C_2\cos x$$

функсијасы олар.

§ 6. ОСТРОГРАДСКИ—ЛИУВИЛЛ ДҮСТУРУ

Һәр бир хәтти бирчинсли диференсиал тәнлијин истәнилән сајда фундаментал һәлләр системи вардыр. Лакин ики мүхтәлиф диференсиал тәнлијин ејни фундаментал һәлләр системи

ола билмәз. Доғрудан да, әксини фәрз едәк ки, ики мүхтәлиф

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y = 0 \qquad (1)$$

вә

$$y^{(n)} + q_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + q_n(x)\, y = 0 \qquad (2)$$

диференсиал тәнлијинин ејни $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ фундаментал һәлләр системи вардыр. Онда һәмин функсијалар (1) вә (2) тәнликләринин тәрәф-тәрәфә чыхылмасындан алынан

$$[p_1(x) - q_1(x)]\, y^{(n-1)} + [p_2(x) - q_2(x)]\, y^{(n-2)} + \cdots + [p_n(x) - q_n(x)] = 0 \qquad (3)$$

диференсиал тәнлијинин дә һәлли олар. Демәли, $(n-1)$-тәртибли хәтти бирчинсли (3) тәнлијинин n дәнә (тәртибиндән чох сајда) хәтти асылы олмајан $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ хүсуси һәлләри вардыр. Бу исә мүмкүн дејилдир (§ 5). Алынан зиддијјәт көстәрир ки, ики мүхтәлиф тәнлијин ејни фундаментал һәлләр системи ола билмәз.

Бурадан ајдындыр ки, һәр бир фундаментал систем үјғун бир диференсиал тәнлији тә'јин едир.

Тутаг ки, (a, b) интервалында тә'јин олунмуш вә n-тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри олан $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функсијалары верилмишдир. Бу функсијалар хәтти асылы олмајандыр вә онларын $W(x)$ вронскианы (a, b) интервалынын һеч бир нөгтәсиндә сыфра бәрабәр дејилдир. Онда әмсаллары јеканә гајда илә тә'јин олунан (1) шәклиндә елә јеканә хәтти бирчинсли диференсиал тәнлик вардыр ки, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функсијалары онун фундаментал һәлләр системидир.

Бу тәнлији, $y_k(x)$ функсијаларынын (1) тәнлијинин һәлли олмасы шәртләрини

$$y_k^{(n)} + p_1(x)\, y_k^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

вә (1) тәнлијини биркә һәлл етмәклә тапмаг олар:

$$\begin{cases} y_k^{(n)} + p_1(x)\, y_k^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y_k = 0, \\ (k = 1, 2, \ldots, n) \\ y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Алынан бирчинсли тәнликләр системинин сыфырдан фәргли һәлли олдуғу үчүн онун әсас детерминанты сыфра бәрабәр олмалыдыр (II, § 5):

$$\begin{vmatrix} y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \cdots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_2' & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \cdots & y_n' & y_n \\ y^{(n)} & y^{(n-1)} & \cdots & y' & y \end{vmatrix} = 0 \quad (a < x < b).$$

Бурадан ахтарылан тәнлик алыныр:

$$\frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Бу бәрабәрликдә иштирак едән $(n+1)$-тәртибли детерминантын сонунчу сүтун елементләринә көрә ајрылышыны јазараг, алынан нәтичәни $W(x)$ вронскианына бөлдүкдә (1) шәклиндә тәнлик алыныр. (5) бәрабәрлијиндә $y = y_k(x)$ көтүрдүкдә, детерминантын ики сүтуну ејни олдуғундан, о, ејниликлә сыфра чеврилир, јә'ни $y = y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ функсијалары һәмин тәнлијин һәллидир.

Хүсуси һалда, фундаментал һәлләр системи $y_1(x)$, $y_2(x)$ олан икитәртибли хәтти бирчинсли

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0 \qquad (6)$$

тәнлијинин $p_1(x)$ вә $p_2(x)$ әмсалларыны һәмин $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ функсијалары васитәсилә ифадә етмәк олар. Доғрудан да, (5) бәрабәрлијинә көрә фундаментал һәлләр системи $y_1(x)$, $y_2(x)$ олан хәтти бирчинсли тәнлик

$$\frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

вә ја үчтәртибли детерминанты ачдыгда

$$y'' - \frac{W'(x)}{W(x)}\, y' + \left[-\frac{y_1''}{y_1} + \frac{W'(x)}{W(x)} \cdot \frac{y_1'}{y_1} \right] y = 0 \qquad (7)$$

олар; бурада

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

вә

$$W'(x) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}.$$

(6) вә (7) тәнликләринин үјғун әмсаллары бәрабәр олмалыдыр. Бурадан

$$p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}$$

алыныр. Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини $[x_0, x]$ $(a < x_0 < b,\ a < x < b)$ парчасы үзрә интеграллсаг,

$$\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x} \frac{W'(x)}{W(x)}\,dx = -\ln W(x)\Big|_{x_0}^{x}$$

вә ја

$$\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx = -\ln \frac{W(x)}{W(x_0)}$$

олар. Бурадан

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)dx} \qquad (8)$$

мүнасибәти алыныр.

(8) бәрабәрлијинә *Остроградски*[1] *—Лиувилл*[2] *дүстуру* дејилир. Һәмин дүстур n-тәртибли хәтти бирчинсли диференсиал тәнликләр үчүн дә доғрудур.

Остроградски—Лиувилл дүстуру көстәрир ки, $W(x)$ Вронски детерминанты ја (a, b) интервалынын һеч бир нөгтәсиндә сыфра чеврилмир, ја да һәмин интервалда ејниликлә сыфра бәрабәрдир.

§ 7. САБИТ ӘМСАЛЛЫ ХӘТТИ БИРЧИНСЛИ ТӘНЛИКЛӘР

Јухарыда (§ 5) көстәрдик ки, n-тәртибли хәтти бирчинсли диференсиал тәнлијин үмуми һәллини гурмаг үчүн һәмин тәнлијин хәтти асылы олмајан n дәнә хүсуси һәллини (фундаментал һәлләр системини) билмәк лазымдыр. Әмсаллары дәјишән кәмијјәтләр (функсијалар) олан хәтти бирчинсли тәнликләрин фундаментал һәлләр системини тапмаг үчүн үмуми үсул јохдур. Лакин әмсаллары сабит әдәдләр олан хәтти бирчинсли диференсиал тәнликләр үчүн белә үсул вардыр. Сабит әмсаллы хәтти бирчинсли диференсиал тәнликләрин фундаментал һәлләр системинин тапылмасы чәбри тәнликләрин һәлли мәсәләсинә кәтирилир. Бу мәсәләни үмуми шәкилдә шәрһ етмәк үчүн фәрз едәк ки, n-тәртибли хәтти бирчинсли

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (1)$$

тәнлијинин $p_1, p_2, \ldots, p_n$ әмсаллары сабит әдәдләрдир.

(1) тәнлијинин гурулушундан ајдындыр ки, онун һәлли елә $y=y(x)$ функсијасы ола биләр ки, онун өзү илә төрәмәләри ејни (охшар) шәкилдә олсун. Белә функсија $y(x) = e^{\lambda x}$ функсијасыдыр. Буна көрә дә (1) тәнлијинин һәллини $y=e^{\lambda x}$ шәклиндә ахтараг; λ әдәдини елә сечәк ки, $y=e^{\lambda x}$ функсијасы һәмин тәнлијин һәлли олсун. Бу функсијаны вә онун

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots, \; y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

төрәмәләрини (1) бәрабәрлијиндә јеринә јаздыгда

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n)\, e^{\lambda x}$$

вә ја

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n \qquad (2)$$

ишарәсини гәбул етдикдә

$$L[e^{\lambda x}] = \varphi(\lambda) \cdot e^{\lambda x} \qquad (3)$$

[1] Михаил Васиљевич Остроградски (1801—1862) рус ријазијјатчысыдыр.

[2] Жозеф Лиувилл (1809—1882) франсыз ријазијјатчысыдыр.

олур. $e^{\lambda x} \neq 0$ олмасындан ајдындыр ки, $y=e^{\lambda x}$ функсијасынын (1) тәнлијинин һәлли олмасы үчүн

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_n = 0 \qquad (4)$$

олмалыдыр, јә'ни λ әдәди (4) чәбри тәнлијинин көкү олмалыдыр. Бунун тәрси дә доғрудур.

(2) чохһәдлисинә (1) тәнлијинин *характеристик чохһәдлиси*, (4) чәбри тәнлијинә исә һәмин тәнлијин *характеристик тәнлији* дејилир.

(1) диференсиал тәнлијинин (4) характеристик тәнлијини алмаг үчүн тәнлијин өзүндә y-и ваһидлә, y-ин төрәмәләрини исә λ-нын ејни дәрәчәли гүввәтләри илә əвəз етмәк лазымдыр. Мәсәлән,

$$y'' + 3y' + 5y = 0$$

диференсиал тәнлијинин характеристик тәнлији

$$\lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$$

квадрат тәнлији,

$$y^{(V)} - 4y^{(IV)} + y'' = 0$$

диференсиал тәнлијинин характеристик тәнлији исә

$$\lambda^5 - 4\lambda^4 + \lambda^2 = 0$$

тәнлији вә с. олар.

Сабит әмсаллы (1) хәтти бирчинсли тәнлијинин үмуми һәлли онун (4) характеристик тәнлијинин көкләринә әсасән гурулур.

I һал. *Характеристик тәнлијин көкләри һәгиги вә мүхтәлифдир.* (4) характеристик тәнлији n-дәрәчәли чәбри тәнлик олдуғундан онун n дәнә $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ кими көкү вар. Һәмин көкләр һәгиги вә мүхтәлифдир. Бу һалда

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, \; y_n = e^{\lambda_n x} \qquad (5)$$

функсијалары (1) тәнлијинин һәлли олар.

(5) функсијалары хәтти асылы олмајандыр. Буну көстәрмәк үчүн һәмин функсијаларын вронскианыны дүзәлдәк:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x} B(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Сонунчу һасилин икинчи вуруғу олан n-тәртибли $B(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ детерминанты *Вандермонд*[1] *детерминанты* адланыр. Бу детерминанты һесабламаг мүмкүндүр:

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)$$

вә үмумиләтлә, ријази-индуксија методу илә

$$B(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \prod_{(i>j)} (\lambda_i - \lambda_j) \qquad (6)$$

мүнасибәти алыныр. Онда

$$W(x) = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x} \prod_{(i>j)} (\lambda_i - \lambda_j) \qquad (7)$$

олар. Характеристик тәнлијин көкләри һәгиги вә мүхтәлиф олдуғундан $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ $(i > j)$ вә буна көрә дә x-ин истәнилән гијмәтиндә $W(x) \neq 0$ олар. (5) функсијаларынын вронскианы сыфырдан фәргли олдуғундан һәмин функсијалар (1) тәнлијинин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир. Бу һалда (1) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \qquad (8)$$

олар (§ 5).

Мисал 1. $y'' - 4y' + 3y = 0$ тәнлијинин үмуми һәллини тапмалы.

Верилмиш тәнлијин $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ характеристик тәнлијинин көкләри $\lambda_1 = 3$ вә $\lambda_2 = 1$ олдуғундан (һәгиги вә мүхтәлиф) онун үмуми һәлли

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$$

олар.

Мисал 2. $y''' - 6y'' + 8y' = 0$ тәнлијинин характеристик тәнлији

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda = 0$$

кими јазылар. Бу тәнлијин көкләри $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ вә $\lambda_3 = 4$ әдәдләридир. Онда тәнлијин фундаментал һәлләр системи

$$1, \quad e^{2x}, \quad e^{4x}$$

вә үмуми һәлли

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{4x}$$

олар.

II һал. *Характеристик тәнлијин бүтүн көкләри һәгигидир, лакин онларын ичәрисиндә тәкрарлананы вар.*

Бу һалда (4) характеристик тәнлијинин $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ көкләринин бир вә ја бир нечәси тәкрарланан олдуғундан $e^{\lambda_1 x}$,

[1] Александр Теофил Вандермонд (1735—1796) франсыз ријазијјатчысыдыр.

$e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ системи ичәрисиндә мүхтәлиф функсијаларын сајы n-дән аз олар. Белә функсијалар исә (1) тәнлијинин фундаментал һәлләр системини тәшкил едә билмәз. Онларын сырасына бир сыра јени функсијалар әлавә етмәк лазымдыр.

Бу чатышмајан функсијалары хәтти

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y$$

оператору үчүн доғру олан

$$L[UV] = L[U]V + \frac{L_1[U]}{1!} V' + \frac{L_2[U]}{2!} V'' + \cdots + \frac{L_n[U]}{n!} V^{(n)} \qquad (9)$$

дүстуруна әсасән тапмаг олар; бурада

$$L_k[U] = n(n-1)\cdots(n-k+1)\, U^{(n-k)} +$$
$$+ (n-1)(n-2)\cdots(n-k)\, p_1 U^{(n-k-1)} + \cdots +$$
$$+ (k+1)!\, p_{n-k-1} U' + k!\, p_{n-k} U$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n; \quad L_n[U] = n!U)$$

(L_k операторуну L операторунун k дәфә „символик диференсиалланмасы“ һесаб етмәк олар).

Бу дүстурун доғрулуғуну исбат етмәк үчүн UV һасилинин n тәртибә гәдәр ардычыл төрәмәләри үчүн доғру олан (XIV, § 9)

$$UV = UV,$$
$$(UV)' = U'V + UV',$$
$$(UV)'' = U''V + 2U'V' + V'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(UV)^{(n)} = U^{(n)}V + nU^{(n-1)}V' + \cdots + UV^{(n)}$$

бәрабәрликләрини ујғун олараг $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1$, 1 әдәдләринә вураraг, алынан бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топламаг лазымдыр.

(9) дүстурунда $U = e^{\lambda x}$ вә $V = x^m$ $(m < n)$ көтүрсәк вә $V^{(m)} = m!$, $V^{(m+1)} = V^{(m+2)} = \cdots = V^{(n)} = 0$, $L_k[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} \varphi^{(k)}(\lambda)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда

$$L_k[x^m e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}[x^m \varphi(\lambda) + m x^{m-1} \varphi'(\lambda) +$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} \varphi''(\lambda) + \cdots + \varphi^{(m)}(\lambda)] \qquad (10)$$

мүнасибәти алынар.

Инди фәрз едәк ки, λ_1 әдәди (4) характеристик тәнлијинин m_1 дәфә тәкрарланан көкүдүр. Онда мә'лум теоремә көрә $\varphi(\lambda_1) = \varphi'(\lambda_1) = \cdots = \varphi^{(m_1-1)}(\lambda_1) = 0$, $\varphi^{(m_1)}(\lambda_1) \neq 0$ мүнасибәтләри өдәниләр (XVIII, § 8). Бу һалда (10) бәрабәрлијиндә $\lambda = \lambda_1$ вә m әвәзинә нөвбә илә 0, 1, 2, …, $m_1 - 1$ әдәдләрини көтүрсәк, онда

$$L[e^{\lambda_1 x}] = L[xe^{\lambda_1 x}] = L[x^2 e^{\lambda_1 x}] = \cdots = L[x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}] = 0$$

бәрабәрликләрини аларыг. Бу көстәрир ки,

$$e^{\lambda_1 x},\quad xe^{\lambda_1 x},\quad x^2e^{\lambda_1 x},\ldots,\ x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} \tag{11}$$

функсијалары (1) тәнлијинин һәллидир, јә'ни (4) характеристик тәнлијинин m_1 дәфә тәкрарланан λ_1 көкүнә (1) тәнлијинин m_1 дәнә (11) һәлли ујғундур.

Бу мүһакимә (4) характеристик тәнлијинин һәр бир тәкрарланан көкү үчүн апарыла биләр. Нәтичәдә характеристик тәнлијин бүтүн садә вә тәкрарланан көкләринә ујғун (1) тәнлијинин n дәнә хүсуси һәлли тапылыр. Бу хүсуси һәлләр (1) тәнлијинин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир (буну исбат етмәји охучулара һәвалә едирик!). Фундаментал һәлләр системинә әсасән (1) тәнлијинин үмуми һәлли гурулур (§ 5).

Мисал 3. $y''-6y'+9y=0$ тәнлијинин

$$\lambda^2-6\lambda+9=0$$

характеристик тәнлијинин көкләри бәрабәрдир: $\lambda_1=\lambda_2=3$. (3 әдәди икигат көкдүр). Онда онун фундаментал һәлләр системи e^{3x}, xe^{3x} вә үмуми һәлли $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ олар.

Мисал 4. $y^{(IV)}-y^{III}=0$ тәнлијинин үмуми һәллини гурмаг үчүн $\lambda^4-\lambda^3=0$ характеристик тәнлијинин көкләрини тапаг: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, $\lambda_4=1$. Бу һалда верилмиш тәнлијин фундаментал һәлләр системи $1, x, x^2, e^x$ вә үмуми һәлли $y=C_1+C_2x+$ $+C_3x^2+C_4e^x$ олар.

III һал. *Характеристик тәнлијин көкләри мүхтәлифдир, лакин онларын ичәрисиндә комплекс оланлары вар.*

Бу һалда характеристик тәнлијин көкләринә әсасән (1) тәнлијинин үмуми һәллини гурмаг үчүн ашағыдакы леммадан истифадә олунур:

Лемма. *Һәгиги дәјишәнли $y(x)=U(x)+iV(x)$ комплекс функсијасы һәгиги әмсаллы (1) тәнлијинин һәллидирсә, онда һәмин функсијанын $U(x)$ һәгиги вә $V(x)$ хәјали һиссәси дә (1) тәнлијинин һәллидир.*

Доғрудан да, хәтти L оператору үчүн

$$L[U(x)+iV(x)]=L[U(x)]+iL[V(x)]$$

олдуғундан, $L[U(x)+iV(x)]\equiv 0$ олмасындан

$$L[U(x)]\equiv 0,\qquad L[V(x)]\equiv 0$$

алыныр.

Инди, фәрз едәк ки, $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ әдәдләри (4) характеристик тәнлијинин көкләридир вә бу көкләрин бири, мәсәлән, λ_n, комплексдир: $\lambda_n=\alpha+i\beta$ ($\beta\neq 0$). Онда һәмин комплекс әдәдин гошмасы да һәгиги әмсаллы (4) характеристик тәнлијинин көкү олар (XVIII, § 9). Демәли, $\lambda_n=\alpha+i\beta$ көкүнүн гошмасы олан $\alpha-i\beta$ әдәди дә $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ көкләри ичәрисиндәдир. Тутаг ки, о, λ_{n-1}-дир. Бу һалда леммаја әсасән (1) тәнлијинин

$$y_n=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

вә

$$y_{n-1}=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

комплекс һәлләринин $e^{\alpha x}\cos\beta x$ һәгиги вә $e^{\alpha x}\cos\beta x$ хәјали һиссәләри дә һәмин тәнлијин һәлли олар. Беләликлә, (1) тәнлијинин ики y_n вә y_{n-1} комплекс һәлли әвәзинә ики һәгиги

$$y_n^*=e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{вә} \quad y_{n-1}^*=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

хүсуси һәлли алыныр.

Бу гајда илә (1) тәнлијинин һәр бир чүт комплекс һәллинә ики дәнә һәгиги хүсуси һәлл ујғун олур. Нәтичәдә характеристик тәнлијин n дәнә (һәгиги вә ја комплекс) көкүнә ујғун (1) тәнлијинин јенә дә n дәнә һәгиги хүсуси һәлли алыныр. Бу хүсуси һәлләр хәтти асылы олмајандыр (исбат един!). Һәмин хүсуси һәлләрә әсасән (1) тәнлијинин үмуми һәлли гурулур. Мәсәлән, (4) характеристик тәнлијинин анчаг бир чүт $\lambda_n=(\alpha+i\beta)$ вә $\lambda_{n-1}=(\alpha-i\beta)$ комплекс көкләри олдугда (1) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+\cdots+C_{n-2}e^{\lambda_{n-2}x}+C_{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x+C_n e^{\alpha x}\cos\beta x$$

кими гурулур.

Мисал 5. $y'''-y''+4y'-4y=0$ хәтти тәнлијинин характеристик тәнлији

$$\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$$

олар. Онун көкләри $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2i$ вә $\lambda_3=-2i$ әдәдләридир. Бу һалда тәнлијин

$$e^x,\quad e^{2ix},\quad e^{-2ix}$$

фундаментал һәлләр системи әвәзинә һәгиги

$$e^x,\quad \sin 2x,\quad \cos 2x$$

фундаментал һәлләр системи көтүрүлүр вә верилмиш тәнлијин үмуми һәлли гурулур:

$$y=C_1e^x+C_2\sin 2x+C_3\cos 2x.$$

IV һал. *Характеристик тәнлијин көкләри ичәрисиндә тәкрарланан комплекс көкләр вардыр.*

Бу һалда да (1) тәнлијинин

$$e^{\lambda_1 x},\quad e^{\lambda_2 x},\ldots,\ e^{\lambda_n x}$$

хүсуси һәлләри ичәрисиндә мүхтәлиф функсијаларын сајы n-дән аз олдуғундан, онлар һәмин тәнлијин фундаментал һәлләр системини тәшкил едә билмәз. Онларын сырасына бир сыра јени функсијалар әлавә етмәк лазымдыр.

Әкәр $\alpha+i\beta$ ($\beta\neq 0$) комплекс әдәди характеристик тәнлијин m дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онда онун гошмасы олан $\alpha-i\beta$ әдәди дә һәмин тәнлијин m дәфә тәкрарланан көкү олар. Онда, II һалда олдуғу кими, көстәрмәк олар ки, $2m$ сајда

$$e^{(\alpha+i\beta)x},\quad xe^{(\alpha+i\beta)x},\ldots,\ x^{m-1}e^{(\alpha+i\beta)x},$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x},\quad xe^{(\alpha-i\beta)x},\ldots,\ x^{m-1}e^{(\alpha-i\beta)x}$$

функсиіалары (1) тәнлиіининн хүсуси һәлләридир. Һәмин хүсуси һәлләри

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

кими $2m$ сајда һәгиги хүсуси һәлләрлә әвәз етмәк олар (III һалда олдуғу кими).

Беләликлә, (4) характеристик тәнлијинин садә һәгиги, тәкрарланан һәгиги, садә вә тәкрарланан комплекс көкләринә әсасән (1) тәнлијинин n сајда хәтти асылы олмајан һәгиги хүсуси һәлли тапылыр вә үмуми һәлли ујғун шәкилдә гурулур.

Мисал 6. $y^{(V)}-y^{(IV)}+2y'''-2y''+y'-y=0$ хәтти тәнлијинин

$$\lambda^5-\lambda^4+2\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-1=(\lambda^2+1)^2(\lambda-1)=0$$

характеристик тәнлијинин көкләри

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-i,\quad \lambda_3=-i,\quad \lambda_4=i,\quad \lambda_5=i$$

олар. Бурада $\lambda_2=-i$ вә $\lambda_4=i$ гошма комплекс көкләри икигат көкләрдир. Онда верилмиш тәнлијин һәмин көкләрә ујғун һәгиги фундаментал һәлләр системи

$$e^x,\quad \cos x,\quad x\cos x,\quad \sin x,\quad x\sin x$$

олур вә үмуми һәлли

$$y=C_1e^x+C_2\cos x+C_3x\cos x+C_4\sin x+C_5x\sin x$$

кими гурулур.

§ 8. ХӘТТИ БИРЧИНСЛИ ОЛМАЈАН ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН ҺӘЛЛИ

Әмсаллары вә сағ тәрәфи һәр һансы (a, b) интервалында кәсилмәјән функсијалар олан

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$$

вә ја

$$L[y]=f(x) \tag{1}$$

хәтти бирчинсли олмајан тәнлијинин $x_0,\ y_0,\ y_0',\ldots,\ y_0^{(n-1)}$ башланғыч шәртләрини өдәјән јеканә $y=y(x)$ һәллинин варлығы јухарыда гејд едилмишдир (§ 3).

Бу һалда, (1) тәнлијинин сағ тәрәфини сыфыр һесаб етмәклә алынан хәтти бирчинсли

$$L[y]=0 \tag{2}$$

тәнлијинә (1) хәтти бирчинсли олмајан тәнлијинә ујғун олан бирчинсли тәнлик дејилир.

Хәтти диференсиал L операторунун мә'лум хассәләринә (§ 3) әсасән (1) тәнлијинин һәлли һаггында ашағыдакы тәклифләри исбат етмәк олар.

Теорем 1. ***(1) тәнлијинин $y_0(x)$ һәлли илә (2) бирчинсли тәнлијинин $\tilde{y}(x)$ һәллинин чәми (1) тәнлијинин һәллидир.***

Доғрудан да, $y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x)$ функсијасы үчүн $L[y]=L(y_0)+L(\tilde{y})$ олдуғундан $L[y_0]\equiv f(x)$ вә $L[\tilde{y}]\equiv 0$ мүнасибәтләринә әсасән $L[y]\equiv f(x)$ олар.

Теорем 2. ***Әкәр $y_k(x)$ функсијасы $L[y]=f_k(x)$ $(k=1, 2,\ldots, m)$ тәнлијинин һәллидирсә, онда $y(x)=\sum_{k=1}^{m} y_k(x)$ функсијасы да***

$$L[y]=\sum_{k=1}^{m} f_k(x)$$

тәнлијинин һәллидир.

Доғрудан да, $L[y_k]\equiv f_k(x)$ олмасындан ајдындыр ки,

$$L\left[\sum_{k=1}^{m} y_k\right]\equiv\sum_{k=1}^{m} L[y_k]\equiv\sum_{k=1}^{m} f_k(x).$$

Теорем 3. ***Хәтти бирчинсли олмајан (1) тәнлијинин үмуми һәлли онун бир $y_0(x)$ хүсуси һәлли илә ујғун (2) бирчинсли тәнлијинин $\sum_{k=1}^{n} C_ky_k(x)$ үмуми һәллинин***

$$y(x)=y_0(x)+\sum_{k=1}^{n} C_ky_k(x) \tag{3}$$

чәминә бәрабәрдир.

Исбаты. Теореми исбат етмәк үчүн нәзәрә алаг ки, $y_0(x)$ функсијасы (1) тәнлијинин ихтијари хүсуси һәлли вә $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ функсијалары (2) тәнлијинин фундаментал һәлләр системидир. Ајдындыр ки, (3) функсијасы (1) тәнлијинин үмуми һәлли олдуғуну исбат етмәк үчүн һәмин тәнлијин ихтијари

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$
$$(a<x_0<b) \tag{4}$$

башланғыч шәртләрини өдәјән $y=y(x)$ һәллини (3) функсијасындан $C_1, C_2,\ldots, C_n$ сабитләрини сечмәклә алмаг мүмкүн олдуғуну көстәрмәк лазымдыр.

(3) функсијасынын (4) башланғыч шәртләрини өдәмәси үчүн $C_1, C_2,\ldots, C_n$ сабитләри

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} C_ky_k(x_0)+y_0(x_0)=y_0,\\ \sum_{k=1}^{n} C_ky_k'(x_0)+y_0'(x_0)=y_0',\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{k=1}^{n} C_ky_k^{(n-1)}(x_0)+y_0^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\end{cases} \tag{5}$$

системинин һәлли олмалыдыр. (5) системинин әсас детерминанты, јә'ни мәчһул һесаб олунан $C_1, C_2, \ldots, C_n$ параметрләринин әмсалларындан дүзәлмиш детерминант (2) тәнлијинин фундаментал һәлләр системи олан $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ функсијалары вронскианынын x_0 нөгтәсиндәки $W(x_0)$ гијмәти олдуғундан, $W(x_0) \neq 0$ олар (§ 4). Буна көрә дә (5) системинин јеканә $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ һәлли вар. Демәли, (1) тәнлијинин

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k^0 y_k(x)$$

һәлли (4) башланғыч шәртләрини өдәјир.

Бу теоремдән ајдындыр ки, бирчинсли олмајан (1) тәнлијинин үмуми һәллини тапмаг үчүн онун өзүнүн бир хүсуси һәллини вә ујғун (2) бирчинсли тәнлијинин үмуми һәллини билмәк лазымдыр. Бирчинсли тәнликләрин үмуми һәллинин тапылмасы үсулу әввәлләр (§ 5, § 7) көстәрилмишдир. Буна көрә дә (1) тәнлијинин үмуми һәллини тапмаг үчүн әсас мәсәлә онун бир хүсуси һәллинин сечилмәсидир.

Мисал 1. $y''-6y'+9y=x$ тәнлијинә ујғун олан $y''-6y'+9y=0$ бирчинсли тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$$

функсијасыдыр (§ 8, мисал 3). Јохламаг олар ки,

$$y_0(x) = \frac{1}{9}\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

функсијасы верилмиш тәнлијин хүсуси һәллидир (бирчинсли олмајан тәнлијин хүсуси һәллинин тапылма үсуллары сонра көстәрилир). Онда тәнлијин үмуми һәлли

$$y = \frac{1}{9}\left(x + \frac{2}{3}\right) + C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$$

олар.

Бирчинсли олмајан тәнлијин әмсаллары сабит әдәдләр олдугда онун бир сыра һалларда хүсуси һәллини сечмә үсулу (бу сонракы параграфда көстәрилир) илә тапмаг олур. Лакин бу үсул кениш диференсиал тәнликләр синфинә тәтбиг олунмур.

Бирчинсли олмајан тәнлијә ујғун бирчинсли тәнлијин фундаментал һәлләр системи мә'лум олдугда бирчинсли олмајан тәнлијин үмуми һәллини ихтијари сабитләрин вариасијасы үсулу (вә ја Лагранж үсулу) илә тапмаг олар. Бу үсул беләдир:

Бирчинсли олмајан (1) тәнлијинә ујғун олан (2) тәнлијинин $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ фундаментал һәлләр системи мә'лум олдугда бирчинсли тәнлијин

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) \quad (6)$$

үмуми һәллиндә $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ихтијари сабитләрини x-дән асылы елә функсијалар сечирләр ки, алынан

$$y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \cdots + C_n(x)\, y_n(x) \quad (7)$$

функсијасы (1) тәнлијинин үмуми һәлли олур.

Бу һалда, ахтарылан n сајда намә'лум

$$C_1(x), \quad C_2(x), \ldots, C_n(x) \quad (8)$$

функсијаларыны тапмаг үчүн n сајда шәртдән (тәнликдән) истифадә олунур. Бу шәртләрин биринчиси (8) функсијаларынын (1) тәнлијини өдәмәсидир. Јердә галан $(n-1)$ дәнә тәнлик (шәрт) исә (7) функсијасы төрәмәләринин (6) функсијасынын ујғун төрәмәси кими олмасы тәләбинә әсасән тапылыр: $C_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ функсијаларыны елә сечирләр ки, (7) функсијасынын

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k'(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_k(x)$$

төрәмәси

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k'(x) \quad (9)$$

шәклиндә олсун, јә'ни

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_k(x) = 0 \quad (10)$$

шәрти өдәнилсин. Инди (9) функсијасынын

$$y''(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k''(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_k'(x)$$

төрәмәсинин

$$y''(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k''(x) \quad (11)$$

шәклиндә олмасыны тәләб едәрәк,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_k'(x) = 0 \quad (12)$$

шәртини аларыг. Бу просеси давам етдирмәклә

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_k^{(n-2)}(x) = 0 \quad (13)$$

шәрти васитәсилә $(n-1)$-тәртибли төрәмә үчүн

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k^{(n-1)}(x) \quad (14)$$

ифадәси алыныр. Бурадан n-тәртибли төрәмәни тапаг:

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, y_k^{(n-1)}(x). \qquad (15)$$

Инди (7) функсијасыны вә онун тапдығымыз (9), (11), (14) вә (15) төрәмәләрини (1) тәнлијинин сол тәрәфиндә јеринә јазаг:

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, L\left[y_k(x)\right].$$

Бурадан

$$L[y_1(x)] \equiv L[y_2(x)] \equiv \dots \equiv L[y_n(x)] \equiv 0$$

олдуғуна әсасән

$$\sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, y_k^{(n-1)}(x) = f(x) \qquad (16)$$

мүнасибәти алыныр. Демәли, (7) функсијасы (1) тәнлијинин һәлли олмасы үчүн (10), (12), (13) вә (16) шәртләри өдәнилмәлидир:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, y_k(x) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, y'_k(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, y_k^{(n-2)}(x) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, y_k^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \qquad (17)$$

Бу системин әсас детерминанты (2) тәнлијинин (a, b) интервалында фундаментал һәлләр системи олан $y_1(x), \dots, y_n(x)$ функсијаларынын вронскианы олдуғундан, о һәмин интервалын бүтүн нөгтәләриндә сыфырдан фәрглидир: $W(x) \neq 0$. Буна көрә дә (17) системинин

$$C'_1(x) = \varphi_1(x), \quad C'_2(x) = \varphi_2(x), \dots, \quad C'_n(x) = \varphi_n(x)$$

кими јеканә һәлли вар. Бу бәрабәрликләри интегралламагла

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\, dx + C_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)\, dx + C_2, \dots,$$

$$C_n(x) = \int \varphi_n(x)\, dx + C_n$$

мүнасибәтләри (бурада $C_1, C_2, \dots, C_n$ ихтијари сабитләрдир) вә онлары (7) бәрабәрлијиндә јеринә јазмагла (1) тәнлијинин ахтарылан

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \varphi_k(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) \qquad (18)$$

һәлли алыныр. (18) һәлли ики һиссәдән ибарәтдир. Бунларын бири (1) тәнлијинин хүсуси һәлли

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \varphi_k(x)\, dx,$$

о бири исә она ујғун олан (2) бирчинсли тәнлијинин үмуми һәллидир:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x).$$

Мисал 2. Бирчинсли олмајан

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$$

тәнлијинә ујғун олан бирчинсли $y'' - 4y' + 3y = 0$ тәнлијинин $\tilde{y}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$ үмуми һәлли мә'лумдур (§ 7, мисал 1), онун үмуми һәллини сабитләрин вариасијасы үсулу илә тапмалы.

Бу һалда (17) системи

$$\begin{cases} C'_1(x)\, e^{3x} + C'_2(x)\, e^{x} = 0, \\ C'_1(x)\, 3e^{3x} + C'_2(x)\, e^{x} = e^{2x} \end{cases}$$

шәклиндә олар. Бурадан Крамер гајдасына көрә

$$C'_1(x) = \frac{1}{2} e^{-x}, \quad C'_2(x) = -\frac{1}{2} e^{x}$$

алыныр. Ахырынчы бәрабәрликләри интегралламагла

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{2} e^{x} + C_2$$

мүнасибәтләри вә (18) бәрабәрлијинә әсасән верилмиш тәнлијин

$$y(x) = -e^{2x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$$

үмуми һәлли алыныр.

§ 9 САБИТ ӘМСАЛЛЫ ХӘТТИ БИРЧИНСЛИ ОЛМАЈАН ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Хәтти бирчинсли олмајан тәнлијин үмуми һәлли онун бир хүсуси һәлли илә ујғун бирчинсли тәнлијин үмуми һәллинин cәминә бәрабәрдир. Хәтти бирчинсли олмајан

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \qquad (1)$$

тәнлијинин әмсаллары сабит $p_1, p_2, \dots, p_n$ әдәдләри олдуғда она ујғун олан сабит әмсаллы бирчинсли тәнлијин үмуми һәл-

линин тапылма гајдасы јухарыда (§ 7) көстәрилмишдир. Бирчинсли тәнлијин үмуми һәллинә әсасән (1) тәнлијинин үмуми һәллини ихтијари сабитләрин вариасијасы үсулу (§ 8) илә тапмаг олар. Лакин бу заман мүрәккәб һесабламалар апармаг лазым көлир.

Буна көрә дә ујғун бирчинсли тәнлијин үмуми һәлли мә'лум олдугда (1) тәнлијинин үмуми һәллини гурмаг үчүн бә'зән онун бир хүсуси һәллини тапмаг даһа әлверишли олур. (1) тәнлијинин хүсуси һәллини сағ тәрәфдәки $f(x)$ функсијасынын шәклинә әсасән сечмә үсулу вә ја гејри-муәјјән әмсаллар үсулу илә тапырлар.

I һал. (1) тәнлијинин сағ тәрәфи m-дәрәчәли чәбри чохһәдлидир:

$$f(x) = P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m \quad (2)$$

вә тәнлијин p_n әмсалы сыфырдан фәргдидир, јә'ни (1) тәнлији

$$L[y] = P_m(x), \quad p_n \neq 0, \quad (3)$$

шәклиндәдир. Онда (1) тәнлијинин хүсуси һәллини m-дәрәчәли

$$y_0(x) = B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_{m-1}x + B_m = Q_m(x) \quad (4)$$

чәбри чохһәдли шәклиндә тапмаг олар.

Буна инанмаг үчүн (4) функсијасыны n дәфә ардычыл диференсиаллајаг:

$$y_0'(x) = mB_0x^{m-1} + (m-1)B_1x^{m-2} + \cdots + 2B_{m-2}x + B_{m-1}$$

$$y_0''(x) = m(m-1)B_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)B_1x^{m-3} + \cdots + 2B_{m-2}$$

. . . .

Бу гијмәтләр (3) тәнлијиндә y-ин ујғун тәртибли төрәмәләринин јеринә јазылыр вә алынан бәрабәрликдә x-ин ејни дәрәчәли гүввәтләринин әмсаллары бәрабәр һесаб едилир. Онда $m+1$ дәнә намә'лум $B_0, B_1, \ldots, B_m$ әмсалларына нәзәрән $m+1$ тәнликдән ибарәт

$$\begin{cases} p_nB_0 = b_0, \\ p_{n-1}mB_0 + p_nB_1 = b_1, \\ p_{n-2}m(m-1)B_0 + p_{n-1}(m-1)B_1 + p_nB_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \quad (5)$$

хәтти тәнликләр системи алыныр. Бу (үчбучаглы шәклиндә) системин әсас детерминанты сыфырдан фәргли $\Delta = (p_n)^{m+1} \neq 0$ олдуғундан, онун јеканә һәлли (јә'ни (5) системинин өдәјән $B_0, B_1, \ldots, B_m$ әдәдләри) вардыр. Бурадан (1) тәнлијинин (4) шәклиндә хүсуси һәлли тапылыр.

Мисал 1. $y''-5y'+6y=x^2$ тәнлијинин үмуми һәллини тапмалы.

Бу тәнлијә ујғун $y''-5y'+6y=0$ бирчинсли тәнлијинин үмуми һәлли $\bar{y}(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ функсијасыдыр. Верилмиш тәнлијин үмуми һәллини гурмаг үчүн онун бир хүсуси һәлли тапылмалыдыр. Бу хүсуси һәлли

$$y_0(x) = B_0x^2 + B_1x + B_2$$

шәклиндә ахтараг. Онда

$$y_0'(x) = 2B_0x + B_1, \quad y_0''(x) = 2B_0$$

гијмәтләри тәнликдә јазылдыгда

$$2B_0 - 5(2B_0x + B_1) + 6(B_0x^2 + B_1x + B_2) = x^2$$

бәрабәрлији вә бурадан B_0, B_1, B_2 әмсалларыны тә'јин етмәк үчүн

$$\begin{cases} 6B_0 = 1, \\ -10B_0 + 6B_1 = 0, \\ 2B_0 - 5B_1 + 6B_2 = 0 \end{cases}$$

тәнликләр системи алыныр. Нәтичәдә B_0, B_1 вә B_2 әмсаллары тапылыр:

$$B_0 = \frac{1}{6}, \quad B_1 = \frac{5}{18}, \quad B_2 = \frac{19}{108}.$$

Демәли, верилмиш тәнлијин үмуми һәлли

$$y(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108} + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

шәклиндә олар.

II һал. (1) тәнлији јенә дә (3) шәклиндәдир, лакин p_n әмсалы сыфра бәрабәрдир: $p_n = 0$.

Онда үмуми һалда

$$p_n = p_{n-1} = p_{n-2} = \cdots = p_{n-\alpha+1} = 0, \quad p_{n-\alpha} \neq 0$$

олдуғуну гәбул етсәк, (1) тәнлији

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-\alpha}y^{(\alpha)} = P_m(x) \quad (6)$$

шәклиндә јазылар. Бу һалда $\lambda = 0$ әдәди һәмин тәнлијин

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-\alpha}\lambda^\alpha = 0 \quad (7)$$

характеристик тәнлијинин α дәфә тәкрарланан көкү олар.

Әкәр $z = y^{(\alpha)}$ әвәзләмәсини апарсаг, онда (6) тәнлијинин тәртиби α гәдәр азалар вә

$$z^{(n-\alpha)} + p_1z^{(n-\alpha-1)} + \cdots + p_{n-\alpha}z = \Phi_m(x) \quad (8)$$

шәклиндә јазылар ($p_{n-\alpha} \neq 0$). (8) тәнлији I һалда бахылан нөв тәнликдир. Она көрә дә онун хүсуси һәлли (4) шәклиндә чохһәдли олар:

$$z = Q_m(x) \quad \text{вә ја} \quad y^{(\alpha)} = Q_m(x).$$

Ахырынчы бәрабәрлији α дәфә ардычыл интеграллададыгда y тапылыр:

$$y = A_0x^{m+\alpha} + A_1x^{m+\alpha-1} + \cdots + A_mx^\alpha + C_1x^{\alpha-1} + \cdots + C_{\alpha-1}x + C_\alpha.$$

Бурада $C_1 = C_2 = \cdots = C_\alpha = 0$ көтүрдүкдә (6) тәнлијинин

бир хүсуси һәлли (бизә дә тәнлијин бир дәнә хүсуси һәлли лазымдыр) алыныр:

$$y_0=A_0x^{m+\alpha}+A_1x^{m+\alpha-1}+\dots+A_mx^{\alpha}=x^{\alpha}R_m(x).$$

Демәли, (6) шәклиндә диференсиал тәнлијин хүсуси һәлли

$$y_0(x)=x^{\alpha}R_m(x) \qquad (9)$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр; бурада α илә характеристик тәнлијин $\lambda=0$ көкүнүн тәкрарланма тәртиби, $R_m(x)$ илә исә тәнлијин сағ тәрәфиндәки чохһәдли илә ејни дәрәҹәли олан чохһәдли ишарә олунмушдур.

Мисал 2. $y'''-3y''=x$ тәнлијинин үмуми һәллини тапмаг үчүн әввәлҹә буна ујғун $y'''-3y''=0$ бирҹинсли тәнлијинин $\lambda^3-3\lambda^2=0$ характеристик тәнлијинин көкләрини тапаг: $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=3$ $(\alpha=2)$.

Бурадан ајдындыр ки, бирҹинсли тәнлијин үмуми һәлли

$$\bar{y}(x)=C_1+C_2x+C_3e^{3x} \qquad (10)$$

олар. Верилмиш бирҹинсли олмајан тәнлијин хүсуси һәлли исә

$$y_0(x)=x^2(Ax+B)$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр. Бурадан

$$y_0'(x)=3Ax^2+2Bx,\quad y_0''(x)=6Ax+2B,\quad y_0'''(x)=6A$$

вә бу гијмәтләри тәнликдә јеринә јаздыгда

$$6A-3(6Ax+2B)=x$$

мүнасибәти алыныр. Сонунҹу бәрабәрлијә әсасән

$$-18A=1,\quad 6A-6B=0,\quad A=-\frac{1}{18}=B$$

олар.

Демәли, верилмиш тәнлијин хүсуси һәлли

$$y_0(x)=-\frac{x^2}{18}(x+1)$$

вә үмуми һәлли

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3e^{3x}-\frac{x^2}{18}(x+1)$$

функсијасыдыр.

III һал. (1) тәнлијинин сағ тәрәфи m-дәрәҹәли ҹәбри чохһәдли илә үстлү функсијанын һасилидир:

$$L[y]=P_m(x)\,e^{\lambda_0 x}. \qquad (11)$$

Бу тәнликдә $y=ze^{\lambda_0 x}$ әвәзләмәсини апараг вә ики функсија һасилинин хәтти оператору һаггында мә'лум олан

$$L[UV]=L[U]\,V+\frac{L_1[U]}{1!}V'+\frac{L_2[U]}{2!}V''+\dots+\frac{L_n[U]}{n!}V^{(n)}$$

дүстурундан (§ 7, (9)) истифадә едәк. Онда (§ 7)

$$L_k[e^{\lambda_0 x}]=e^{\lambda_0 x}\varphi^{(k)}(\lambda_0)$$

олдуғуна әсасән (11) тәнлији

$$L[ze^{\lambda_0 x}]=e^{\lambda_0 x}z\varphi(\lambda_0)+e^{\lambda_0 x}\frac{\varphi'(\lambda_0)}{1!}z'+e^{\lambda_0 x}\frac{\varphi''(\lambda_0)}{2!}z''+\dots$$
$$\dots+e^{\lambda_0 x}z^{(n)}=P_m(x)\,e^{\lambda_0 x} \qquad (12)$$

кими јазылар; бурада

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\dots+p_{n-1}\lambda+p_n$$

ифадәси (1) тәнлијинә ујғун бирҹинсли тәнлијин характеристик чохһәдлисидир.

(12) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини $e^{\lambda_0 x}$ функсијасына бөлдүкдә, (3) шәклиндә олан

$$z^{(n)}+\dots+\frac{\varphi'(\lambda_0)}{1!}z'+\varphi(\lambda_0)z=P_m(x) \qquad (13)$$

тәнлији алыныр. Әкәр λ_0 әдәди характеристик тәнлијин α дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, јә'ни

$$\varphi(\lambda_0)=\varphi'(\lambda_0)=\dots=\varphi^{(\alpha-1)}(\lambda_0)=0,\quad \varphi^{(\alpha)}(\lambda_0)\neq 0$$

мүнасибәтләри өдәнилирсә, онда II һала көрә (13) тәнлијинин хүсуси һәлли

$$z=x^{\alpha}Q_m(x)$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр. Бу һалда (11) тәнлијинин хүсуси һәлли

$$y=x^{\alpha}Q_m(x)\,e^{\lambda_0 x} \qquad (14)$$

кими олар.

Демәли, λ_0 әдәди характеристик тәнлијин α дәфә тәкрарланан көкү олдугда (11) тәнлијинин хүсуси һәлли (14) шәклиндә ахтарылмалыдыр. Бурадан $\lambda_0=0$ олдугда II һалдакы нәтиҹә алыныр.

Мисал 3. $y'''+y''=xe^x$ $(P_m(x)=x,\ \lambda_0=1)$ тәнлијинә ујғун олан бирҹинсли $y'''+y''=0$ тәнлијинин $\lambda^3+\lambda^2=0$ характеристик тәнлијинин көкләри $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=-1$ әдәдләридир. $\lambda_0=1$ әдәди характеристик тәнлијин көкү дејилдир $(\alpha=0)$. Буна көрә дә верилмиш тәнлијин хүсуси һәлли

$$y_0(x)=(Ax+B)\,e^x$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр. Бу функсијанын

$$y_0'(x)=Ae^x+(Ax+B)\,e^x,\quad y_0''(x)=2Ae^x+(Ax+B)\,e^x,$$
$$y_0'''(x)=3Ae^x+(Ax+B)\,e^x$$

төрәмәләри тәнликдә јазылдыгда A вә B әмсалларыны тә'јин етмәк үчүн

$$5Ae^x+2(Ax+B)\,e^x=xe^x$$

мүнасибәтләри алыныр. Бурадан

$$2A=1,\quad 5A+2B=0 \quad \text{вә}$$
$$A=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{5}{4}$$

тапылыр. Демәли, верилмиш тәнлијин хүсуси һәлли

$$y_0(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)e^x$$

вә үмуми һәлли

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)e^x$$

олар.

IV һал. (1) тәнлијинин сағ тәрәфи

$$f(x) = e^{\lambda_0 x}\left[P_m^{(1)}(x)\cos px + P_m^{(2)}(x)\sin px\right] \quad (15)$$

шәклиндә ифадәдир, бурада $P_m^{(1)}(x)$ вә $P_m^{(2)}(x)$ ифадәләри m-дәрәчәли чәбри чохһәдлиләрдир.

(15) ифадәсини Ејлерин

$$\sin px = \frac{e^{pxi} - e^{-pxi}}{2i} \quad \text{вә} \quad \cos px = \frac{e^{pxi} + e^{-pxi}}{2}$$

дүстурларына әсасән чевирдикдә

$$f(x) = e^{(\lambda_0 + pi)x}P_m^{(3)}(x) + e^{(\lambda_0 - pi)x}P_m^{(4)}(x)$$

шәклиндә функсија алыныр, бурада $P_m^{(3)}(x)$ вә $P_m^{(4)}(x)$ m-дәрәчәли чәбри чохһәдлиләрдир.

Бу һалда (1) тәнлијинин хүсуси һәлли

$$L[y] = e^{(\lambda_0 + pi)}P_m^{(3)}(x) \quad (16)$$

вә

$$L[y] = e^{(\lambda_0 - pi)}P_m^{(4)}(x) \quad (17)$$

тәнликләринин хүсуси һәлләринин чәминә бәрабәр олар (§ 8, теорем 2). (16) вә (17) тәнликләринин хүсуси һәлләри исә III һалда көстәрилән гајда илә тапылыр. Бу тәнликләрин сағ тәрәфини Ејлер дүстурлары васитәсилә јенидән (15) шәклинә кәтирмәк мүмкүндүр.

Беләликлә, ашағыдакы нәтичә алыныр:

(1) тәнлијинин сағ тәрәфи (15) шәклиндәдирсә вә $\lambda_0 \pm pi$ әдәдләри характеристик тәнлијин α дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онда һәмин тәнлијин хүсуси һәллини

$$y_0(x) = x^\alpha e^{\lambda_0 x}\left[Q_m^{(1)}(x)\cos px + Q_m^{(2)}(x)\sin px\right] \quad (18)$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр, бурада $Q_m^{(1)}(x)$ вә $Q_m^{(2)}(x)$ m-дәрәчәли чәбри чохһәдлиләрдир.

Мисал 4. $y'' + 9y = \cos 3x$.

$\pm 3i$ әдәдләри характеристик тәнлијин садә көкләри олдуғундан верилмиш тәнлијин хүсуси һәлли

$$y_0(x) = x[A\cos 3x + B\sin 3x]$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр.

Мисал 5. $y'' - y = 2x\cos 3x$.

$\pm 3i$ әдәдләри характеристик тәнлијин көкү олмадығындан тәнлијин хүсуси һәлли

$$y_0(x) = (A_1x + B_1)\cos 3x + (A_2x + B_2)\sin 3x$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр.

§ 10. ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР ҮЧҮН СӘРҺӘД МӘСӘЛӘЛӘРИ

Индијә гәдәр верилмиш диференсиал тәнлијин үмуми һәллиндән онун мүәјјән хүсуси һәллини алмаг үчүн башланғыч шәртләрдән истифадә олунурду. n-тәртибли диференсиал тәнлик үчүн башланғыч шәртләр ахтарылан функсија вә онун $(n-1)$-тәртибә гәдәр төрәмәләринин бир нөгтәдә гијмәтләриндән ибарәтдир (§ 1). Тәнлијин үмуми һәллиндән мүәјјән хүсуси һәлли алмаг үчүн башга формаларда верилмиш шәртләрдән дә истифадә едилир. Үмумијјәтлә, n-тәртибли диференсиал тәнлијин n ихтијари сабитдән асылы олан үмуми һәллиндән мүәјјән хүсуси һәлли алмаг үчүн n дәнә шәрт верилмәлидир. Бу шәртләри

$$U_k[y] = \alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (1)$$

кими јазмаг олар. Бурада $U_k[y]$ илә ахтарылан функсија вә онун төрәмәләринин бир вә ја бир нечә нөгтәдәки гијмәтләринин мүәјјән комбинасијасы ишарә олунмушдур.

Әкәр ихтијари сабит A вә B әдәдләри үчүн

$$U_k[Ay_1 + By_2] = AU_k[y_1] + BU_k[y_2] \quad (2)$$

бәрабәрлији өдәнилирсә, онда (1) шәртләринә *хәтти шәртләр* дејилир. Бу һалда $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ олдугда һәмин шәртләр *хәтти бирчинсли шәртләр* адланыр.

Ајдындыр ки, n-тәртибли диференсиал тәнлијин

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$$

үмуми һәлли мә'лум олдугда онун (1) хәтти шәртләрини өдәјән хүсуси һәллини тапмаг үчүн һәмин шәртләрдән алынан

$$C_1U_k[y_1] + C_2U_k[y_2] + \cdots + C_nU_k[y_n] = \alpha_k \quad (3)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

системини $C_1, C_2, \ldots, C_n$ параметрләринә нәзәрән һәлл етмәк лазымдыр. (3) системинин һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында мүхтәлиф вәзијјәтләр ола биләр.

Бу мәсәләни кениш изаһ етмәк үчүн икитәртибли бирчинсли олмајан

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (a \leqslant x \leqslant b) \quad (4)$$

диференсиал тәнлијинә бахаг. Тутаг ки, γ_1 вә γ_2 мә'лум әдәдләрдир вә (4) тәнлијинин

$$y(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2 \quad (5)$$

шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы тәләб олунур.

Бу мәсәләјә *сәрһәд мәсәләси*, $[a, b]$ парчасынын уч нөгтәләриндә гојулан (5) шәртләринә исә *сәрһәд шәртләри* дејилир. Белә сәрһәд мәсәләсини һәлл етмәк, һәндәси олараг, (4) тәнлијинин (a, γ_1) вә (b, γ_2) нөгтәләриндән кечән интеграл әјрисини тапмаг демәкдир. Ајдындыр ки, мүстәвинин истәнилән ики нөгтәсиндән һәмишә интеграл әјриси кечирмәк мүм-

күн олмур, мүмкүн олдугда исә бә'зән бир јох, сонсуз сајда интеграл әјриси кечирмәк олур.

Сәрһәд мәсәләсинин Коши мәсәләсиндән фәргли чәһәти дә елә бундадыр. Верилмиш тәнлијин әмсаллары мүәјјән шәртләри өдәдикдә Коши мәсәләсинин әксәр һалларда јеканә һәлли олдуғу һалда, сәрһәд мәсәләсинин һәлли ја олмур, ја да сонсуз сајда олур. Буну ашағыдакы садә сәрһәд мәсәләсинин һәллиндән көрмәк олар.

Мәсәлә. $y''+y=0$ тәнлијинин $y(0)=0$, $y(b)=\alpha$ сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллини тапмалы.

Тәнлијин үмуми һәлли

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

шәклиндәдир (§ 5, мисал 1). Бу һәлл $y(0)=0$ шәртини $C_1=0$ олдугда өдәјир. $b\neq n\pi$ олдугда икинчи шәрти өдәјән јеканә һәлл $\alpha=C_2\sin b$ бәрабәрлијиндән C_2-ни тә'јин етмәклә тапылыр:

$$y=\frac{\alpha}{\sin b}\cdot\sin x.$$

$b=n\pi$ вә $\alpha\neq0$ олдугда сәрһәд мәсәләсинин һәлли јохдур. Чүнки $y=C_2\sin x$ әјриләри аиләсинин һеч бир әјриси $(n\pi, \alpha)$ $(\alpha\neq0)$ нөгтәсиндән кечмир.

$b=n\pi$ вә $\alpha=0$ олдугда исә сәрһәд мәсәләсинин сонсуз сајда һәлли вар: $y=C_2\sin x$ әјриләринин һәр бири $(n\pi, 0)$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјридир.

Гејд едәк ки, (4) тәнлији үчүн (5) шәртләриндән даһа үмуми олан башга сәрһәд шәртләри дә вермәк олар. Сәрһәд шәртләри бирчинсли олдугда ујғун сәрһәд мәсәләсинә *бирчинсли сәрһәд мәсәләси*, бирчинсли олмадыгда исә *бирчинсли олмајан сәрһәд мәсәләси* дејилир.

Инди (4) тәнлијинин бирчинсли

$$\begin{aligned}&\alpha_0 y'(a)+\alpha_1 y(a)=0 \quad (\alpha_0^2+\alpha_1^2>0),\\ &\beta_0 y'(b)+\beta_1 y(b)=0 \quad (\beta_0^2+\beta_1^2>0)\end{aligned} \tag{6}$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллини тапмагла мәшғул олаг. Бу сәрһәд мәсәләсини ((4), (6)) илә ишарә едәк вә фәрз едәк ки, онун јеканә һәлли вардыр.

Тутаг ки, $y_1(x)$ функсијасы (4) тәнлијинә ујғун олан бирчинсли

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{7}$$

тәнлијинин (6) сәрһәд шәртләринин биринчисини өдәјән тривиал олмајан һәлли, $y_2(x)$ исә (7) тәнлијинин (6) сәрһәд шәртләринин икинчисини өдәјән тривиал олмајан һәллидир:

$$\alpha_0 y_1'(a)+\alpha_1 y_1(a)=0,$$
$$\beta_0 y_2'(b)+\beta_1 y_2(b)=0.$$

Ајдындыр ки, $y_1(x)$ функсијасы (6) шәртләринин икинчисини өдәјә билмәз, чүнки әкс һалда ихтијари C әдәди үчүн

$y=Cy_1(x)$ функсијасы ((7), (6)) сәрһәд мәсәләсинин һәлли олар. Бу исә ((4), (6)) сәрһәд мәсәләсинин сонсуз сајда һәлли олдуғуну көстәрир ки, бу да фәрзијјәмизә зиддир. Ејни гајда илә дә көстәрмәк олар ки, $y_2(x)$ функсијасы (6) шәртләринин биринчисини өдәјә билмәз:

$$\begin{aligned}&\beta_0 y_1'(b)+\beta_1 y_1(b)\neq0,\\ &\alpha_0 y_2'(a)+\alpha_1 y_2(a)\neq0.\end{aligned} \tag{8}$$

$y_1(x)$ вә $y_2(x)$ функсијалары бирчинсли (7) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләридир (хәтти асылы һәлләр ејни бирчинсли сәрһәд шәртләрини өдәјир). Буна көрә дә һәмин тәнлијин үмуми һәлли

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{9}$$

кими јазылар. Бу һәлдән истифадә едәрәк (4) тәнлијинин һәллини сабитин вариасијасы үсулу илә тапмаг олар. (9) һәллини

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x) \tag{10}$$

кими јаздыгда $C_1(x)$ вә $C_2(x)$ функсијаларыны тапмаг үчүн

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0,\\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)\end{cases}$$

хәтти тәнликләр системи алыныр (§ 8, (17)). Бу системин әсас детерминанты хәтти асылы олмајан $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ функсијаларынын Вронски детерминантыдыр:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\neq0.$$

Буна көрә дә һәмин системин һәлли вар:

$$C_1'(x)=-\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)},\quad C_2'(x)=\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

Бурадан

$$C_1(x)=-\int_b^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt+\mu_1=\int_x^b\frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt+\mu_1,$$

$$C_2(x)=\int_a^x\frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt+\mu_2$$

алыныр (μ_1 вә μ_2 сабит әдәдләрдир). $C_1(x)$ вә $C_2(x)$ функсијалары үчүн тапылмыш бу гијмәтләри (10) бәрабәрлијиндә јеринә јаздыгда (4) тәнлијинин үмуми һәлли алыныр:

$$\begin{aligned}y(x)=y_1(x)\int_x^b\frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt+y_2(x)\int_a^x\frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt+\\ +\mu_1y_1(x)+\mu_2y_2(x).\end{aligned} \tag{11}$$

Бу һәллин (6) шәртләрини өдәмәси үчүн $\mu_1=\mu_2=0$ олмалыдыр. Доғрудан да, $\alpha_0 y_1'(a)+\alpha_1 y_1(a)=0$ олдуғуну нәзәрә алараг, (11) функсијасы үчүн (6) шәртләринин биринчисини јаздыгда

$$\mu_1\left[\alpha_0 y_1'(a)+\alpha_1 y_1(a)\right]+\mu_2\left[\alpha_0 y_2'(a)+\alpha_1 y_2(a)\right]=0$$

вә ја

$$\mu_2\left[\alpha_0 y_2'(a)+\alpha_1 y_2(a)\right]=0$$

олар. Бурадан (8) мүнасибәтинә көрә $\mu_2=0$ алыныр. Ејни гајда илә дә $\mu_1=0$ олдуғу исбат олунур.

Беләликлә, ((4), (6)) сәрһәд мәсәләсинин һәлли

$$y(x)=y_1(x)\int_x^b \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}\,dt+y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\,dt \qquad (12)$$

вә ја

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)\,f(t)\,dt \qquad (13)$$

шәклиндә алыныр; бурада

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{y_1(t)\,y_2(x)}{W(t)}, & a\leqslant t\leqslant x,\\[2mm] \dfrac{y_1(x)\,y_2(t)}{W(t)}, & x\leqslant t\leqslant b.\end{cases} \qquad (14)$$

$G(x,t)$ функсијасына бахылан ((4), (6)) сәрһәд мәсәләсинин *Грин функсијасы* вә ја *тә'сир функсијасы* дејилир. (14) ифадәсиндән ајдындыр ки, ((4), (6)) сәрһәд мәсәләсинин Грин функсијасы (4) тәнлијинин сағ тәрәфиндәки $f(x)$ функсијасындан асылы дејилдир. Грин функсијасы биринчи тәртиб (7) тәнлијинин хәтти асылы олмајан $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ һәлләри васитәсилә гурулур. Грин функсијасы мә'лум олдугда ((4), (6)) сәрһәд мәсәләсинин һәлли (13) дүстуру васитәсилә тапылыр.

Мисал 1.

$$y''+y=f(x),\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad (15)$$

сәрһәд мәсәләсинин Грин функсијасыны гурмалы.

Верилмиш тәнлијә ујғун олан биринчи тәртиб $y''+y=0$ тәнлијинин үмуми

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

һәллиндән $y(0)=0$ вә $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ шәртләрини ујғун олараг өдәјән ашағыдакы хүсуси һәлләр алыныр:

$$y_1(x)=C_2\sin x,\quad y_2(x)=C_1\cos x.$$

(14) бәрабәрлијинә көрә

$$G(x,t)=\begin{cases}-\cos t\cdot\sin x, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ -\sin t\cdot\cos x, & t\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

олар. Бу Грин функсијасы васитәсилә (15) сәрһәд мәсәләсинин һәлли

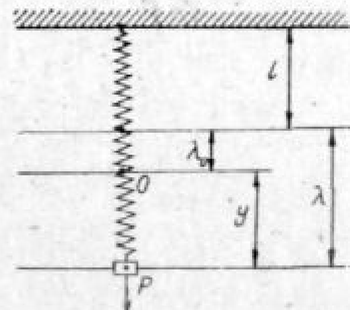
$$y(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t)\,f(t)\,dt$$

кими гурулур.

§ 11. МЕХАНИКИ РӘГСЛӘРИН ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИЈИ

Хәтти диференсиал тәнликләр нәзәријјәси бир чох практики мәсәләләрин һәллиндә кениш истифадә олунур. Буна рәгси просесләрин тәдгигини мисал көстәрмәк олар. Мүхтәлиф рәгс просесләри хәтти диференсиал тәнликләр васитәсилә тәсвир олунур вә онлар васитәсилә өјрәнилир.

Тутаг ки, чәкиси P (вә күтләси m) олан јүк бир учу бәркидилмиш вә тәбии узунлуғу l олан еластики јајдан асылмышдыр (шәкил 248). Бу јүк ашағыја тәрәф дартылараг (вә ја јухарыја тәрәф сыхылараг) бурахылдыгда, мүәјјән ганунла рәгс етмәјә башлајыр. Бу рәгсин һәрәкәт гануну нечә олар?



Шәкил 248

Мүһитин мүгавимәти нәзәрә алынмадыгда нөгтәнин һәрәкәт ганунуну тә'јин едән диференсиал тәнлик әввәлки фәсилдә (XXX, § 1) чыхарылмышдыр.

Бурада үмуми һала бахылыр.

Тутаг ки, јүк асылмыш јај λ_0 гәдәр узандыгдан сонра таразлыг вәзијјәтини алыр. Бу таразлыг вәзијјәтиндә јајын уч нөгтәсини O илә ишарә едәк. Фәрз едәк ки, Oу оху O нөгтәсиндә јајын бәркидилдији нөгтәјә тәрәф узадылмышдыр. Верилмиш анда јајын узанмасыны λ илә ишарә етсәк, онда һәмин анда јүкүн O нөгтәсиндән олан мәсафәси $\lambda-\lambda_0$ фәргинә бәрабәр олар. Бу заман јүкә ашағыдакы гүввәләр тә'сир едир:

1. Јүкүн P ағырлыг гүввәси.

2. Таразлыг вәзијјәтиндән чыхарылмыш јајы өз вәзијјәтинә гајтаран гүввә (јајын еластиклик гүввәси). Буна *бәрпа гүввәси* дејилир вә Һук ганунуна көрә бу гүввә јајын узунлуғунун

артымы илә мүтәнасиб олуб$-\kappa\lambda$ ифадәсинә бәрабәрдир. Бурада, һәр јај үчүн сабит олан κ $(\kappa>0)$ кәмијјәти „јајын сәртлијини" көстәрир. Јајын еластиклик гүввәси һәрәкәт истигамәтинин әксинә јөнәлмишдир.

3. Јүкүн һәрәкәтинә мане олан вә һәрәкәтин сүр'әти илә мүнтәнасиб олан мүһитин мүгавимәт гүввәси. Бу гүввә дә јүкүн һәрәкәт истигамәтинин әксинә јөнәлмишдир вә $-\gamma \frac{dy}{dt}$ ифадәсинә (γ=сабит>0) бәрабәрдир.

Онда Нјутонун икинчи ганунуна көрә јајын һәрәкәт тәнлији

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = P - \kappa\lambda - \gamma \frac{dy}{dt} \tag{1}$$

кими јазылар. Сүкунәт һалында јајын еластиклик гүввәси јүклә таразлашдығындан $P=\kappa\lambda_0$ олмалыдыр. Бу һалда $P-\kappa\lambda = -\kappa(\lambda-\lambda_0) = -\kappa y$ олур вә (1) тәнлији ашағыдакы кими јазылыр:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y - \gamma \frac{dy}{dt}$$

вә ја $\frac{\kappa}{m} = \omega^2$, $\frac{\gamma}{m} = 2\mu$ ишарәләрини гәбул етдикдә

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\mu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \tag{2}$$

Бу тәнлијә јүкүн сәрбәст рәгсләри тәнлији дејилир.

Јүк асылмыш јаја бир харичи $f(t)$ гүввәси шагули истигамәтдә тә'сир етдикдә јајын һәрәкәт тәнлији

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\mu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t) \tag{3}$$

шәклиндә јазылар. (3) тәнлијинә јүкүн *мәҹбури рәгсләри тәнлији* дејилир. Ајдындыр ки, (2) тәнлији икитәртибли сабит әмсаллы хәтти бирҹинсли, (3) тәнлији исә икитәртибли сабит әмсаллы бирҹинсли олмајан хәтти диференсиал тәнликдир. Инди бу тәнликләрин һәр бирини ајрылыгда тәдгиг едәк.

Сәрбәст рәгсләр

(2) сәрбәст рәгсләр тәнлијинин характеристик тәнлији

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0 \tag{4}$$

олар. Бурада үч һал ола биләр.

I һал. Характеристик тәнлијин λ_1 вә λ_2 көкләри һәгиги вә мүхтәлифдир:

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2-\omega^2}, \quad \mu^2-\omega^2 = R^2 > 0.$$

Бу һалда $\lambda_{1,2} = -\mu \pm R$ вә $R<\mu$ олдуғундан λ_1 вә λ_2 көкләринин икиси дә мәнфи олар. Онда (2) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = C_1 e^{-(\mu+R)t} + C_2 e^{-(\mu-R)t} \tag{5}$$

шәклиндә јазылар. Бурадан ајдындыр ки, јүкүн һәрәкәти деври дејилдир вә рәгси характер дашымыр.

II һал. Характеристик тәнлијин көкләри һәгиги вә бәрабәрдир:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu < 0, \quad \mu^2-\omega^2 = 0.$$

Онда (2) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = C_1 e^{-\mu t} + C_2 t e^{-\mu t} \tag{6}$$

шәклиндә олар. Бу һалда да јүкүн һәрәкәти деври дејилдир вә рәгси характер дашымыр.

Һәр ики һалда $t\to\infty$ шәртиндә $y\to 0$ олур. Бунун сәбәби физики олараг одур ки, $\mu^2 \geqslant \omega^2$ вә ја $\gamma^2 \geqslant 4m\kappa$ олдуғундан мүһитин мүгавимәт гүввәси (вә ја γ әмсалы) јајын еластиклик гүввәсиндән чох бөјүкдүр, буна көрә дә јајын еластиклик гүввәси јүкү 0 таразлыг нөгтәси әтрафында рәгси һәрәкәтә сөвг едә билмир. Әкәр $y(0)=y_0$ вә $y'(0)=V_0$ башланғыч шәртләри верилсә, онда (5) вә (6) бәрабәрликләриндән C_1 вә C_2 әмсалларыны тапараг, һәмин функсијалары ујғун олараг

$$y = e^{-\mu t}\left(y_0 \operatorname{ch} Rt + \frac{y_0\mu + V_0}{R} \operatorname{sh} Rt\right), \tag{5'}$$

$$y = e^{-\mu t}\left[y_0 + (y_0\mu + V_0)t\right] \tag{6'}$$

шәклиндә јазмаг олар.

III һал. Характеристик тәнлијин көкләри комплексдир:

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \tau i, \quad \tau^2 = \omega^2 - \mu^2, \quad \tau = \sqrt{\omega^2-\mu^2}.$$

Бу һалда (2) тәнлијинин үмуми һәлли ашағыдакы кими јазылар:

$$y = e^{-\mu t}(C_1 \cos \tau t + C_2 \sin \tau t). \tag{7}$$

Һәллин физики мә'насыны изаһ етмәк үчүн ону башга шәклә кәтирмәк даһа мәгсәдәујғундур. Бу мәгсәдлә (7) бәрабәрлијинин сағ тәрәфини $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ ифадәсинә вураг вә бөләк:

$$y = Ae^{-\mu t}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \cos \tau t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \sin \tau t\right).$$

$$\sin\varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \text{ вә } \cos\varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$$

гәбул етсәк,

$$y = Ae^{-\mu t}(\sin\varphi \cos\tau t + \cos\varphi \sin \tau t)$$

вә ја

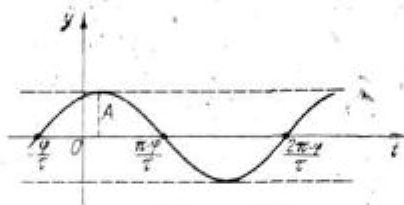
$$y = Ae^{-\mu t}\sin(\tau t + \varphi) \tag{8}$$

олар. Әкәр бу тәнликдә $\mu=0$ оларса, јә'ни мүһитин мүгавимәти олмазса, онда јајдан асылмыш јүкүн һәрәкәт гануну ашағыдакы кими јазылар:

$$y = A\sin(\tau t + \varphi). \tag{9}$$

18*

Бу тәнлик һармоник рәгсин тәнлијидир (шәкил 249). $A = \max y$ әдәди һармоник рәгсин *амплитуду*, $\tau t + \varphi$ аргументи исә рәгсин *фазасы* адланыр. Фазанын, $t = 0$ олдугда гијмәтинә, јә'ни φ әдәдинә рәгсин *башланғыч фазасы*, τ әдәдинә исә рәгсин *тезлији* дејилир. Һармоник рәгсин A амплитуду вә φ башланғыч фазасы $y(0) = y_0$, $y'(0) = V_0$ башланғыч шәртләри васитәсилә тә'јин олунур:



Шәкил 249

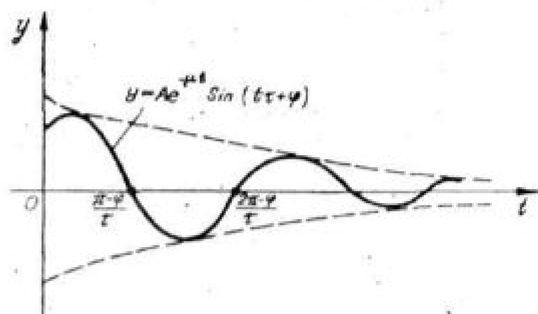
$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{V_0^2}{\tau^2}},$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\tau y_0}{V_0}.$$

Рәгсин $T = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\sqrt{m/q}$ периоду вә τ тезлији јајын сәртлијиндән вә системин күтләсиндән асылыдыр.

$\mu \neq 0$ олдугда, јә'ни мүһитин мугавимәт гүввәси сыфыр олмадыгда, јајын һәрәкәти (8) тәнлији илә тә'јин олунур. Бу һалда да $\sin(\tau t + \varphi)$ функсијасы дөври олдуғундан һәрәкәт рәгси һәрәкәтдир, лакин онун $Ae^{-\mu t}$ амплитуду сабит олмајыб t дәјишәниндән асылыдыр. $t \to \infty$ шәртиндә рәгсин амплитуду азалараг сыфра јахынлашыр: $Ae^{-\mu t} \to 0$ $(t \to \infty)$. Демәли, бу һалда рәгсләр сөнәндир (шәкил 250). Сөнән рәгсләрин периоду

$$T = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}$$



Шәкил 250

дүстуру илә тә'јин олунур. Сөнән рәгсләрин амплитудлары ортаг вуруғу $D = e^{-\mu\frac{\pi}{\tau}} = e^{-\mu\frac{T}{2}}$ әдәди олан азалан һәндәси силсилә әмәлә кәтирир. D әдәдинә *сөнмә декременти*, $\ln D = -\frac{\mu T}{2}$ әдәдинә исә *сөнмәнин логарифмик декременти* дејилир.

Мәчбури рәгсләр

Бурада (3) мәчбури рәгсләр тәнлијинин

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = f(t) \tag{10}$$

хүсуси һалыны ($\mu = 0$, јә'ни мүһитин мугавимәт гүввәси олмајан һалы) тәдгиг едәк. Бирчинсли олмајан (10) тәнлијинә ујғун олан бирчинсли тәнлијин $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ характеристик тәнлијинин көкләри $\lambda_1 = \omega i$ вә $\lambda_2 = -\omega i$ хәјали әдәдләр олдуғундан (10) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + y_0(t)$$

шәклиндә олар; бурада $y_0(t)$ функсијасы (10) тәнлијинин хүсуси һәллидир. Бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки биринчи ики һәддин чәмини јухарыда көстәрилән гајда илә чевирмәклә ону

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) + y_0(t) \tag{11}$$

шәклиндә јазмаг олар.

(11) бәрабәрлији көстәрир ки, јүкүн мәчбури рәгсләри онун сәрбәст рәгсләри (буна (11) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки биринчи һәдд ујғундур) илә харичи (һәјәчанландырычы) $f(t)$ гүввәсинин тә'сири илә әмәлә кәлән мәчбури рәгсләрин топланмасындан әмәлә кәлир. Фәрз едәк ки, јүкә тә'сир едән харичи гүввә $f(t) = M \sin \alpha t$ шәклиндәдир, јә'ни дөври функсијадыр (M=сабит$\neq 0$, α=сабит>0). Бурада ики һал мүмкүндүр.

I һал. Сәрбәст рәгсләрин ω тезлији харичи гүввәнин α тезлијинә бәрабәр дејилдир: $\alpha \neq \omega$.

Бу һалда (10) тәнлијинин $y_0(t)$ хүсуси һәллини

$$y_0(t) = Q \cos \alpha t + R \sin \alpha t$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр (§ 9, IV). Бурадан

$$y_0'(t) = -\alpha Q \sin \alpha t + R\alpha \cos \alpha t,$$

$$y_0''(t) = -\alpha^2 Q \cos \alpha t - R\alpha^2 \sin \alpha t$$

төрәмәләрини тапараг, (10) тәнлијиндә јеринә јаздыгда Q вә R әмсалларыны тапмаг үчүн

$$\begin{cases} R\omega^2 - R\alpha^2 = M, \\ Q\omega^2 - Q\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

тәнликләр системи алыныр. Бу системи һәлл етмәклә Q вә R әмсаллары тапылыр:

$$R = \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2}, \; Q = 0 \quad (\omega \neq \alpha, \quad \alpha \neq -\omega).$$

Беләликлә, (10) тәнлијинин хүсуси һәлли

$$y_0(t) = \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2} \sin \alpha t$$

вә үмуми һәлли

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2} \sin \alpha t \tag{12}$$

олар. Демәли, јүкүн һәрәкәти ω тезликли сәрбәст рәгсләрлә һәјәчанландырычы гүввәнин тә'сири илә әмәлә кәлән α тезликли мәчбури рәгсләрин топланмасындан әмәлә кәлир. (12) ифадәсиндән ајдындыр ки, бу һәрәкәтин амплитуду мәһдуддур.

II һал. Сәрбәст рәгсләрин ω тезлији харичи гүввәнин α тезлијинә бәрабәрдир: $\omega=\alpha$.

Бу һалда (10) тәнлијинин $y_0(t)$ хүсуси һәлли

$$y_0(t) = t(\ \cos \alpha t + R \sin \alpha t)$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр (§ 9, IV). Бу функсијаны тәнликдә јеринә јазараг, вә R әмсалларыны тапмаг олар:

$$R = 0, \quad Q = -\frac{M}{2\alpha}.$$

Нәтичәдә (10) тәнлијинин хүсуси һәлли

$$y_0(t) = -\frac{M}{2\alpha} t \cos \alpha t$$

вә үмуми һәлли

$$y = A \sin(\alpha t + \varphi) - \frac{M}{2\alpha} t \cos \alpha t \qquad (13)$$

шәклиндә олур. Бурадан ајдындыр ки, јенә дә јүкүн һәрәкәти $\alpha=\omega$ тезликли сәрбәст рәгсләрлә, һәјәчанландырычы α тезликли харичи гүввәнин тә'сири илә әмәлә кәлән $\alpha=\omega$ тезликли мәчбури рәгсләрин топланмасындан әмәлә кәлир. Лакин I һалдан фәргли олараг бурада мәчбури рәгсин $-\frac{M}{2\alpha}t$ амплитуду t заманы гејри-мәһдуд артанда гејри-мәһдуд олараг артыр. Харичи гүввәнин M амплитуду кичик олдугда вә белә t кифајәт гәдәр бөјүк олдугда мәчбури рәгсин амплитуду истәнилән гәдәр бөјүк ола биләр. Јүкүн сәрбәст рәгсләри тезлији илә һәјәчанландырычы харичи гүввәнин тезлији бәрабәр олдугда баш верән бу һадисәјә техникада *резонанс* дејилир.

Чох да бөјүк олмајан харичи гүввәнин тә'сири илә кифајәт гәдәр бөјүк амплитудлу рәгсләрин алынмасындан, јә'ни резонанс һадисәсиндән радиотехникада истифадә олунур. Бир чох һалларда исә кифајәт гәдәр бөјүк амплитудлу рәгсләрин әмәлә кәлмәси зәрәрлидир, чүнки резонанс бә'зән гурғуларын (көрпүләрин, бәндләрин вә с.) дағылмасына сәбәб олур.

XXII ФӘСИЛ

ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИ

§ 1. ҮМУМИ АНЛАЈЫШЛАР

Тутаг ки, x аргументи, ахтарылан $y_\kappa = y_\kappa(x)$ $(\kappa=1, 2, \ldots, n)$ функсијалары вә онларын биртәртибли $y'_\kappa = y'_\kappa(x)$ $(\kappa=1, 2, \ldots, n)$ төрәмәләриндән асылы олан

$$F_\kappa(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) = 0 \qquad (1)$$
$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n)$$

тәнликләри верилмишдир. Бу мүнасибәтә *биртәртибли* диференсиал тәнликләр системи дејилир.

(1) системинин тәнликләри ахтарылан функсијаларын төрәмәләринә нәзәрән һәлл едилдикдә

$$y'_\kappa = f_\kappa(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

системи алыныр. (2) системинә диференсиал тәнликләрин n-тәртибли нормал системи дејилир. Нормал системдә тәнликләрин сајы ахтарылан функсијаларын сајына бәрабәр олур.

(2) системи

$$y'_\kappa = f_\kappa(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n \qquad (3)$$

шәклиндә олдугда, јә'ни x аргументи (2) системинин сағ тәрәфинә ашкар шәкилдә дахил олмадыгда, она *автоном* вә ја *динамик систем* дејилир.

Биз бурада диференсиал тәнликләрин јалныз нормал системини өјрәнәчәјик.

(2) нормал системинин бүтүн тәнликләрини өдәјән, јә'ни онлары ејнилијә чевирән n дәнә $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функсијалары чохлуғуна һәмин системин *һәлли* дејилир. Системин һәлләрини тапмаг мәсәләси онун *интегралланмасы* адланыр.

Тәнликләр системинин һәр бир

$$y_1 = y_1(x), \; y_2 = y_2(x), \; \ldots, \; y_n = y_n(x)$$

һәлли $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ координатлы $(n+1)$-өлчүлү Евклид фәзасында бир әјри тә'јин едир. Бу о демәкдир ки, x аргументи мүәјјән (a, b) интервалында дәјишдикдә $(n+1)$-өлчүлү фәзанын $(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ нөгтәси һәмин фәзада бир әјри тәсвир едир. Бу әјријә системин интеграл әјриси дејилир. $x = x_0$ олдугда $y_\kappa(x_0) = y^0_\kappa$ $(\kappa=1, 2, \ldots, n)$ олурса, онда интеграл әјриси $(x_0, y^0_1, y^0_2, \ldots, y^0_n)$ нөгтәсиндән кечир.

(2) нормал системинин

$$y_1(x_0) = y^0_1, \; y_2(x_0) = y^0_2, \; \ldots, \; y_n(x_0) = y^0_n \qquad (4)$$

шәртләрини өдәјән $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ һәллинин тапылмасы мәсәләсинә Коши мәсәләси, $x_0, y^0_1, y^0_2, \ldots, y^0_n$ әдәдләринә исә башланғыч шәртләри вә башланғыч гијмәтләри дејилир. (2) нормал системинин (4) шәртләрини өдәјән һәллини тапмаг, һәндәси олараг, $(x_0, y^0_1, y^0_2, \ldots, y^0_n)$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тапмаг демәкдир.

(2) нормал системинин верилмиш башланғыч шәртләри өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији үчүн кафи шәрт ашағыдакы теоремдә көстәрилир.

Коши теореми. *Тутаг ки, (2) системинин сағ тәрәфи олан $f_\kappa(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ функсијалары $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ дәјишәнләринин $(n+1)$-өлчүлү фәзасынын һәр һансы G областында кәсилмәјәндир вә $y_1, y_2, \ldots, y_n$ дәјишәнләринә нәзәрән кәсил-*

мәјән хүсуси төрәмәләри вардыр. Онда (2) системинин мүәјјән $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ интервалында тә'јин олунмуш вә (4) башланғыч шәртләрини $((x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in \sigma)$ өдәјән вә $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ башланғыч гијмәтләриндән кәсилмәз асылы олан јеканә

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \dots,\ y_n = y_n(x)$$

һәлли вар.

Бу теоремдән ајдындыр ки, (2) системинин σ областында сонсуз сајда һәлли вар. Верилмиш $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ башланғыч гијмәтләринин x_0 әдәдини сабит сахлајараг $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ әдәдләрини мүәјјән областда дәјишдирдикдә (әлбәттә, $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ нөгтәси Коши теореминдә көстәрилән σ областында галмаг шәртилә) һәр бир $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ әдәдләр системинә (2) системинин бир

$$y_1 = \varphi_1(x, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0),\quad y_2 = \varphi_2(x, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0),\ \dots,$$
$$y_n = \varphi_n(x, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$$

һәлли ујғун олар. Бурада $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ әдәдләри ујғун олараг $C_1, C_2, \dots, C_n$ илә әвәз едилдикдә (2) системинин n дәнә ихтијари параметрдән асылы олан

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases} \tag{5}$$

һәлли алыныр. Буна (2) системинин *үмуми һәлли* дејилир.

Даһа дәгиг, (2) системинин ихтијари $C_1, C_2, \dots, C_n$ параметрләриндән асылы олан (5) һәллинә о заман системин үмуми һәлли дејилир ки, һәмин һәлдән $C_1, C_2, \dots, C_n$ параметрләринә мүәјјән $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ гијмәтләрини вермәклә истәнилән $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ башланғыч шәртләрини (әлбәттә, $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in \sigma$ олмалыдыр) өдәјән һәлли алмаг мүмкүн олсун. Системин үмуми һәллиндән $C_1, C_2, \dots, C_n$ параметрләринә конкрет $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ гијмәтләри вермәклә алынан һәллә һәмин системин *хүсуси һәлли* дејилир.

(2) системинин (5) үмуми һәлли мә'лум олдугда (4) башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли тапмаг үчүн

$$\varphi_k(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_k^0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

системиндән $C_1, C_2, \dots, C_n$ параметрләрини тапыб, (5) мүнасибәтиндә јеринә јазмаг лазымдыр.

Фәрз едәк ки, (2) системинин (5) үмуми һәлли $C_1, C_2, \dots, C_n$ параметрләринә нәзәрән һәлл олунмушдур:

$$\psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_1,$$

$$\psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_n. \tag{6}$$

(6) бәрабәрликләринин һәр биринә (2) системинин биринчи интегралы дејилир. (2) системинин n дәнә (6) биринчи интеграллары чохлуғу һәмин системин үмуми интегралыны тәшкил едир.

Үмумијјәтлә, $\psi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ функсијасында $y_1, y_2, \dots, y_n$ әвәзинә (2) системинин һәр һансы һәллини јаздыгда

$$\psi_k[x, \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots, \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)] \equiv C_k$$

ејнилији өдәниләрсә, онда һәмин $\psi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ функсијасына (2) системинин интегралы,

$$\psi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_k$$

бәрабәрлијинә исә системин биринчи интегралы дејилир. Системин биринчи интеграллары чох ола биләр.

Системин верилмиш n дәнә (6) биринчи интегралы вә ја $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ функсијалары онун үмуми интегралыны тәшкил етмәси үчүн онлар ахтарылан $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсијаларына нәзәрән асылы олмамалыдыр. Бу о демәкдир ки, $y_1, y_2, \dots, y_n$ функсијаларындан ашкар шәкилдә асылы олмајан һеч бир F функсијасы үчүн

$$F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0$$

мүнасибәти өдәнилмир.

Бу тәклифин доғрулуғу үчүн зәрури вә кафи шәрт $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ функсијаларынын $y_1, y_2, \dots, y_n$ дәјишәнләринә нәзәрән Јакобианынын ејниликлә сыфра бәрабәр олмамасыдыр:

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0. \tag{7}$$

Бурадан ајдындыр ки, системин n дәнә асылы олмајан биринчи интегралы мә'лум олдугда онун үмуми интегралы тапылмыш олур, бу исә системин һәлл олунмасы демәкдир.

Системин биринчи интегралларыны тапмаг үчүн үмуми гајда көстәрмәк мүмкүн дејилдир. Верилмиш системи чевирмәклә бә'зән тез интеграллана билән тәнликләр алмаг мүмкүн олур. Белә тәнликләрә *интегралланан комбинасијалар* дејилир. Әкәр интегралланан комбинасија $d\psi[x, y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$ шәклиндә тәнлик оларса, онда $\psi[x, y_1, y_2, \dots, y_n] = C$ бәрабәрлији системин биринчи интегралы олар.

Мисал.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 + 2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 3y_2 \end{cases} \tag{8}$$

нормал системинин үмуми интегралыны тапмалы.

(8) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә топладыгда

$$\frac{d(y_1+y_2)}{dx}=5(y_1+y_2),\quad \frac{d(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=5\,dx$$

мүнасибәти вә ахырынчы бәрабәрлијини интегралладыгда

$$y_1+y_2=C_1e^{5x}$$

бәрабәрлији алыныр. Буну

$$(y_1+y_2)e^{-5x}=C_1 \tag{9}$$

кими дә јазмаг олар.

(8) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә чыхмагла исә

$$(y_1-y_2)e^{-x}=C_2 \tag{10}$$

мүнасибәтини алмаг олар.

(9) вә (10) бәрабәрликләри (8) системинин биринчи интеграллларыдыр. Јохламаг олар ки, $\psi_1=(y_1+y_2)e^{-5x}$ вә $\psi_2=(y_1-y_2)e^{-x}$ функсијаларынын y_1 вә y_2 дәјишәнләринә нәзәрән Јакобианы $-2e^{-6x}$ ифадәсинә бәрабәр олдуғундан (7) шәрти өдәнилир, јә'ни онлар y_1 вә y_2 дәјишәнләринә нәзәрән асылы дејилдир. Буна көрә дә (8) системинин үмуми интегралы

$$(y_1+y_2)e^{-5x}=C_1,\quad (y_1-y_2)e^{-x}=C_2$$

олар.

Гејд едәк ки, нормал системин һәр һансы биринчи интегралы мә'лум олдугда онун тәртибини бир ваһид азалтмаг мүмкүндүр. Доғрудан да, тутаг ки,

$$\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)=C \tag{11}$$

бәрабәрлији (2) нормал системинин биринчи интегралыдыр вә (11) тәнлији y_n дәјишәнинә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$y_n=T(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, C). \tag{12}$$

y_n-нин бу гијмәтини (2) системинин биринчи $n-1$ тәнлијиндә јеринә јаздыгда $n-1$ тәртибли

$$y_k'=f_k[x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, T(x, y_1, \dots, y_{n-1})],\quad k=1, 2, \dots, n-1 \tag{13}$$

нормал системи алыныр. Бу системин һәлли илә (12) мүнасибәти бирликдә (2) системинин үмуми һәллини гурмаға имкан верир.

Бурадан ајдындыр ки, (2) нормал системинин m сајда асылы олмајан биринчи интегралы мә'лум олдугда һәмин системин тәртибини m ваһид азалтмаг олар.

§ 2. НОРМАЛ СИСТЕМИН МӘҸҺУЛЛАРЫ ЈОХЕТМӘ ҮСУЛУ ИЛӘ ҺӘЛЛИ

Диференсиал тәнликләр системинин бә'зән интегралланан комбинасијалар сечмәклә һәлл олуна билдији јухарыда (§ 1) көстәрилди.

Нормал системи јүксәктәртибли бир диференсиал тәнлијә кәтирмәклә дә һәлл етмәк мүмкүндүр. Бу үсул ахтарылан мәҹһул функсијаларын ардычыл јох едилмәсинә әсасланыр. Онун үмуми схеми ашағыда көстәрилир.

Верилмиш

$$\begin{cases} y_1'=f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2'=f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n'=f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \tag{1}$$

нормал системинин биринчи тәнлијинин һәр ики тәрәфиндән x-ә нәзәрән төрәмә алаг:

$$y_1''=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot y_1'+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot y_2'+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot y_n'.$$

Бу бәрабәрликдә $y_1', y_2', \dots, y_n'$ төрәмәләрини онларын (1) системиндәки $f_1, f_2, \dots, f_n$ ифадәләри илә әвәз етдикдә

$$y_1''=\Phi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \tag{2}$$

тәнлији алыныр. (2) тәнлијинин һәр ики тәрәфини јенидән x-ә нәзәрән диференсиаллајараг, алынан

$$y_1'''=\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}\cdot y_1'+\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2}\cdot y_2'+\dots+\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n}\cdot y_n'$$

бәрабәрлијиндә $y_1', y_2', \dots, y_n'$ төрәмәләрини онларын (1) системиндәки $f_1, f_2, \dots, f_n$ ифадәләри илә әвәз етдикдә

$$y_1'''=\Phi_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

тәнлији алыныр. Бу просеси давам етдирмәклә, нәһајәт

$$y_1^{(n)}=\Phi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \tag{3}$$

тәнлији алыныр.

Инди, фәрз едәк ки,

$$\begin{cases} y_1'=f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1''=\Phi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}=\Phi_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

системи $y_2, y_3, \dots, y_n$ дәјишәнләринә нәзәрән һәлл олунур:

$$y_k=\omega_k(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}),\quad k=2, 3, \dots, n. \tag{4}$$

Бу гијмәтләри (3) тәнлијиндә $y_2, y_3, \dots, y_n$ дәјишәнләри әвәзинә јаздыгда y_1 функсијасына нәзәрән бир дәнә n-тәртибли

$$y_1^{(n)}=\Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \tag{5}$$

тәнлији алыныр.

Тутаг ки, (5) тәнлијинин үмуми һәлли тапылмышдыр:

$$y_1=F_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \tag{6}$$

(6) функсијасыны $(n-1)$ дәфә ардычыл диференсиалламагла $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$ төрәмәләри $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$ кәмијјәтләринин функсијасы кими тапылыр. Бу гијмәтләри (4) бәрабәрликләриндә јеринә јазмагла $y_2, y_3, \ldots, y_n$ мәчһул функсијалары тә'јин олунур:

$$y_k = F_k(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \ (k = 2, 3, \ldots, 4). \qquad (7)$$

(6) вә (7) функсијалары бирликдә (1) системинин

$$y_1 = F_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$y_2 = F_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = F_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

үмуми һәллини тәшкил едир.

Гејд едәк ки, индијә гәдәр апарылан мүһакимәдә тәләб олунан әмәлијјатларын мүмкүн олмасы фәрз олунурду. Әлбәттә, бу әмәлијјатлар мүәјјән шәртләр дахилиндә апарыла биләр. Бу шәртләр өдәнилмәдикдә исә верилмиш нормал системи n-тәртибли бир тәнлијә кәтирмәк мүмкүн олмаја да биләр.

Мисал.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - 2z \end{cases} \qquad (8)$$

системини мәчһуллары јохетмә үсулу илә һәлл етмәли.

Системин биринчи тәнлијинин һәр ики тәрәфини x-ә нәзәрән диференсиаллајаг:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}.$$

Инди, бу тәнликлә системин биринчи тәнлијиндән z вә $\dfrac{dz}{dx}$ кәмијјәтләрини тә'јин едәк:

$$z = 2y - \frac{dy}{dx},$$
$$\frac{dz}{dx} = 2\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}. \qquad (9)$$

Бу гијмәтләри системин икинчи тәнлијиндә јеринә јаздыгда

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3y = 0 \qquad (10)$$

хәтти тәнлији алыныр. Хәтти бирчинсли (10) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x}$$

функсијасыдыр. Бу гијмәти (9) бәрабәрлијиндә јеринә јазмагла мәчһул z функсијасы тапылыр:

$$z = C_1(2-\sqrt{3})e^{\sqrt{3}x} + C_2(2+\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}x}.$$

Биз јухарыда көстәрдик ки, ади диференсиал тәнликләр системини јүксәктәртибли бир тәнлијә кәтирмәк олар. Әлавә функсијалар дахил етмәклә јүксәктәртибли бир тәнлији дә нормал системә кәтирмәк олар.

Доғрудан да, тутаг ки, n-тәртибли

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (11)$$

диференсиал тәнлији верилмишдир. Ашағыдакы ишарәләри гәбул едәк:

$$y = y_1$$
$$y' = y_1' = y_2,$$
$$y'' = y_2' = y_3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n,$$
$$y^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Онда (11) тәнлији

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \cdots\cdots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

нормал системинә кәтирилмиш олур.

Инди дә мүкәммәл нәзәријјәси олан хәтти диференсиал тәнликләр системи илә мәшғул олаг.

§ 3. ХӘТТИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИ

Диференсиал тәнликләрин нормал системи

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \qquad (1)$$

шәклиндә олдугда, јә'ни системин сағ тәрәфи ахтарылан $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функсијаларына нәзәрән хәтти олдугда она *хәтти диференсиал тәнликләр системи* дејилир. Бурада $a_{ik}(x)$ вә $b_k(x)$ һәр һансы (a, b) интервалында тә'јин олунмуш кәсилмәјән функсијалардыр.

(a, b) интервалында $b_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ олдугда (1) системинә *бирчинсли хәтти диференсиал тәнликләр системи*, $b_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ функсијаларынын һеч олмаса бири (a, b) интервалында ејниликлә сыфра бәрабәр олмадыгда исә һәмин системә *бирчинсли олмајан хәтти диференсиал тәнликләр системи* дејилир.

Ајдындыр ки, хәтти диференсиал тәнликләрин (1) нормал системи әмсалларынын кәсилмәз олдуғу областда һәллин варлығы вә јеканәлији һаггында Коши теореминин (§ 1) шәртләри өдәнилир. Буна көрә дә (1) системинин (a, b) интервалында тә'јин олунмуш вә истәнилән $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\ (a < x_0 < b)$ башланғыч шәртләрини өдәјән јеканә $y_1(x), y(x), \dots, y_n(x)$ һәлли вар.

Вектор—матрис ишарәләриндән истифадә едәрәк (II, § 3), (1) системини даһа гыса шәкилдә дә јазмаг олар. Бу мәгсәдлә

$$Y=\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Vmatrix},\quad Y'=\begin{Vmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

ишарәләриндән истифадә олунур. Онда (1) тәнликләр системи

$$Y' = A\cdot Y + B \qquad (2)$$

вектор—матрис шәклиндә јазылыр.

Бурада Y' сүтун—матриси Y матрисинин төрәмәси адланыр. Һәр бир сүтун—матрисә координатлары һәмин матрисин елементләри олан вектор кими дә бахмаг олар. Бу һалда (2) тәнлијинин һәлли Y сүтун—матриси вә ја $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ вектору олар.

(2) хәтти диференсиал тәнликләр системинә ујғун олан бирчинсли хәтти диференсиал тәнликләр системини

$$Y' = A\cdot Y \qquad (3)$$

кими јазмаг олар.

Јүксәктәртибли хәтти диференсиал тәнликләр нәзәријјәсиндә олдуғу кими (XXXI, § 8), бурада да исбат етмәк олар ки, бирчинсли олмајан (2) системинин үмуми һәлли онун бир Y_0 хүсуси һәлли илә ујғун (3) бирчинсли системинин $\widetilde{Y}$ үмуми һәллинин чәминә бәрабәрдир:

$$Y = Y_0 + \widetilde{Y}. \qquad (4)$$

Хәтти асылы олмајан $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ векторлары (вә ја сүтун—матрисләри) (3) бирчинсли системинин һәлләри олдугда һәмин системин үмуми һәлли

$$\widetilde{Y} = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \dots + C_nY_n \qquad (5)$$

кими гурулур. $Y_k(y_{k1}(x), y_{k2}(x), \dots, y_{kn}(x))\ (k = 1, 2, \dots, n)$ векторлар системинин хәтти асылы олмамасы онларын Вронски детерминанты адланан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \qquad (6)$$

детерминанты илә тә'јин олунур. (3) бирчинсли системинин $[a, b]$ парчасында хәтти асылы олмајан $Y_k(y_{k1}(x), y_{k2}(x), \dots, y_{kn}(x))\ (k = 1, 2, \dots, n)$ һәлләринин (6) Вронски детерминанты һәмин парчанын бүтүн нөгтәләриндә сыфырдан фәрглидир.

(3) бирчинсли системин хәтти асылы олмајан $Y_k(y_{k1}(x), y_{k2}(x), \dots, y_{kn}(x))\ (k = 1, 2, \dots, n)$ һәлләри вә буна көрә дә (5) үмуми һәлли мә'лум олдугда (2) системинин үмуми һәллини сабитин вариасијасы үсулу илә тапмаг олар. Бу мәгсәдлә (2) системинин һәллини

$$Y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, Y_k \qquad (7)$$

шәклиндә ахтарырлар, бурада $C_k(x)$ намә'лум функсијалардыр. Бу гијмәти (2) системиндә јаздыгда

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, Y_k + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, Y_k' = A\sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, Y_k + B$$

мүнасибәти алыныр. $Y_k' = AY_k$ (Y_k векторлары (3) системинин һәлли олдуғундан) ејнилијини нәзәрә алсаг,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, Y_k = B \qquad (8)$$

олар. (8) бәрабәрлији ашағыдакы n дәнә тәнликләр системинә еквивалентдир:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_{1k} = b_1(x), \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_{2k} = b_2(x), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_{nk} = b_n(x). \end{cases} \qquad (9)$$

Бу системин әсас детерминанты хәтти асылы олмајан $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ векторлар системинин $W(x)$ Вронски детерминантыдыр.

$W(x) \neq 0$ олдуғундан (9) системиндән $C_k'(x)\ (k=1, 2, \dots, n)$ функсијалары биргијмәтли тә'јин олунур:

$$C_k'(x) = \varphi_k(x)\quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Бурадан $C_k(x)$ функсијаларыны

$$C_k(x) = \int \varphi_k(x)\, dx + C_k\quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

шәклиндә тә'јин едәрәк, (7) бәрабәрлијиндә јаздыгда (2) системинин үмуми һәлли алыныр.

Јухарыда көстәрдик ки, (3) бирчинсли системинин (5) үмуми һәллини гурмаг үчүн һәмин системин хәтти асылы олмајан n дәнә хүсуси $y_1, y_2, \ldots, y_n$ һәллини билмәк лазымдыр. Әмсаллары функсијалар олан хәтти бирчинсли тәнликләр системинин хәтти асылы олмајан һәлләрини тапмаг үчүн үмуми үсул јохдур. Лакин әмсаллары сабит әдәдләр олан хәтти бирчинсли тәнликләр системи үчүн белә үсул вардыр.

§ 4. САБИТ ӘМСАЛЛЫ ХӘТТИ БИРЧИНСЛИ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИ

Тутаг ки,

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{cases} \qquad (1)$$

хәтти бирчинсли тәнликләр системинин a_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots, n$) әмсаллары сабит әдәдләрдир. (1) системинин хүсуси һәллини

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{\lambda x}, \ldots, \quad y_n = \alpha_n e^{\lambda x} \qquad (2)$$

шәклиндә ахтараг. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ вә λ әдәдләрини елә сечәк ки, (2) функсијалары (1) системинин һәлли олсун.

(2) функсијаларыны вә онларын

$$y_1' = \alpha_1\lambda e^{\lambda x}, \quad y_2' = \alpha_2\lambda e^{\lambda x}, \ldots, \quad y_n' = \alpha_n\lambda e^{\lambda x}$$

төрәмәләрини (1) системиндә јеринә јаздыгда

$$\begin{cases} \lambda\alpha_1 e^{\lambda x} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n)e^{\lambda x}, \\ \lambda\alpha_2 e^{\lambda x} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n)e^{\lambda x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda\alpha_n e^{\lambda x} = (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n)e^{\lambda x} \end{cases}$$

системи, тәнликләрин һәр ики тәрәфини $e^{\lambda x}$ вуруғуна ихтисар етдикдә исә

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

системи алыныр. Бу систем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ мәчһулларына нәзәрән бирчинсли хәтти чәбри тәнликләр системидир. (3) бирчинсли системинин детерминанты

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

олар. $\Delta(\lambda) \neq 0$ олдугда (3) бирчинсли системинин јалныз $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ сыфыр (тривиал) һәлли вар. Бу исә (2) бәрабәрликләринә көрә (1) системинин јалныз

$$y_1(x) = y_2(x) = \cdots = y_n(x) = 0$$

сыфыр һәллини верир.

Демәли, (3) бирчинсли системинин сыфырдан фәргли һәллинин олмасы үчүн һәмин системин $\Delta(\lambda)$ детерминантынын сыфра бәрабәр олмасы зәрури вә кафидир (II, § 3):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

(4) бәрабәрлији λ-ја нәзәрән n-дәрәчәли чәбри тәнликдир. Она (1) системинин характеристик тәнлији дејилир.

Чәбрин әсас теореминә (XVIII, § 8) көрә (4) чәбри тәнлијинин n дәнә һәгиги вә ја комплекс көкү (көкләрин тәкрарланма дәрәчәси нәзәрә алынмагла) вардыр.

Бир нечә һала бахаг.

I һал. *Характеристик тәнлијин көкләри һәгиги вә мүхтәлифдир.*

Бу көкләри $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ илә ишарә едәк. λ әвәзинә (3) системиндә λ_1 әдәдини (биринчи көкү) јазараг, алынан системдән $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ әмсаллары үчүн

$$\alpha_1^{(1)}, \quad \alpha_2^{(1)}, \ldots, \quad \alpha_n^{(1)}$$

гијмәтләри тә'јин олунур. Бу әмсаллар васитәсилә (1) системинин

$$y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 x}, \quad y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 x}, \ldots, \quad y_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{\lambda_1 x} \qquad (5)$$

һәлли алыныр.

Ејни гајда илә (1) системинин λ_2 көкүнә ујғун һәлли

$$y_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 x}, \quad y_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 x}, \ldots, \quad y_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{\lambda_2 x} \qquad (6)$$

вә нәһајәт, (1) системинин λ_n көкүнә ујғун һәлли

$$y_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{\lambda_n x}, \quad y_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{\lambda_n x}, \ldots, \quad y_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{\lambda_n x} \qquad (7)$$

алыныр.

(1) системинин (5)—(7) һәлләри васитәсилә онун үмуми һәлли тә'јин олунур:

$$\begin{cases} y_1 = C_1\alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n\alpha_1^{(n)} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1\alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n\alpha_2^{(n)} e^{\lambda_n x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = C_1\alpha_n^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_n^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n\alpha_n^{(n)} e^{\lambda_n x}, \end{cases} \qquad (8)$$

бурада $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ихтијари сабитләрдир.

Мисал 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 4y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 \end{cases} \qquad (9)$$

системини һәлл етмәли.

Характеристик тәнлији дүзәлдәк:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{вә ја} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Бу тәнлијин көкләри һәгиги вә мүхтәлифдир: $\lambda_1 = -1$ вә $\lambda_2=3$. Инди (9) системинин һәлләрини

$$y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{-x}, \quad y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{-x},$$
$$y_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{3x}, \quad y_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{3x}$$

шәклиндә ахтараг. $\lambda_1=-1$ көкүнә ујғун олан $\alpha_1^{(1)}$ вә $\alpha_2^{(1)}$ әмсалларыны тапмаг үчүн (3) системини дүзәлдәк:

$$\begin{cases} 2\alpha_1^{(1)} + 4\alpha_2^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Бурадан $\alpha_1^{(1)} = -2\alpha_2^{(1)}$ вә $\alpha_2^{(1)} = -1$ гәбул етмәклә $\alpha_1^{(1)} = 2$ алыныр. Беләликлә, (9) системинин бир һәлли тапылыр:

$$y_1^{(1)} = 2e^{-x}, \quad y_2^{(1)} = -e^{-x}. \qquad (10)$$

Инди $\lambda_2=3$ көкүнә ујғун (3) системини дүзәлдәк:

$$\begin{cases} -2\alpha_1^{(2)} + 4\alpha_2^{(2)} = 0, \\ \alpha_1^{(2)} - 2\alpha_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Бурадан $\alpha_1^{(2)} = 2\alpha_2^{(2)}$ вә $\alpha_2^{(2)}=1$ гәбул етмәклә $\alpha_1^{(2)}=2$ алыныр. Нәтиҹәдә (9) системинин икинҹи һәлли тапылыр:

$$y_1^{(2)} = 2e^{3x}, \quad y_2^{(2)} = e^{3x}. \qquad (11)$$

(10) вә (11) һәлләри васитәсилә (9) системинин (8) шәклиндә үмуми һәлли тә'јин олунур:

$$y_1 = 2C_1e^{-x} + 2C_2e^{3x},$$
$$y_2 = -C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

II һал. *Характеристик тәнлијин көкләри мүхтәлифдир, лакин онларын бә'зиләри комплекс әдәдләрдир.*

Бу һалда да системин тапылан көкләрә ујғун һәлләри биринҹи һалда көстәрилән гајда илә (3) системи васитәсилә тә'јин олунур. Лакин системин, характеристик тәнлијин $\lambda_1=\alpha+i\beta$ вә $\lambda_2=\alpha-i\beta$ кими ики гошма комплекс көкләринә ујғун олан

$$y_k^{(1)} = \alpha_k^{(1)} e^{(\alpha+i\beta)x} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (12)$$

вә

$$y_k^{(2)} = \alpha_k^{(2)} e^{(\alpha-i\beta)x} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (13)$$

һәлләри комплекс олур.

Јүксәктәртибли хәтти диференсиал тәнликләр нәзәријјәсиндә олдуғу (XXXI, § 7) кими, бурада да көстәрмәк олар ки, системин (12) вә (13) һәлләринин һәгиги вә хәјали һиссәләри һәмин системин һәллидир. Буна әсасән системин (12) вә (13) һәлләри әвәзинә

$$\bar{y}_k^{(1)} = e^{\alpha x}\left(\mu_k^{(1)} \cos\beta x + \mu_k^{(2)} \sin\beta x\right),$$
$$\bar{y}_k^{(2)} = e^{\alpha x}\left(\gamma_k^{(1)} \cos\beta x + \gamma_k^{(2)} \sin\beta x\right) \qquad (14)$$

шәклиндә һәгиги һәлләри алыныр, бурада һәгиги $\mu_k^{(1)}$, $\mu_k^{(2)}$, $\gamma_k^{(1)}$, $\gamma_k^{(2)}$ әдәдләри $\alpha_k^{(1)}$ вә $\alpha_k^{(2)}$ әдәдләри васитәсилә тә'јин олунур.

(1) системинин үмуми һәлли јенә дә (8) шәклиндә тапылан хүсуси һәлләр васитәсилә гурулур.

Мисал 2.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 - 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 4y_1 - y_2 \end{cases} \qquad (15)$$

системини һәлл етмәли.

Бу системин

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

характеристик тәнлијинин көкләри $\lambda_1=1+2i$ вә $\lambda_2=1-2i$ комплекс әдәдләридир.

$\lambda_1=1+2i$ көкүнә ујғун α_1 вә α_2 әмсалларыны тә'јин етмәк үчүн (3) системини дүзәлдәк:

$$\begin{cases} (2-2i)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 4\alpha_1 - (2+2i)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Бурадан $2\alpha_1=(1+i)\alpha_2$ вә $\alpha_2=2$ гәбул етдикдә $\alpha_1=1+i$ алыныр. Бу һалда (15) системинин ујғун һәлли

$$y_1^{(1)} = (1+i)e^{(1+2i)x}, \quad y_2^{(1)} = 2e^{(1+2i)x} \qquad (16)$$

олар.

Инди характеристик тәнлијин $\lambda_2=1-2i$ көкүнә ујғун α_1 вә α_2 әмсалларыны тә'јин етмәк үчүн

$$\begin{cases} (2+2i)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 4\alpha_1 - (2-2i)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

системини һәлл едәк. Бурадан $\alpha_2=(1+i)\alpha_1$ мүнасибәти вә $\alpha_1=1$ гәбул етдикдә $\alpha_2=1+i$ алыныр. Тапылан $\alpha_1=1$ вә $\alpha_2=1+i$ әмсалларына ујғун олан һәлл

$$y_1^{(2)} = e^{(1-2i)x}, \quad y_2^{(2)} = (1+i)e^{(1-2i)x} \qquad (17)$$

олар.

(16) вә (17) һәлләрини ујғун олараг

$$\begin{cases} y_1^{(1)} = e^x(\cos 2x - \sin 2x) + i\,e^x(\cos 2x + \sin 2x), \\ y_2^{(1)} = 2e^x\cos 2x + i\,2e^x \sin 2x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^{(2)} = e^x \cos 2x - ie^x \sin 2x, \\ y_2^{(2)} = e^x(\cos 2x + \sin 2x) - ie^x(\sin 2x - \cos 2x) \end{cases}$$

шәклиндә јазаг. (15) системинин хүсуси һәлли олараг, бу һәлләрин һәгиги вә хәјали һиссәләрини ајрылыгда көтүрмәк олар:

$$\overline{y}_1^{(1)} = e^x \cos 2x, \quad \overline{y}_2^{(1)} = e^x(\cos 2x + \sin 2x);$$
$$\overline{y}_1^{(2)} = e^x \sin 2x, \quad \overline{y}_2^{(2)} = e^x(\sin 2x - \cos 2x).$$

Бу һалда системин үмуми һәлли

$$y_1 = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x,$$
$$y_2 = C_1 e^x(\cos 2x + \sin 2x) + C_2 e^x(\sin 2x - \cos 2x)$$ олур.

Характеристик тәнлијин тәкрарланан һәгиги вә комплекс көкләри олан һалларда да системин үмуми һәлли охшар гајда (XXXI, § 7) илә гурулур.

XXXIII ФӘСИЛ

ДАЈАНЫГЛЫГ НӘЗӘРИЈЈӘСИНИН ЕЛЕМЕНТЛӘРИ

§ 1. ЛЈАПУНОВ МӘ'НАДА ДАЈАНЫГЛЫГ АНЛАЈЫШЫ

Тутаг ки, һәр һансы физики просес вә ја һадисә

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

диференсиал тәнликләр системинин $y_k(x_0) = y_k^0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли васитәсилә тәсвир олунур. Бу вахт (1) тәнликләри вә башланғыч гијмәтләри чох заман тәгриби олараг верилир вә ја тәчрүбәләрдән мүәјјән хәта илә тапылыр.

Буна көрә дә белә бир мәсәлә гаршыја чыхыр: башланғыч шәртләрин кичик дәјишмәси (1) системинин тапылан һәллинә нечә тә'сир едир?

Башланғыч шәртләрин кичик дәјишмәси системин һәллини чох сүр'әтлә дәјиширсә, һәмин башланғыч шәртләр васитәси илә тапылан һәллин практики әһәмијјәти олмур. Чүнки белә һәлл өјрәнилән физики просеси һеч тәгриби олараг да ифадә едә билмәз.

Буна көрә дә бир чох практики мәсәләләрин һәлли, һансы шәртләр дахилиндә башланғыч шәртләрин кичик дәјишмәсинә системин һәллинин дә кичик дәјишмәси ујғун олдуғуну тәдгиг етмәји тәләб едир.

Гејд едәк ки, (1) системинин сағ тәрәфи һәллин варлығы вә јеканәлији теореминин шәртләрини өдәјирсә вә x аргументи сонлу парчада дәјиширсә, онда башланғыч шәртләри кичик дәјишдикдә системин һәлли дә кичик дәјишир. Бу тәклифин доғрулуғу систем үчүн Коши мәсәләси һәллинин башланғыч шәртләрдән кәсилмәз асылы олмасындан алыныр (XXXII, §1).

Аргумент сонсуз интервалда дәјишдикдә һәллин дәјишмәси дајаныглыг нәзәријјәсиндә өјрәнилир. Бу исә диференсиал тәнликләр системи һәллинин Љапунов мә'нада дајаныглығы анлајышы илә бағлыдыр.

Тутаг ки, $J = (x_0 < x < +\infty)$, D чохлуғу исә $y_1, y_2, \ldots, y_n$ дәјишәнләри фәзасынын мәһдуд областыдыр вә (1) системинин сағ тәрәфиндәки $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ функсијалары $\sigma = J \times D$ чохлуғунда кәсилмәздир вә кәсилмәз $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ $(k, i = 1, 2, \ldots, n)$ хүсуси төрәмәләри вардыр; бурада $\sigma = J \times D$ илә бүтүн $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(x \in J$ вә $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D)$ нөгтәләри чохлуғу (J вә D чохлугларынын дүзкүн һасили) ишарә олунмушдур. Онда һәр бир $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in \sigma$ нөгтәси үчүн (1) системинин $y_k(x_0) = y_k^0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ башланғыч шәртләрини өдәјән вә x_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмуш јеканә һәлли вар.

(1) системинин J чохлуғунда тә'јин олунмуш һәллини $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ илә ишарә едәк.

Тә'риф. *Тутаг ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta(\varepsilon) > 0$ вар ки, (1) системинин J чохлуғунда тә'јин олунмуш вә башланғыч гијмәтләри*

$$|y_k(x_0) - \varphi_k(x_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

бәрабәрсизликләрини өдәјән һәр бир $y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ һәлли истәнилән $x \in J$ нөгтәсиндә

$$|y_k(x) - \varphi_k(x)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

бәрабәрсизликләрини өдәјир. Онда дејирләр ки, (1) системинин $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ һәлли Љапунов мә'нада дајаныглыдыр.

Әкәр $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ һәлли Љапунов мә'нада дајаныглыдырса вә $0 < \sigma \leqslant \delta$ шәртини өдәјән ихтијари σ әдәди үчүн

$$|y_k(x_0) - \varphi_k(x_0)| < \sigma \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

олдугда

$$\lim_{x \to \infty} |y_k(x) - \varphi_k(x)| = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

мүнасибәти өдәнилирсә, онда дејирләр ки, (1) системинин $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ һәлли *асимптотик* дајаныглыдыр.

Тутаг ки, $\delta > 0$ истәнилән кичик әдәддир вә (2) шәртини өдәјән һеч олмаса бир $y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ һәлли үчүн (3) бәрабәрсизлији өдәнилмир. Онда системин $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ һәлли *дајаныгсыз һәлл* адланыр.

Мисал 1.

$\frac{dy}{dx} = -a^2 y$ $(a \leqslant 0)$ тәнлијинин $y(x_0) = y_0$ башланғыч шәртини өдәјән һәллинин дајаныглы олмасыны тәдгиг етмәли.

Тәнлијин (x_0, y_0) башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$y(x) = y_0 e^{-a^2(x - x_0)} \tag{5}$$

функсијасыдыр. Тәнлијин $(x_0, \overline{y}_0)$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$\overline{y}(x) = \overline{y}_0 e^{-a^2(x - x_0)}$$

олар. Бурадан, $x \geq x_0$ олдугда

$$|\bar y(x) - y(x)| = e^{-a^2(x-x_0)}|\bar y_0 - y_0| < |\bar y_0 - y_0|$$

бәрабәрсизлији алыныр.

Верилмиш истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн $\delta=\varepsilon$ гәбул етдикдә $|\bar y_0 - y_0|<\delta$ олмасындан истәнилән $x\geq x_0$ нөгтәсиндә $|\bar y(x)-y(x)|<\varepsilon$ бәрабәрсизлији алыныр.

Демәли, тәнлијин (5) һәлли Љапунов мә'нада дајаныглыдыр.

$a\neq 0$ олдугда

$$\lim_{x\to\infty}|\bar y(x)-y(x)| = \lim_{x\to\infty} e^{-a^2(x-x_0)}|\bar y_0 - y_0| = 0$$

олур ки, бу да (5) һәллинин ејни заманда асимптотик дајаныглы олдуғуну көстәрир.

$a=0$ олдугда исә $\bar y_0 - y_0\neq 0$ шәрти дахилиндә $\lim\limits_{x\to\infty}|\bar y(x)-y(x)|\neq 0$ олур ки, бу да $a=0$ һалында (5) һәллинин асимптотик дајаныгсыз олдуғуну көстәрир.

Мисал 2.

$\frac{dy}{dx} = a^2 y \ (a\neq 0)$ тәнлијинин $y(x_0)=y_0$ башланғыч шәрти өдәјән һәллинин дајаныглы олмасыны тәдгиг етмәли.

Бу һалда да

$$y(x) = y_0 e^{a^2(x-x_0)},\quad \bar y(x) = \bar y_0 e^{a^2(x-x_0)}$$

вә x-ин $x\geq x_0$ гијмәтләриндә

$$|\bar y(x)-y(x)| = e^{a^2(x-x_0)}|\bar y_0 - y_0|$$

олар. Бурадан ајдындыр ки $|\bar y_0 - y_0|\neq 0$ фәргинин һеч бир кичик гијмәтиндә $|\bar y(x)-y(x)|$ фәрги x-ин кифајәт гәдәр бөјүк гијмәтләриндә верилмиш $\varepsilon>0$ әдәдиндән кичик ола билмәз. Демәли, тәнлијин $y(x)$ һәлли дајаныгсыздыр.

Тутаг ки, сабит олан $y_k\equiv a_k \ (k=1, 2, \dots, n)$ функсијалары (1) системинин һәллидир. Белә һәллә (1) системинин *таразлыг вәзијјәти* (*вә ја сүкут нөгтәси*) дејилир. Хүсуси һалда, $y_k\equiv 0$ $(k=1, 2, \dots, n)$ һәллинә *тривиал һәлл* дејилир.

Верилмиш системин һәр һансы $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ һәллинин дајаныглығынын арашдырылмасы мәсәләсини, бу систем васитәсилә гурулан јени системин тривиал һәллинин дајаныглығынын арашдырылмасы мәсәләсинә кәтирмәк олар.

Доғрудан да, (1) системиндә

$$z_k = y_k - \varphi_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

әвәзләмәсини апарсаг, онда јени z_k дәјишәнләринә көрә

$$\frac{dz_k}{dx} = -\frac{d\varphi_k}{dx} + f_k[x, z_1+\varphi_1, z_2+\varphi_2, \dots, z_n+\varphi_n] \quad (k=1, 2, \dots, n) \qquad (6)$$

системи алынар. (1) системинин $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ һәллинә (6) системинин $z_k\equiv 0$ $(k=1, 2, \dots n)$ һәлли ујғундур.

Беләликлә, (1) системинин $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ һәллинин дајаныглығы мәсәләси, (6) системинин $z_k\equiv 0$ $(k=1, 2, \dots, n)$ тривиал һәллинин дајаныглығы мәсәләсинә кәтирилмиш олур. Хүсуси һалда, хәтти бирчинсли олмајан тәнликләр системинин һәр һансы һәллинин дајаныглығы мәсәләси, мүәјјән әвәзләмә васитәсилә ујғун бирчинсли системин тривиал һәллинин дајаныглығы мәсәләсинә кәтирилир. Буна көрә дә, үмумилији позмадан, кәләчәкдә верилмиш системләрин анчаг тривиал һәлләринин дајаныглығы өјрәнилир.

Бүтүн һәлләри дајаныглы (асимптотик дајаныглы) олан системә *дајаныглы* (*асимптотик дајаныглы*) *систем* дејилир.

§ 2. САБИТ ӘМСАЛЛЫ ХӘТТИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИ ҺӘЛЛИНИН ДАЈАНЫГЛЫҒЫ

Јухарыда көстәрдик ки, хәтти бирчинсли олмајан тәнликләр системинин һәр һансы һәллинин дајаныглығы мәсәләси ујғун бирчинсли системин тривиал һәллинин дајаныглығы мәсәләсинә кәтирилир. Буна көрә дә, бурада анчаг сабит әмсаллы хәтти диференсиал тәнликләр системи һәллинин дајаныглығы өјрәнилир.

Тутаг ки, сабит әмсаллы хәтти бирчинсли диференсиал тәнликләр системи верилмишдир:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) системинин һәллини

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x},\ y_2 = \alpha_2 e^{\lambda x},\ \dots,\ y_n = \alpha_n e^{\lambda x} \qquad (2)$$

шәклиндә ахтармаг олар (XXXII, § 4). Функсијаларын бу гијмәтләрини (1) системиндә јеринә јаздыгда намә'лум $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ әмсалларына нәзәрән

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

кими хәтти бирчинсли чәбри тәнликләр системи алыныр. Бу-

радакы намә'лум λ әдәди (1) системинин

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

характеристик тәнлијиндән тә'јин олунур.

Тутаг ки, характеристик тәнлијин $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ көкләри мүхтәлифдир вә онларын һәгиги һиссәләри мәнфи әдәдләрдир. Онда (1) системинин, λ_k көкүнә ујғун олан һәлли

$$y_1 = \alpha_{1k} e^{\lambda_k x}, \quad y_2 = \alpha_{2k} e^{\lambda_k x}, \ldots, \quad y_n = \alpha_{nk} e^{\lambda_k x} \qquad (5)$$

шәклиндә олар

Әкәр λ_k көкүнүн өзү һәгиги мәнфи әдәддирсә, онда $x \to \infty$ шәртиндә (5) функсијаларынын һамысы сыфра јахынлашыр:

$$y_m = \alpha_{mk} e^{\lambda_k x} \to 0 \, (x \to \infty), \; m = 1, 2, \ldots, n.$$

λ_k көкү, һәгиги һиссәси мәнфи p_k әдәди олан $p_k + iq_k = \lambda_k$ шәклиндә комплекс әдәд олдугда $\alpha_{mk} \cdot e^{(p_k + iq_k)x}$ функсијаларыны Ејлер дүстурларына әсасән чевирмәклә

$$y_m = e^{p_k x} (\beta_{mk} \cos q_k x + i \gamma_{mk} \sin q_k x) \qquad (6)$$
$$(m = 1, 2 \ldots, n)$$

шәклиндә јазмаг олар. $p_k < 0$ олдуғундан $x \to \infty$ шәртиндә (6) функсијалары да сыфра јахынлашыр:

$$y_m \to 0 (x \to \infty), \; m = 1, 2, \ldots, n.$$

Беләликлә, характеристик тәнлијин бүтүн көкләри мүхтәлиф вә һәгиги һиссәләри мәнфи әдәдләрдирсә, онда (1) системинин һәмин көкләрә ујғун (5) һәлләринин һамысы $x \to \infty$ шәртиндә сыфра јахынлашыр.

$y_1 = 0, \; y_2 = 0, \ldots, \; y_n = 0$ исә (1) системинин тривиал (сыфыр) һәллидир. Демәли, көстәрилән һалда (1) системинин (5) һәлләринин һамысы $x \to \infty$ шәртиндә тривиал һәллә јахынлашыр. (1) системинин үмуми һәллинин (5) һәлләринин ихтијари әмсаллы хәтти комбинасијасы олмасындан ајдындыр ки, системин истәнилән һәлли $x \to \infty$ шәртиндә тривиал һәллә јахынлашыр. Бурадан ашағыдакы нәтичә алыныр:

Характеристик тәнлијин бүтүн көкләри мүхтәлиф вә һәгиги һиссәләри мәнфи әдәдләр олдугда сабит әмсаллы хәтти бирчинсли тәнликләрин (1) системинин $y_1 = 0, \; y_2 = 0, \ldots, \; y_n = 0$ тривиал һәлли дајаныглыдыр (вә һәм дә асимптотик дајаныглыдыр).

Инди, фәрз едәк ки, характеристик тәнлијин көкләри мүхтәлифдир, лакин бу көкләрин һеч олмаса биринин һәгиги һиссәси мүсбәтдир. Бу көк $\lambda_k = p_k + iq_k \, (p_k > 0)$ оларса, онда (1) системинин үмуми һәллинин бир топлананында $e^{p_k x}$ вуруғу олар, бу вуруг исә $x \to \infty$ шәртиндә гејри-мәһдуд олараг артыр. Буна көрә дә, (1) системинин үмуми һәлли $x \to \infty$ шәртиндә

$y_1 = 0, \; y_2 = 0, \ldots, \; y_n = 0$ тривиал һәллә јахынлаша билмәз. Демәли, (1) системинин $y_1 = 0, \; y_2 = 0, \ldots, \; y_n = 0$ тривиал һәлли (вә ја сүкут нөгтәси) дајаныгсыздыр.

Бурадан ајдындыр ки, характеристик тәнлијин көкләринин һеч олмазса биринин һәгиги һиссәси мүсбәтдирсә, онда системин $y_1 = 0, \; y_2 = 0, \ldots, \; y_n = 0$ тривиал һәлли дајаныгсыздыр.

Характеристик тәнлијин бүтүн көкләринин мүхтәлиф олдуғуну фәрз етмәклә алдығымыз нәтичәләр характеристик тәнлијин тәкрарланан көкләри олдугда да доғрудур. Доғрудан да, характеристик тәнлијин λ_k көкү N дәфә тәкрарланан олдугда системин үмуми һәллинин топлананларында $x^s e^{\lambda_k x} \, (s \leqslant N - 1)$ шәклиндә вуруглар олар. Бу заман $\lambda_k < 0$ олдугда, јенә дә

$$\lim_{x \to \infty} x^s e^{\lambda_k x} = 0,$$

$\lambda_k > 0$ олдугда исә

$$\lim_{x \to \infty} x^s e^{\lambda_k x} = \infty$$

олур.

Беләликлә, ашағыдакы теорем исбат олунур:

Теорем. ***Характеристик тәнлијин бүтүн көкләринин һәгиги һиссәләри мәнфи әдәдләр олдугда системин $y_1 = 0, \; y_2 = 0, \ldots, \; y_n = 0$ тривиал һәлли дајаныглыдыр. Характеристик тәнлијин көкләринин һеч олмаса биринин һәгиги һиссәси мүсбәт әдәд олдугда системин $y_1 = 0, \; y_2 = 0, \ldots, \; y_n = 0$ тривиал һәлли дајаныгсыздыр.***

Мисал 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 13y - 4z \end{cases}$$

системинин тривиал һәлли дајаныглыдырмы?

Бу системин

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 13 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

характеристик тәнлијинин көкләри,

$$\lambda_1 = -1 + 2i \quad \text{вә} \quad \lambda_2 = -1 - 2i$$

комплекс әдәдләрдир. Онларын икисинин дә һәгиги һиссәси мәнфи әдәд олдуғундан системин $y = 0, \; z = 0$ тривиал һәлли дајаныглыдыр.

Мисал 2.

$$\frac{dy}{dx} = y - 4z,$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} y + 3z$$

системи үчүн характеристик тәнлик

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ \frac{1}{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

олар. Бу тәнлијин көкләри

$$\lambda_1 = 2 + i \quad \text{вә} \quad \lambda_2 = 2 - i$$

комплекс әдәдләридир. Характеристик тәнлијин көкләринин һәгиги һиссәләри мүсбәт әдәдләр олдуғундан системин $y = 0$, $z = 0$ тривиал һәлли дајанығсыздыр.

§ 3. ДИНАМИК СИСТЕМ ТРАЈЕКТОРИЈАЛАРЫНЫН СҮКУТ НӨГТӘСИ ӘТРАФЫНДА ЈЕРЛӘШМӘ ХАРАКТЕРИ

Тутаг ки

$$y_\kappa' = f_{\kappa 1}(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

динамик системи верилмишдир. Динамик системин чох садә механики мә'насы вардыр. Бурада x дәјишәнини (аргументи) заман ($t = x$) һесаб етдикдә динамик системин һәр бир $y_\kappa = y_\kappa(x)$ ($\kappa = 1, 2, \dots, n$) һәлли $y_1, y_2, \dots, y_n$ дәјишәнләри фәзасында мүәјјән трајекторија үзрә һәрәкәт гануну тә'јин едир. Онда $y_\kappa' = \frac{dy_\kappa}{dx}$ ($\kappa = 1, 2, \dots, n$) кәмијјәтләри һәрәкәтин сүр'әт векторунун координатлары олар.

Бу һалда, $y_1, y_2, \dots, y_n$ дәјишәнләри фәзасына фаза фәзасы, $y_\kappa = y_\kappa(x)$ ($\kappa = 1, 2, \dots, n$) һәллинин тә'јин етдији (параметрик шәкилдә) әјрија исә фаза трајекторијасы (вә ја садәчә, трајекторија) дејилир.

Динамик системин трајекторијасы сүкут нөгтәси (вә ја тривиал һәлл) әтрафында нечә јерләшир?

Бу мәсәләни, садә динамик (автоном) системләр үчүн, јә'ни сабит әмсаллы хәтти бирчинсли диференсиал тәнликләрин

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z, \\ \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z \end{cases} \tag{2}$$

шәклиндә системи үчүн тәдгиг етмәклә кифајәтләнәк. Фәрз едәк ки,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

(2) системинин һәлли $y = \alpha_1 e^{\lambda x}$, $z = \alpha_2 e^{\lambda x}$ шәклиндә ахтарылыр. Бурада намә'лум λ әдәди

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

вә ја

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \tag{5}$$

характеристик тәнлијиндән, α_1, α_2 әмсаллары исә

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

тәнликләринин бириндән тә'јин олунур.

Бурада бир нечә һал ола биләр:

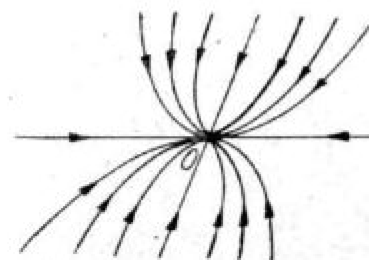
I һал. *Характеристик тәнлијин λ_1 вә λ_2 көкләри һәгиги вә мүхтәлифдир.*

(2) системинин үмуми һәллини тапмаг үчүн (6) системиндә λ әвәзинә нөвбә илә λ_1 вә λ_2 әдәдләрини јазараг, ујғун α_1 вә α_2 әмсалларыны тапмаг лазымдыр. Тутаг ки, λ_1 вә λ_2 әдәдләринә $\alpha_1^{(\kappa)}$ вә $\alpha_2^{(\kappa)}$ ($\kappa = 1, 2$) әмсаллары ујғундур. Онда (2) системинин үмуми һәлли

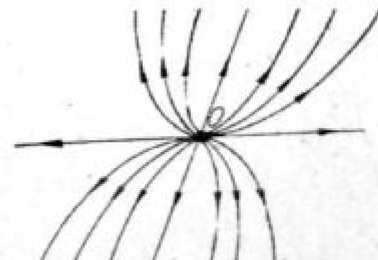
$$\begin{cases} y = C_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 x}, \\ z = C_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 x} \end{cases} \tag{7}$$

олар. Бурада ашағыдакы һаллар мүмкүндүр:

а) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Бу һалда (2) системинин $y = 0$, $z = 0$ тривиал һәлли (вә ја сүкут нөгтәси) асимптотик дајаныглыдыр: (7) һәлли $x \to \infty$ шәртиндә $y = 0$, $z = 0$ һәллинә јахынлашыр. Системин трајекторијалары исә сүкут нөгтәси әтрафында 251-чи шәкилдә көстәрилдији кими јерләшир. Трајекторија үзәриндә x-ин артмасына ујғун олан һәрәкәтин истигамәти ох ишарәси илә көстәрилир. Бу һалда сүкут нөгтәсинә (вә ја (0, 0) нөгтәсинә) *дајаныглы дүјүн нөгтәси* дејилир.



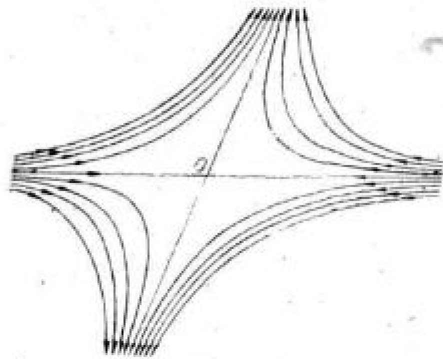
Шәкил 251



Шәкил 252

б) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Бу һалда (2) системинин $y = 0$, $z = 0$ тривиал һәлли дајанығсыздыр, трајекторијалар сүкут нөгтәси әтрафында әввәлки һалда көстәрилдији кими јерләшир (шәкил 252), лакин трајекторија үзрә һәрәкәтин истигамәти әввәлкинин әксинә олур: x артдыгда трајекторијалар сүкут нөгтәсиндән узаглашыр.

x дәјишәнини $-x$ илә әвәз етдикдә бу һал әввәлки а) һалына кечир. Белә вәзијјәт олдугда, сүкут нөгтәсинә *дајанығсыз дүјүн нөгтәси* дејилир.



Шәкил 253

в) $\lambda_1>0$ вә $\lambda_2<0$ (вә ја $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$) олдугда сүкут нөгтәси дајаныгсыздыр. Бу һалда $x\to+\infty$ вә ја $x\to-\infty$ шәртиндә трајекторијалар ($C_1\neq0$, $C_2\neq0$) сүкут нөгтәсиндән узаглашыр. Трајекторијалар үзәриндә x-ин дәјишмәсинә ујғун олан һәрәкәтләрин истигамәти 253-чү шәкилдә көстәрилмишдир. Бу һалда сүкут нөгтәсинә *јәһәрвары нөгтә* дејилир.

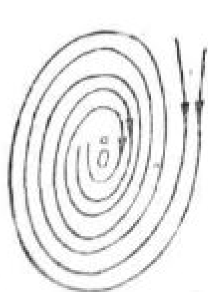
II һал. *Характеристик тәнлијин* $\lambda_1=p+qi$ вә $\lambda_2=p-qi$ $(q\neq0)$ *кими гошма комплекс көкләри вардыр.* Бу һалда (2) системинин үмуми һәлли

$$\begin{cases} y=e^{px}(C_1\alpha_1^{(1)}\cos qx+C_2\alpha_2^{(1)}\sin qx), \\ z=e^{px}(C_1\alpha_1^{(2)}\cos qx+C_2\alpha_2^{(2)}\sin qx) \end{cases} \quad (8)$$

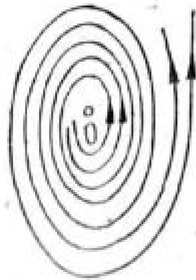
шәклиндә олар.

Бурада ашағыдакы һаллар мүмкүндүр:

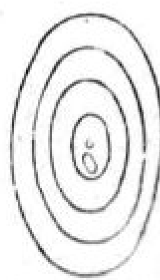
а) $p<0$, $(q\neq0)$. Онда $x\to\infty$ шәртиндә (8) бәрабәрликләриндәки биринчи e^{px} вуруғу сыфра јахынлашыр, икинчи вуруглар исә мәһдуд олур. Буна көрә дә трајекторија үзәриндәки нөгтәләр $x\to\infty$ шәртиндә спирал үзрә координат башланғычына, јә'ни $y=0$, $z=0$ сүкут нөгтәсинә јахынлашыр (шәкил 254). Демәли, (2) системинин $y=0$, $z=0$ тривиал һәлли асимптотик дајаныглыдыр. Бу һалда сүкут нөгтәсинә *дајаныглы фокус нөгтәси* дејилир.



Шәкил 254



Шәкил 255



Шәкил 256

Дајаныглы фокус нөгтәсинин дајаныглы дүјүн нөгтәсиндән фәрги вардыр. Сүкут нөгтәси дајаныглы фокус олдугда, трајекторијалара чәкилән тохунанлар, тохунма нөгтәләри сүкут нөгтәсинә јахынлашдыгда һеч бир лимитә јахынлашмыр.

б) $p>0$ $(q\neq0)$. Бу һал x дәјишәнини $-x$ илә әвәз етдикдә а) һалына кечир. Буна көрә дә бу һалда да трајекторијалар 254-чү шәкилдә көстәрилдији кими олур, лакин трајекторија үзрә һәрәкәтин истигамәти тәрсинә олур; $x\to\infty$ шәртиндә $e^{px}\to\infty$ олдуғундан, x артдыгча трајекторијалар сүкут нөгтәсиндән узаглашыр (шәкил 255). Бу һалда сүкут нөгтәсинә *дајанығсыз фокус нөгтәси* дејилир.

в) $p=0$, јә'ни $\lambda_{1,2}=\pm qi$. Бу һалда системин һәлли олан (8) функсијалары периодик олдуғундан трајекторијалар сүкут нөгтәсини өз дахилинә алан гапалы хәтләр олар (шәкил 256). Белә хәттә *гапалы трајекторија* вә ја *тсикл* дејилир.

Бу һалда $y=0$, $z=0$ тривиал һәлли дајаныглыдыр, $y(x_0)=y_0$ вә $z(x_0)=z_0$ башланғыч гијмәтләри $y=0$, $z=0$ нөгтәсинә кифајәт гәдәр јахын олдугда x-ин истәнилән гијмәтләриндә трајекторијалар сүкут нөгтәсинин (координат башланғычынын) кичик әтрафында јерләшир. Лакин $x\to\infty$ шәртиндә трајекторијанын нөгтәләри координат башланғычына јахынлашмыр. Демәли, $y=0$, $z=0$ тривиал һәлли асимптотик дајаныглы дејилдир. Бу һалда сүкут нөгтәсинә *мәркәз* дејилир.

III һал. *Характеристик тәнлијин көкләри тәкрарланандыр.* $\lambda_1=\lambda_2$. Бу һалда (2) системинин үмуми һәлли

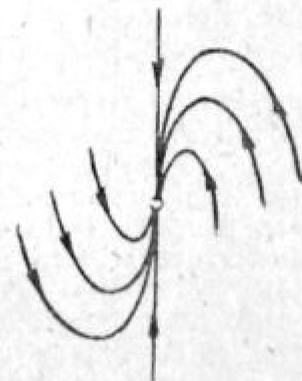
$$\begin{cases} y=(C_1\alpha_1^{(1)}+C_2\alpha_2^{(1)}x)e^{\lambda_1 x}, \\ z=(C_1\alpha_1^{(2)}+C_2\alpha_2^{(2)}x)e^{\lambda_1 x} \end{cases} \quad (9)$$

шәклиндә олур.

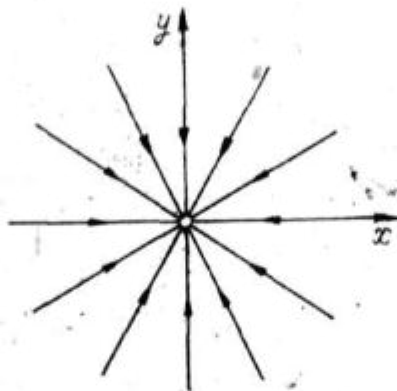
Бурада ики һал ола биләр:

а) $\lambda_1=\lambda_2<0$. Бу һалда $xe^{\lambda_1 x}\to0$ $(x\to\infty)$ олдуғундан $x\to\infty$ шәртиндә (9) функсијалары сыфра јахынлашыр. Буна көрә дә $y=0$, $z=0$ тривиал һәлли дајаныглыдыр. Јенә дә сүкут нөгтәсинә дајаныглы дүјүн нөгтәси дејилир (шәкил 257 вә 258).

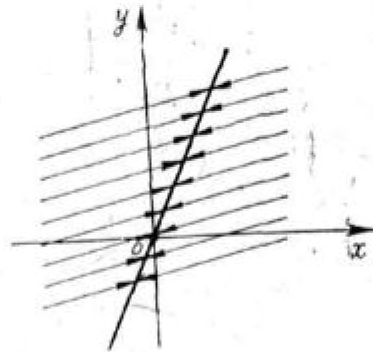
б) $\lambda_1=\lambda_2>0$. Бу һалда трајекторијалар әввәлки а) һалында олдуғу шәкилдә јерләшир, лакин трајекторија үзрә һәрәкәтин истигамәти тәрсинә олур: x артдыгча трајекторијалар сүкут нөгтәсиндән узаглашыр. Буна көрә дә системин $y=0$, $z=0$ тривиал һәлли дајаныгсыздыр вә сүкут нөгтәси *дајанығсыз дүјүн нөгтәси* адланыр.



Шәкил 257



Шәкил 258



Шәкил 259

Беләликлә, (2) системи трајекторијаларынын сүкут нөгтәси әтрафында нечә јерләшмәси (3) шәрти өдәнилән бүтүн һалларда тәдгиг олунду. (3) шәрти өдәнилмәдикдә, јә'ни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

олдугда (4) (вә ја (5)) характеристик тәнлијинин сыфыр көкү олар. Тутаг ки, (4) тәнлијинин бир көкү сыфра бәрабәрдир: $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq 0$. Онда (2) системинин үмуми һәлли

$$\begin{cases} y = C_1\alpha_1^{(1)} + C_2\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_2 x}, \\ z = C_1\alpha_1^{(2)} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 x} \end{cases}$$

шәклиндә олар.

Бурадан, x дәјишәнини јох етдикдә,

$$(z - C_1\alpha_1^{(2)})\,\alpha_2^{(1)} = (y - C_1\alpha_1^{(1)})\,\alpha_2^{(2)}$$

кими паралел дүз хәтләр аиләси алыныр. $C_2=0$ олдугда $\alpha_1^{(2)}y = \alpha_1^{(1)}z$ дүз хәтти үзәриндә јерләшән бирпараметрли $y=C_1\alpha_1^{(1)}$, $z=C_1\alpha_1^{(2)}$ сүкут нөгтәләри чохлуғу алыныр. Әкәр $\lambda_2<0$ олса, онда $x\to\infty$ шәртиндә трајекторијалар үзәриндәки нөгтәләр һәмин трајекторија үзәриндә јерләшән $y=C_1\alpha_1^{(1)}$, $z=C_1\alpha_1^{(2)}$ сүкут нөгтәсинә јахынлашар (шәкил 259). Бу һалда $y=0$, $z=0$ һәлли дајаныглыдыр, лакин асимптотик дајаныглы дејилдир.

$\lambda_2>0$ олдугда трајекторијалар јенә дә 259-чу шәкилдә көстәрилдији кими јерләшир, лакин трајекторија үзрә һәрәкәтин истигамәти тәрсинә олур. Бу һалда $y=0$, $z=0$ тривиал һәлли дајаныгсыздыр.

(4) характеристик тәнлијинин көкләринин икиси дә сыфыр $\lambda_1=\lambda_2=0$ олдугда $y=0$, $z=0$ тривиал һәллинин дајаныглығы ејни гајда илә тәдгиг олунур.

§ 4. ЛЈАПУНОВ ТЕОРЕМИ

Диференсиал тәнликләр системи һәллинин дајаныглығыны тәдгиг етмәк үчүн үмуми методу мәшһур рус ријазијјатчысы А. М. Лјапунов[1] вермишдир. Бу метод Лјапунов функсијалары адланан вә мүәјјән шәртләри өдәјән функсијаларын сечилмәсинә әсасланыр.

Лјапунов методу васитәсилә

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

шәклиндә диференсиал тәнликләр системинин $y_k = 0$ ($k=1, 2, \ldots, n$) тривиал һәллинин дајаныглығыны тәдгиг етмәклә кифајәтләнмәк олур (чүнки системин истәнилән һәллинин дајаныглығы мәсәләсини онун тривиал һәллинин дајаныглығы мәсәләсинә кәтирмәк олур, § 1). Бу мәгсәдлә, гәбул едәк ки, (1) системинин сүкут нөгтәси координат башланғычында јерләшир, јә'ни $y_1=0$, $y_2=0, \ldots, y_n=0$ һәмин системин һәллидир.

Фәрз едәк ки, $J=(x_0\leqslant x<+\infty)$ вә D илә $y_1, y_2, \ldots, y_n$ дәјишәнләри фәзасынын координат башланғычыны өз дахилинә алан мәһдуд областы ишарә олунмушдур.

Теорем. ***Тутаг ки, D областында диференсиалланан $V(Y) = V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ функсијасы үчүн ашағыдакы шәртләр өдәнилир:***

1) D областында $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)\geqslant 0$ олур вә јалныз $y_k=0$ ($k=1, 2, \ldots, n$) нөгтәсиндә $V(0, 0, \ldots, 0)=0$ мүнасибәти өдәнилир, јә'ни $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ функсијасы координат башланғычында чидди минимум гијмәт алыр.

2) $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ функсијасынын (1) системинин истәнилән интеграл әјриси үзрә төрәмәси бүтүн $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\in G=J\times\sigma$ нөгтәләриндә

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k} f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqslant 0$$

мүнасибәтини өдәјир. Онда (1) системинин $y_1=0$, $y_2=0, \ldots, y_n=0$ тривиал һәлли дајаныглыдыр.

Теоремдә көстәрилән шәртләри өдәјән $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ функсијасына Лјапунов функсијасы дејилир.

$V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ функсијасынын 2-чи шәртдә көстәрилән төрәмәсини һесабладыгда y_k ($k=1, 2, \ldots, n$) дәјишәнләри (1) системинин $y_k=y_k(x)$ ($k=1, 2, \ldots, n$) һәлли илә әвәз

[1] Александр Михајлович Лјапунов (1857—1918) мәшһур рус ријазијјатчысыдыр.

едилмәлидир. Бу һалда $\frac{dV}{dx} = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_\kappa} \cdot \frac{dy_\kappa}{dx}$ вә $\frac{dy_\kappa}{dx}$ әвәзинә (1) ифадәләрини јаздыгда

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_\kappa} \cdot f_\kappa (x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

алыныр.

Исбаты. $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ функсијасы $0(0, 0, \ldots, 0)$ координат башланғычында чидди минимум гијмәт аллығы үчүн $V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = C$ сәвијјә сәтһләри координат башланғычыны өз дахилинә алан гапалы сәһләр олар (XXVI, § 1). Буна көрә дә, $\varepsilon > 0$ әдәди верилдикдә, C-нин кифајәт гәдәр кичик гијмәтләриндә $V = C > 0$ сәвијјә сәтһләринин һеч олмаса бир гапалы компоненти координат башланғычынын һәмин ε—әтрафында јерләшир вә координат башланғычындан кечмир. Инди $\delta > 0$ әдәдини елә сечәк ки, координат башланғычынын δ—әтрафы $V = C$ сәтһинин дахилиндә јерләшсин вә һәмин әтрафда $V < C$ мүнасибәти өдәнилсин.

Әкәр $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ башланғыч нөгтәси $(y_\kappa(x_0) = y_\kappa^0, \kappa = 1, 2, \ldots, n)$ координат башланғычынын һәмин δ- әтрафында јерләшәрсә, јә'ни $V(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) < C$ оларса, онда (1) системинин бу башланғыч шәртләр илә тә'јин олунан һәллинин графики (трајекторијасы) x-ин $x > x_0$ гијмәтләриндә координат башланғычынын ε-әтрафында јерләшәр. Доғрудан да, теоремин 2-чи шәртинә көрә V функсијасы интеграл әјриси үзрә артмајандыр. Буна көрә дә x-ин $x \geqslant x_0$ гијмәтләриндә
$V[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] \leqslant V[y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)] < C$ олар. Бурадан (1) системинин $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ тривиал һәллинин дајаныглығы ајдындыр.

Теоремин исбатындан ајдындыр ки, V функсијасынын интеграл әјриси үзрә артмајан олмасындан системин $y_\kappa = 0$ ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$) һәллинин дајаныглығы алыныр, асимптотик дајаныглығы исә алынмыр. Доғрудан да, x артдыгда интеграл әјриси координат башланғычына дејил, башга бир сәвијјә сәтһинә дә јахынлаша биләр.

Системин $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ һәллинин асимптотик дајаныглы олмасы үчүн теоремин шәртләриндән әлавә, x-ә нәзәрән мүнтәзәм олараг вә јалныз $y_1 \to 0, y_2 \to 0, \ldots, y_n \to 0$ шәртиндә $\frac{dV}{dx} \to 0$ мүнасибәти өдәнилмәлидир.

Гејд едәк ки, (1) системи һәллинин дајаныглығы вә асимптотик дајаныглығы һаггында А. М. Љапуновун даһа үмуми нәтичәләри вардыр.

Мисал.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - y^3 \\ \frac{dz}{dx} = -y - z^3 \end{cases} \qquad (2)$$

системинин $y = 0$, $z = 0$ һәллинин дајаныглығыны тәдгиг етмәли.

Верилмиш систем үчүн $V = y^2 + z^2$ функсијасы теоремин шәртләрини өдәјир, јә'ни Љапунов функсијасыдыр:

1. Бу функсија үчүн $V = y^2 + z^2 \geqslant 0$ мүнасибәти өдәнилир вә $O_1(0, 0)$ нөгтәсиндә минимум гијмәт алыр.

2. $\frac{dV}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 2y(z - y^3) + 2z(-y - z^3) =$
$= -2y^4 - 2z^4 = -2(y^4 + z^4) \leqslant 0.$

Бурадан ајдындыр ки, (2) системинин $y = 0$, $z = 0$ һәлли дајаныглыдыр.

$\frac{dV}{dx} = -2(y^4 + z^4) \to 0$ мүнасибәтинин анчаг $y \to 0$, $z \to 0$ шәртиндә өдәнилмәсиндән (2) системинин тривиал һәллинин ејни заманда асимптотик дајаныглы олмасы алыныр.

XXXIV ФӘСИЛ

ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН ӘДӘДИ ВӘ ТӘГРИБИ ҺӘЛЛИ

§ 1. МӘСӘЛӘНИН ГОЈУЛУШУ

Тутаг ки, ади диференсиал тәнлик вә ја онларын мүәјјән системи үчүн Коши мәсәләси (башланғыч шәртләрин верилмәси илә гојулан мәсәлә) гојулмушдур (XXX, § 3; XXXI, § 1; XXXII, § 1). Мә'лумдур ки, мүәјјән шәртләр (һәллин варлығы вә јеканәлији теореминин шәртләри) өдәнилдикдә гојулмуш Коши мәсәләсинин јеканә һәлли вардыр. Бу һәллин тапылмасы методларыны шәрти олараг үч нөвә бөлмәк олар.

Биринчиси, диференсиал тәнлик һәлләринин дәгиг тапылмасы методларыдыр. Бу методларла диференсиал тәнликләрин (вә ја онларын мүәјјән системинин) һәлли елементар функсијалар вә ја онларын интеграллары (квадратуралар) васитәсилә дәгиг тапылыр. Тапылмыш дәгиг һәлләр үзәриндә мүәјјән әмәлләри апармаг вә һәллин кејфијјәт мәсәләләри һаггында нәтичәләр алмаг мүмкүн олур.

Үмумијјәтлә, чох аз нөв диференсиал тәнликләрин һәллинин дәгиг тапылмасы методлары мә'лумдур вә онлар XXX—XXXII фәсилләрдә көстәрилмишдир.

Лакин дәгиг һәллинин тапылмасы методлары мә'лум олмајан бир чох диференсиал тәнликләрин һәллини тәгриби вә ја әдәди олараг тапмаг лазым кәлир.

Бир чох һалларда диференсиал тәнликләрин $y(x)$ һәлли елементар функсијалар вә ја онларын интегралы васитәсилә ифадә олунан мүәјјән $\{y_n(x)\}$ ардычыллығынын лимити шәклиндә тапылыр. Буна диференсиал тәнлик һәллини тапмағын *тәгриби методу* дејилир. Кифајәт гәдәр бөјүк n әдәдләри үчүн $y_n(x)$ функсијасы һәллин тәгриби гијмәтләри олур: $y(x) \approx y_n(x)$. Һәллин тәгриби тапылмасы методларынын бир нечәси бу фәсилдә көстәрилир.

Тәнлијин һәллини тапмағын үчүнчү нөв методлары *әдәди* методлардыр. Бу һалда тәнлијин ахтарылан $y(x)$ һәллинин, аргументин сечилмиш x_n гијмәтләриндә дәгиг вә ја тәгриби гијмәтләрини һесабламағын алгоритми көстәрилир. Әдәди методла тәнлијин һәлли чәдвәл шәклиндә тапылыр.

Әдәди методлар даһа кениш тәнликләр синфинә тәтбиг олунур. Бу методлар мүасир ријази һесаблама машынларыны диференсиал тәнликләрин һәллинә тәтбиг етмәјә имкан верир. Буна көрә дә мүхтәлиф практики мәсәләләрин һәллинә диференсиал тәнликләрин тәтбиг едилмәсиндә әдәди методларын әһәмијјәти бөјүкдүр.

Бурада биртәртибли диференсиал тәнликләр үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин бир нечә сәдә һәлли үсуллары шәрһ олунур.

§ 2. ПИКАРЫН ИТЕРАСИЈА МЕТОДУ

Тутаг ки, биртәртибли

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{1}$$

тәнлијинин

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

башланғыч шәртини өдәјән һәлли ахтарылыр.

Бу мәсәлә

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt, \quad x_0 \leqslant x \leqslant b \tag{3}$$

интеграл тәнлијинин һәллинә еквивалентдир (XXX, § 3). (3) тәнлијинин һәлли үчүн ардычыл јахынлашма үсулуну тәтбиг етдикдә Пикарын[1]

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt, \quad y_0(x) = y_0 \tag{4}$$

итерасија просеси алынып (XXX, § 3).

Тапдығымыз $y_n(x)$ функсијасы (1) тәнлијинин ахтардығымыз һәллинин тәгриби гијмәтидир. Буна инанмаг үчүн (4) просесинин јығылмасыны тәдгиг едәк. Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы (Oxy) мүстәвисинин мәһдуд σ областында кәсилмәјәндир вә y дәјишәнинә көрә Липшис шәртини өдәјир:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant M|y_2 - y_1| \tag{5}$$

(4) вә (3) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә чыхсаг вә (5) бәрабәрсизлијиндән истифадә етсәк,

$$|y_n(x) - y(x)| \leqslant M\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(t) - y(t)|\,dt \tag{6}$$

мүнасибәти алынар. σ областы мәһдуд олдуғундан елә сонлу p вә q әдәдләри вар ки,

$$|x - x_0| \leqslant p \quad \text{вә} \quad |y - y_0| \leqslant q$$

бәрабәрсизликләри өдәнилир. Бу бәрабәрсизликләри вә (5) мүнасибәтини тәтбиг етмәклә (6) бәрабәрсизлијиндән ардычыл олараг ашағыдакы бәрабәрсизликләр алыныр:

$$|y(x) - y_0| \leqslant q, \; |y_1(x) - y(x)| \leqslant Mq(x - x_0),$$

$$|y_2(x) - y(x)| \leqslant \frac{1}{2} qM^2 (x - x_0)^2, \ldots,$$

$$|y_n(x) - y(x)| \leqslant \frac{1}{n!} qM^n (x - x_0)^n, \ldots.$$

Инди тәгриби һәллин хәтасыны гијмәтләндирәк:

$$|y_n(x) - y(x)| \leqslant \frac{q}{n!}(pM)^n \approx \frac{q}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{ePM}{n}\right)^n. \tag{7}$$

Бурадан алыныр ки, $n \to \infty$ шәртиндә

$$\max|y_n(x) - y(x)| \to 0$$

олур, јә ни $y_n(x)$ тәгриби һәлләр ардычыллығы σ областында (1) тәнлијинин дәгиг $y(x)$ һәллинә мүнтәзәм јығылыр. Демәли, n-ин кифајәт гәдәр бөјүк гијмәтләриндә $y_n(x) \approx y(x)$ тәгриби бәрабәрлијинин хәтасы чох кичикдир.

Пикарын итерасија методу диференсиал тәнликләрин һәлли үчүн тәгриби методдур. Апардығымыз мүһакимәдән ајдындыр ки, бу метод васитәсилә гојулмуш Коши мәсәләсинин тәгриби һәлли үчүн аналитик ифадә алыныр.

Мисал 1. $y' = 2xy$ *тәнлијинин* $y|_{x=0} = 1$ *башланғыч шәртини* өдәјән һәллинин тәгриби гијмәтини тапмалы.

Тәнлијин сыфырынчы јахынлашмасы олараг $y_0(x) = y_0 = 1$ гәбул етсәк, онда ардычыл олараг аларыг:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2t\,dt = 1 + x^2,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 2t(1 + t^2)\,dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2};$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x 2t\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right)dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6},$$

[1] Пикар Шарл Емил (1856—1941) мәшһур франсыз ријазијјатчысыдыр.

. . . .

$$y_n(x)=1+\int_0^x 2t\, y_{n-1}(t)\,dt = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!},$$

. . . .

Верилмиш тәнлијин $y|_{x=0}=1$ башланғыч шәртини өдәјән һәллинин тәгриби гијмәти олараг

$$y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}$$

ифадәсини көтүрмәк олар: $y(x)\approx y_n(x)$.

Гејд едәк ки, истәнилән мәһдуд областда $\{y_n(x)\}$ ардычыллығы јығылыр вә онун лимити тәнлијин дәгиг $y(x)=e^{x^2}$ һәллинә бәрабәрдир (XVI, § 6):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}\right)=e^{x^2}.$$

Мисал 2. $y'=x^2+y^2$ тәнлијинин $y(0)=0$ башланғыч шәртини өдәјән һәллинин тәгриби гијмәтини тапмалы.

Бу һалда

$$y_0(x)=y_0=0,$$

$$y_1(x)=0+\int_0^x t^2\,dt=\frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x)=\int_0^x\left(t^2+\frac{t^6}{9}\right)dt=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2}{2079}x^{11}+\frac{1}{59535}x^{15},$$

. . . .

олар. Алынан итерасијалар ардычыллығы x-ин $|x|\leqslant 1$ гијмәтләриндә јығылыр. Буна көрә дә, тәләб олунан дәгиглији нәзәрә алараг, һәллин тәгриби гијмәти олараг бу функсијаларын һәр бирини көтүрмәк олар.

Гејд. 1-чи мисалда верилән Коши мәсәләсинин һәлли елементар функсијаларла дәгиг ифадә олунур ($y=e^{x^2}$). 2-чи мисалда верилән тәнлик исә мә'лум Риккати тәнлијинин хүсуси һалыдыр вә онун һәлли елементар функсијаларла ифадә олунмур. Бунунла белә, Пикарын итерасија методу һәр ики тәнлијин һәллинә тәтбиг олунур.

§ 3. ЕЈЛЕР МЕТОДУ

Диференсиал тәнликләрин интегралланмасы үчүн бу әдәди методу XVIII әсрдә Л. Ејлер[1] тәклиф етмишдир. Ејлер методу ајанидир, чох садә һәндәси мә'насы вардыр, лакин практики

[1] Леонард Ејлер (1707–1783) мәшһур Исвечрә ријазијјатчысы, физики, механики вә астрономудур. Узун илләр Русијада јашамышдыр.

ҹәһәтдән әлверишли дејилдир. Бу методла алынан тәгриби һәллин дәгиглији чох јүксәк олмур. Бунунла белә, Ејлер методу илә даһа јүксәк дәгиглији олан вә мүасир һесаблама машынларында истифадә олунан мүнасиб һесаблама схемләри гурмаг мүмкүндүр.

Тутаг ки, биртәртибли диференсиал тәнлик үчүн

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

Коши мәсәләсини $[x_0, b]$ парчасында һәлл етмәк лазымдыр. Бу мәгсәдлә һәмин парчаны

$$x_0,\ x_1=x_0+h,\ \ x_2=x_0+2h,\ \ldots,\ x_{n-1}=x_0+(n-1)h,$$
$$x_n=x_0+nh=b$$

нөгтәләри илә n бәрабәр һиссәјә $\left(h=\frac{b-x_0}{n}\right)$ бөләк вә $y_k=y(x_k)$ $(k=0,1,\ldots,n)$, $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$ ишарәләрини гәбул едәк.

Ејлер методунун әсас принсипи верилмиш диференсиал тәнликдә төрәмәни артымлар нисбәти илә әвәз етмәкдир:

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x}=f(x_k,y_k),\qquad \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}=f(x_k,y_k).$$

Бурадан

$$y_{k+1}=y_k+f(x_k,y_k)\,h \tag{2}$$

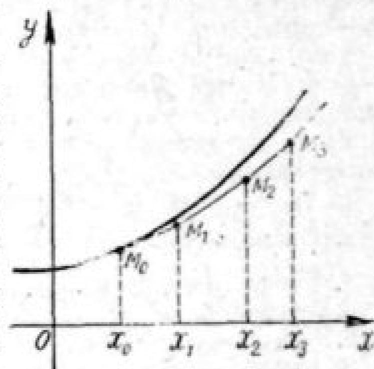
дүстуру алыныр. Бу дүстур васитәсилә һәллин x_k нөгтәләриндә тәгриби

$$y_1=y_0+f(x_0,y_0)\,h,\quad y_2=y_1+f(x_1,y_1)\,h,\ \ldots$$

гијмәтләри һесабланыр.

(2) схемини програмлашдырмаг вә һесабламаны мүасир електрон һесаблама машынында апармаг олар. Һесабламанын h аддымыны кичилтмәклә дәгиглији јүксәлтмәк мүмкүндүр.

Ејлер методунун һәндәси мә'насы беләдир: (1) Коши мәсәләсинин верилмиш M_0 (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси әвәзинә һәмин нөгтәдә әјријә тохунанын M_0M_1 парчасы көтүрүлүр (шәкил 260). M_0M_1 парчасы мејданын $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндәки истигамәти үзрә јөнәлдилмишдир. Мејданын M_1 (x_1, y_1) нөгтәсиндәки истигамәти үзрә һәмин гајда илә M_1M_2 парчасы чәкилир вә с. Беләликлә, Коши мәсәләсинин



Шәкил 260

M_0 (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси әвәзинә кәсҭәрилән гајда илә гурулмуш $M_0M_1M_2\ldots$ сыныг хәтти көтү-

рүлүр. Белә гурулмуш сыныг хәтләр *Ејлер сыныг хәтләри* адланыр.

Ејлер сыныг хәтләри ујғун интеграл әјриләрини тәгриби олараг ифадә едир. (1) Коши мәсәләси һәллинин гијмәтләри Ејлер сыныг хәттинин тәпәләриндә Ејлер методу илә тәгриби олараг һесабланыр. h аддымы кичилдикчә бу тәгриби гијмәтләрин дәгиглији артыр.

Тутаг ки, (1) Коши мәсәләсинин $[x_0, b]$ парчасында тә'јин олунмуш һәлли вар вә $y=\varphi(x)$-дир. Һәмин мәсәләнин h аддымы васитәсилә гурулмуш Ејлер сыныг хәттинә ујғун тәгриби (әдәди) һәлли $y=\varphi_h(x)$ олсун. Онда $[x_0, b]$ парчасынын һәр бир нөгтәсиндә $\varphi_h(x)\approx\varphi(x)$ вә $\lim_{h\to 0}|\varphi_h(x)-\varphi(x)|=0$ олур. Бунунла белә, $\varphi_h(x)\approx\varphi(x)$ тәгриби бәрабәрлији хәтасынын тәртибини гијмәтләндирмәк олар. (2) бәрабәрлијинин сағ тәрәфи (1) мәсәләсинин $y(x)$ һәллинин Тејлор дүстуруна

$$y(x_k+h)=y(x_k)+\frac{y'(x_k)}{1!}h+\frac{y''(x_k)}{2!}h^2+\dots$$

вә ја

$$y_{k+1}=y_k+y'(x_k)h+\frac{y''(x_k)}{2!}h^2+\dots \qquad (3)$$

ајрылышынын биринчи ики һәддинин цәмидир. Буна көрә дә $[x_k, x_{k+1}]$ парчасында тәгриби бәрабәрлијин хәтасы h^2 тәртибдән (XVI, §§ 5—6), n һиссәјә бөлүнмүш бүтүн $[x_0, b]$ парчасында исә $nh^2=\frac{(b-x_0)^2}{n}$ тәртибдән олар. Бу көстәрир ки, $\varphi_h(x)\approx\varphi(x)$ тәгриби бәрабәрлијинин дәгиглијини 10 дәфә артырмаг үчүн $[x_0, b]$ парчасыны кичик һиссәләрә бөлән нөгтәләрин сајыны 10 дәфә артырмаг (h аддымыны 10 дәфә азалтмаг) лазымдыр.

Гејд едәк ки, h аддымы азалдыгда Ејлер методунун $|\varphi_h(x)-\varphi(x)|$ хәтасы хәтти олараг азалдығындан Ејлер методуна *биртәртибли дәгиглији олан схем* дејилир.

Ејлер методу илә ЕРҺМ-да диференсиал тәнлик һәлл етдикдә ашағыдакы алгоритмдән истифадә олунур:

1. y_0, x_0, b вә n әдәдләрини јаддаша дахил етмәли.
2. Һесабламалы: $h=\frac{b-x_0}{n}$.
3. Гәбул етмәли: $x_k=x_0$, $y_k=y_0$.
4. Һесабламалы: $y_{k+1}=y_k+f(x_k, y_k)\cdot h$.
5. Чап етмәли: x_k, y_k.
6. Һесабламалы: $x_{k+1}=x_k+h$.
7. Гәбул етмәли: $x_k=x_{k+1}$, $y_k=y_{k+1}$.
8. Јохламалы: $x_k\leqslant b$ оларса, 4-чү аддыма кечмәли, әкс һалда исә 9-чу аддыма кечмәли.
9. Сон.

§ 4. РУНГЕ-КУТТА МЕТОДУ

Бу метод васитәсилә мүхтәлиф тәртибдән дәгиглији олан тәгриби һесаблама схемләри гурулур. Мәсәлән, әввәлки параграфда өјрәндијимиз Ејлерин сыныг хәтләр схеми биртәртибли дәгиглији олан Рунге[1]-Кутта схемидир. Рунге-Кутта схемләри мүасир Електрон һесаблама машынларында һесаблама апармаг үчүн чох јарарлы олдуғундан, онлардан мүхтәлиф практики мәсәләләрин һәллиндә даһа чох истифадә олунур. Мүхтәлиф Рунге-Кутта схемләри вардыр.

Инди икитәртибли дәгиглији олан һесаблама схеминин гурулма үсулуну шәрһ едәк. Тутаг ки, јенә дә

$$y'=f(x, y) \qquad (1)$$

тәнлијинин $[x_0, b]$ парчасында $y(x_0)=y_0$ башланғыч шәртини өдәјән һәллини тапмаг лазымдыр. Һәллин x_k $(k=1, 2, \dots, n)$ нөгтәләриндәки y_k $(k=1, 2, \dots, n)$ гијмәтләрини

$$y_{k+1}=y_k+hf\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{hf_k}{2}\right) \qquad (2)$$

дүстуру илә һесаблајаг. Бурада

$$h=\frac{b-x_0}{n},\ x_{k+1}=x_k+h,\ f_{k+1}=f(x_{k+1}, y_{k+1}),$$

$$k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

(2) схеми хәтасынын тәртибини гијмәтләндирмәк олар. Доғрудан да,

$$y'(x_k)=y'_k=f(x_k, y_k)=f_k,\quad y''_k=f'_x(x_k, y_k)+f'_y(x_k, y_k)\,y'_k$$

вә Тејлор дүстуруна көрә (XVI, §§ 5—6)

$$f\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{hf_k}{2}\right)=f(x_k, y_k)+f'_x(x_k, y_k)\frac{h}{2}+f'_y(x_k, y_k)\frac{hf_k}{2}+o(h^2) \qquad (3)$$

олдуғундан

$$y_{k+1}=y_k+hf\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{hf_k}{2}\right)=y_k+f(x_k, y_k)h+f'_x(x_k, y_k)\frac{h^2}{2}+f'_y(x_k, y_k)f_k\frac{h^2}{2}+o(h^3)=y_k+y'_kh+\frac{y''_k}{2}h^2+o(h^3)$$

вә ја

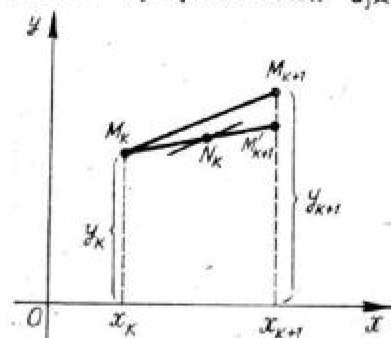
$$y_{k+1}=y_k+y'_kh+\frac{y''_k}{2}h^2+o(h^3) \qquad (4)$$

[1] Карл Рунге (1856—1927) алман ријазијјатчысы вә физикидир.

аларыг. Лакин (1) тәнлијинин һәлли олан $y(x)$ функсијасынын $y(x_к) = y_к$ шәртиндә $x_{к+1} = x_к + h$ нөгтәсиндә дәгиг гијмәти

$$y(x_к + h) = y_к + y'_к h + \frac{y''_к}{2} h^2 + o(h^3) \qquad (5)$$

дүстуру илә һесабланыр (XVI, § 5). (4) вә (5) бәрабәрликләринин мүгајисәсиндән ајдындыр ки, $y_{к+1}$ кәмијјәти һәллин $y(x_к + h) = y(x_{к+1})$ гијмәтиндән тәртиби h^3-дан кичик олмајан кәмијјәтлә фәргләнир. Онда n һиссәјә бөлүнмүш бүтүн $[x_0, b]$ парчасында (2) схеминин хәтасы $nh^3 = \frac{(b-x_0)^3}{n^2} = o(h^2)$ тәртибли, јә'ни икитәртибли олар (бурада әввәлки параграфын сонундакы кими мүһакимә апарылыр). Бурадан көрүнүр ки, $[x_0, b]$ парчасыны кичик һиссәләрә бөлән нөгтәләрин сајыны 10 дәфә артырдыгда (2) схеминин дәгиглији 100 дәфә артыр.



Шәкил 261

Икитәртибли дәгиглији олан Рунге-Кутта схеминин һәндәси мә'насы 261-чи шәкилдә көстәрилмишдир: әввәлчә $M_к(x_к, y_к)$ нөгтәсиндә мејданын $f_к = f(x_к, y_к)$ истигамәтиндә $M_к M'_{к+1}$ дүз хәтт парчасы чәкилир. Бу парчанын $N_к\left(x_к + \frac{h}{2}, y_к + \frac{hf_к}{2}\right)$ орта нөгтәсиндә мејданын $\gamma_к = f\left(x_к + \frac{h}{2}, y_к + \frac{hf_к}{2}\right)$ истигамәти тә'јин олунур. Сонра исә һәмин бу $\gamma_к$ истигамәтиндә $M_к M_{к+1}$ парчасы чәкилир. Беләликлә, (1) тәнлијинин $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини апроксимасија едән сыныг хәтт һиссәләринин истигамәти $[x_к, x_{к+1}]$ парчаларынын һәр бириндә дәгигләшдирилир. Буна көрә дә Рунге-Куттанын һесаблама схеми Ејлерин сыныг хәтләр методундан (§ 3) дәгиг олур.

Рунге-Куттанын үчтәртибли, дөрдтәртибли, бештәртибли вә с. схеми дәгиглији олан схемләри дә вардыр. Бу схемләрин ән чох ишләдиләни, Електрон һесаблама машынларынын стандарт програм шәклиндә јазыланы дөрдтәртибли дәгиглији олан ашағыдакы схемдир:

$$y_{к+1} = y_к + \frac{h}{6}(\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 + \gamma_4),$$

$$\gamma_1 = f(x_к, y_к), \quad \gamma_2 = f\left(x_к + \frac{h}{2}, \ y_к + \frac{h}{2}\gamma_1\right),$$

$$\gamma_3 = f\left(x_к + \frac{h}{2}, \ y_к + \frac{h}{2}\gamma_2\right), \qquad (6)$$

$$\gamma_4 = f(x_к + h, \ y_к + h\gamma_3).$$

Дедикләримиздән ајдындыр ки, бүтүн Рунге-Кутта схемләринин јүксәк тәртибли дәгиглији вардыр (сыныг хәтләр схеми мүстәсна олмагла). Бу схемләрин һәр бириндә һәллин $y_к$ гијмәти өзүндән әввәлки гијмәтләр үзәриндә мүәјјән сајда ардычыл әмәлијјатлар апармагла тапылыр. Бүтүн $y_к$ ($к = 1, 2, \ldots, n$) гијмәтләри ејни дүстурла һесабланыр вә апарылан әмәлијјатлар бу дүстурдан ајдын көрүнүр.

Рунге-Кутта методу илә ЕРҺМ-ла диференсиал тәнлији һәлл етмәк үчүн ашағыдакы алгоритмдән истифадә едилир:

1. Дахил етмәли: x_0, b, y_0, n.
2. Һесабламалы: $h = \frac{b - x_0}{n}$.
3. Гәбул етмәли: $y_к = y_0, x_к = x_0$.
4. Һесабламалы: $\gamma_1 = f(x_к, y_к)$.
5. Һесабламалы: $\gamma_2 = f\left(x_к + \frac{h}{2}, \ y_к + \frac{h}{2}\gamma_1\right)$.
6. Һесабламалы: $\gamma_3 = f\left(x_к + \frac{h}{2}, \ y_к + \frac{h}{2}\gamma_2\right)$.
7. Һесабламалы: $\gamma_4 = f(x_к + h, \ y_к + h\gamma_3)$.
8. Һесабламалы: $y_{к+1} = y_к + \frac{h}{6}(\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 + \gamma_4)$.
9. Чап етмәли: $x_к, y_к$.
10. Һесабламалы: $x_{к+1} = x_к + h$.
11. Гәбул етмәли: $x_к = x_{к+1}, y_к = y_{к+1}$.
12. Јохламалы: $x_к \leqslant b$ оларса, 4-чү аддыма кечмәли, әкс һалда исә 13-чү аддыма кечмәли.
13. Сон.

§ 5. АДАМС МЕТОДУ

Рунге-Кутта методу илә диференсиал тәнлији һәлл етдикдә, һәллин һәр бир $y_к$ гијмәтини тапмаг үчүн бөјүк һесабламалар апарылыр. Буна көрә дә сағ тәрәфинин аналитик ифадәси мүрәккәб олан диференсиал тәнлији Рунге-Кутта үсулу илә һәлл етмәк әлверишли дејилдир. Бу һалда Адамс[1] методундан истифадә олунур. Адамс методу илә тәнлији һәлл едәркән һәр дәфә тәнлијин сағ тәрәфини ардычыл олараг јенидән һесабламаг тәләб олунмур.

Тутаг ки,

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

[1] Адамс Џон Кауч (1819—1892) инкилис ријазијјатчысы вә астрономудур.

тәнлијинин $[x_0, b]$ парчасында

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллини тапмаг лазымдыр. $[x_0, b]$ парчасыны $x_к = x_0 + кh$ $(к = 0, 1, \ldots, n)$ нөгтәләри илә n бәрабәр һиссәјә бөләк. $[x_к, x_{к+1}]$ парчасы үзрә (1) тәнлијини, јә'ни $y'(x) = f[x, y(x)]$ бәрабәрлијини интегралласаг вә $y_к = y(x_к)$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$y_{к+1} = y_к + \int_{x_к}^{x_{к+1}} f(x, y)\,dx = y_к + \int_{x_к}^{x_{к+1}} y'\,dx$$

вә ја

$$\Delta y_к = y_{к+1} - y_к = \int_{x_к}^{x_{к+1}} y'\,dx \qquad (3)$$

олар. Фәрз едәк ки, (1) тәнлији һәллинин бир нечә $x_к, x_{к-1}, x_{к-2}, \ldots$ нөгтәләриндә $y_к, y_{к-1}, y_{к-2}, \ldots$ гијмәтләри мә'лумдур. Онда $y'(x) = f[x, y(x)] = \psi(x)$ функсијасынын бу нөгтәләрин јахын әтрафында гијмәтләрини Нјутонун интерполјасија дүстуру (XIX, § 6) илә тәгриби олараг тапмаг олар:

$$y' = y'_к + t\Delta y'_{к-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y'_{к-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y'_{к-3} \qquad (4)$$

(дүстурда 4 һәдд көтүрмәклә кифајәтләнирик).

Бурада $t = \frac{x - x_к}{h}$, $y'_к = y'(x_к) = \psi(x_к)$ вә $\Delta y'_к = y'_{к+1} - y'_к$. y'-ин (4) ифадәсини (3) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг вә $dx = hdt$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\Delta y_к = h\int_0^1 \Big(y'_к + t\Delta y'_{к-1} + \frac{t+t^2}{2}\Delta^2 y'_{к-2} + \frac{t^3+3t^2+2t}{6}\Delta^3 y'_{к-3}\Big)dt = h\Big(y'_к + \frac{1}{2}\Delta y'_{к-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 y'_{к-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 y'_{к-3}\Big) = hy'_к + \frac{1}{2}\Delta(hy'_{к-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(hy'_{к-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hy'_{к-3}) \qquad (5)$$

олар. Бурада $q_к = hy'_к = hf(x_к, y_к)$, $\Delta q_к = q_{к+1} - q_к$ $(к = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ишарәләрини гәбул етдикдә

$$\Delta y_к = q_к + \frac{1}{2}\Delta q_{к-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{к-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{к-3}, \qquad (6)$$

$$y_{к+1} = y_к + \Delta y_к \qquad (7)$$

дүстурлары алыныр.

Беләликлә, (1) тәнлији һәллинин тәгриби гијмәтләри (6) вә (7) дүстурлары васитәсилә һесабланыр. (6) дүстуруна Адамсын екстраполјасија дүстуру дејилир.

(6) вә (7) дүстурлары илә һесаблама апармаг үчүн дөрд y_0, y_1, y_2, y_3 башланғыч гијмәти мә'лум олмалыдыр. y_0, y_1, y_2, y_3 гијмәтләрини исә (2) шәртиндән истифадә едәрәк Рунге-Кутта методу илә тапмаг олар. Бу гијмәтләр мә'лум олдугда $q_0 = hf(x_0, y_0)$, $q_1 = hf(x_1, y_1)$, $q_2 = hf(x_2, y_2)$, $q_3 = hf(x_3, y_3)$ гијмәтләри тапылыр вә ашағыдакы чәдвәл тәртиб едилир:

i	x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q = hy'$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	x_0	y_0		$f(x_0, y_0)$	q_0	$\Delta q_0 = q_1 - q_0$	$\Delta^2 q_0 = \Delta q_1 - \Delta q_0$	$\Delta^3 q_0 = \Delta^2 q_1 - \Delta^2 q_0$
1	x_1	y_1		$f(x_1, y_1)$	q_1	$\Delta q_1 = q_1 - q_2$	$\Delta^2 q_1 = \Delta q_2 - \Delta q_1$	
2	x_2	y_2		$f(x_2, y_2)$	q_2	$\Delta q_2 = q_3 - q_2$		
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3			
4	x_4							
5	x_5							
6	x_6							

y_0, y_1, y_2, y_3 мә'лум олдугда чәдвәлдә диагонал үзрә јерләшән q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$ әдәдләриндән истифадә едәрәк, (6) дүстуру васитәсилә Δy_3 тапылыр вә 4-чү графаја дахил едилир. Сонра исә (7) дүстуру васитәсилә $y_4 = y_3 + \Delta y_3$ тапылыр. y_4 гијмәти тапылдыгдан сонра $f(x_4, y_4)$, q_4, Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$ әдәдләри вә онлар васитәсилә (6), (7) дүстурларындан Δy_4, y_5 тапылыр.

Беләликлә, просеси давам етдирмәклә вә һәр аддымда (1) тәнлијинин сағ тәрәфини бир дәфә һесабламагла јухарыдакы чәдвәл долдурулур. $x_к > b$ олдугда һесаблама дајандырылыр.

Һесабламаны ЕРҺМ-да апармаг үчүн (5) дүстуруну ачыг шәкилдә јазмаг лазымдыр. Бу мәгсәдлә

$$\Delta y'_{к-1} = y'_к - y'_{к-1},$$
$$\Delta^2 y'_{к-2} = y'_к - 2y'_{к-1} + y'_{к-2},$$
$$\Delta^3 y'_{к-3} = y'_к - 3y'_{к-1} + 3y'_{к-2} - y'_{к-3}$$

дүстурларындан истифадә едилир вә (5) дүстурунда охшар һәдләр ислаһ едилдикдән сонра

$$y_{к+1} = y_к + \frac{h}{24}(55y'_к - 59y'_{к-1} + 37y'_{к-2} - 9y'_{к-3}) \qquad (8)$$

алыныр. ЕРҺМ үчүн програм тәртиб етдикдә (8) дүстурундан вә ашағыдакы алгоритмдән истифадә етмәк олар.

1. x_0, y_0, b, h әдәдләрини дахил етмәли.
2. y_1, y_2, y_3 гијмәтләрини Рунге-Кутта алгоритми илә тапмалы
3. Һесабламалы: $q_0 = y'_к = f(x_0, y_0)$.
4. Һесабламалы: $q_1 = y'_{к-1} = f(x_1, y_1)$.
5. Һесабламалы: $q_2 = y'_{к-2} = f(x_2, y_2)$.
6. Һесабламалы: $q_3 = y'_{к-3} = f(x_3, y_3)$.
7. Һесабламалы: $x_к = x_0 + 3h$.

8. Һесабламалы: $y_4 = y_{k+1} = \frac{h}{24}(55q_0 - 59q_1 + 37q_2 - 9q_3)$.
9. Һесабламалы: $x_{k+1} = x_k + h$.
10. Чап етмәли: x_{k+1}, y_{k+1}.
11. Һесабламалы: $q_4 = q_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$.
12. Гәбул етмәли: $q_0 = q_1,\ q_2 = q_3,\ q_3 = q_4$.
13. Јохламалы: $x_{k+1} \leqslant b$. Әкәр $x_{k+1} \leqslant b$ оларса, онда 4-чү бәндә кечмәли, әкс һалда 14-чү бәндә кечмәли.
14. Сон.

§ 6. МИЛН[1] МЕТОДУ

Милн методу садә вә практики җәһәтдән әлверишлидир. Тутаг ки,

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

диференсиал тәнлијинин $[x_0, b]$ парчасында $y(x_0) = y_0$ башланғыч шәртини өдәјән тәгриби һәллини тапмаг тәләб олунур. Бурада да $h = \frac{b-x_0}{n}$, $x_k = x_0 + kh$, $y_k = y(x_k)$,

$$y'_k = f(x_k, y_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

гәбул олунур.

Милн дүстуруну алмаг үчүн $x_k, x_{k+1}, \dots$ нөгтәләринин јахын әтрафында $y'(x) = f[x, y(x)]$ функсијасынын гијмәтләрини үчтәртибли сонлу фәргә гәдәр көтүрүлмүш Нјутон интерполјасија дүстуру (XIX, § 6) илә тәгриби һесабламаг лазымдыр:

$$y' = y'_k + q\Delta y'_k + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y'_k + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y'_k. \qquad (2)$$

Бурада

$$q = \frac{x - x_k}{h} \text{ вә } \Delta y'_k = y'_{k+1} - y'_k.$$

(2) дүстурунда $k = m - 4$ көтүрәк вә алынан бәрабәрлији x-ә нәзәрән $[x_{m-4}, x_m]$ парчасы үзрә интеграллајаг:

$$\int_{x_{m-4}}^{x_m} y'(x)\,dx = \int_{x_{m-4}}^{x_m}\Big[y'_{m-4} + q\,\Delta y'_{m-4} + \frac{1}{2}(q^2 - q)\,\Delta^2 y'_{m-4} + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\,\Delta^3 y'_{m-4}\Big]dx.$$

Бурадан $q = \frac{x - x_{m-4}}{h}$ вә $dx = h\,dq$ олдуғуна әсасән

$$y_m - y_{m-4} = h\left(4y'_{m-4} + 8\Delta y'_{m-4} + \frac{20}{3}\Delta^2 y'_{m-4} + \frac{8}{3}\Delta^3 y'_{m-4}\right) \qquad (3)$$

аларыг. Сонлу фәргләрин

$$\Delta y'_{m-4} = y'_{m-3} - y'_{m-4},$$

[1] Милн Едуард Артур (1896—1950) инкилис ријазијјатчысы вә астрономудур.

$$\Delta^2 y'_{m-4} = y'_{m-2} - 2y'_{m-3} + y'_{m-4},$$
$$\Delta^3 y'_{m-4} = y'_{m-1} - 3y'_{m-2} + 3y'_{m-3} - y'_{m-4}$$

гијмәтләрини (3) дүстурунда јеринә јаздыгда Милнин ашағыдакы биринчи дүстуру алыныр:

$$y_m = y_{m-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{m-3} - y'_{m-2} + 2y'_{m-1}). \qquad (4)$$

Милнин икинчи дүстуруну алмаг үчүн (2) дүстурунда $k = m - 2$ көтүрмәк, алынан бәрабәрлији $[x_{m-2}, x_m]$ парчасы үзрә интегралламаг вә $q = \frac{x - x_{m-2}}{h}$ олдуғуну нәзәрә алмаг лазымдыр:

$$y_m - y_{m-2} = h\left(2y'_{m-2} + 2\Delta y'_{m-2} + \frac{1}{3}\Delta^2 y'_{m-2}\right). \qquad (5)$$

Сонлу фәргләрин

$$\Delta y'_{m-2} = y'_{m-1} - y'_{m-2}, \quad \Delta^2 y'_{m-2} = y'_m - 2y'_{m-1} + y'_{m-2}$$

гијмәтләрини (5) дүстурунда јеринә јаздыгда Милнин икинчи дүстуру алыныр:

$$y_m = y_{m-2} + \frac{h}{3}(y'_{m-2} + 4y'_{m-1} + y'_m). \qquad (6)$$

Верилмиш (1) тәнлијинин $y(x_0) = y_0$ башланғыч шәртини өдәјән һәллини тапмаг үчүн әввәлчә Рунге-Кутта методу илә y_0, y_1, y_2, y_3 башланғыч гијмәтләри тапылыр. $y_k = y(x_k)$ ($k = 4, 5, 6, \dots$) гијмәтләри исә ашағыдакы гајда илә һесабланыр:

1) y_k ($k = 4, 5, 6, \dots$) гијмәтинин биринчи $y_k^{(1)}$ јахынлашмасы (4) дүстуру илә тапылыр.

2) (1) диференсиал тәнлијиндә $y_k^{(1)}$ гијмәтини нәзәрә алмагла $y_k^{(1)\prime} = f(x_k, y_k^{(1)})$ гијмәти тапылыр.

3) y_k ($k = 4, 5, 6, \dots$) гијмәтинин икинчи $y_k^{(2)}$ јахынлашмасы (6) дүстуру илә тапылыр:

$$y_k^{(2)} = y_{k-2} + \frac{h}{3}(y'_{k-2} + 4y'_{k-1} + y_k^{(1)\prime}).$$

Милн көстәрмишдир ки, тәнлији бу үсулла тәгриби һәлл едәркән бурахылан мүтләг хәта $\varepsilon_k = \frac{|y_k^{(2)} - y_k^{(1)}|}{29}$ олур. Демәли, ε әдәди әввәлчәдән көстәрилмиш хәтадырса, онда $\varepsilon_k \leqslant \varepsilon$ олдугда $y_k \approx y_k^{(2)}$ вә $y'_k \approx f(x_k, y_k^{(2)})$ гәбул едилә биләр. Бундан сонра y_{k+1} гијмәти јухарыда көстәрилән һесаблама просесини јенидән тәкрар етмәклә тапылыр. Әкәр $\varepsilon_k > \varepsilon$ оларса, онда h аддымы азалдылыр, y_0, y_1, y_2, y_3 гијмәтләри јенидән тапылыр вә һесаблама просеси тәкрар олунур.

Беләликлә, Милн методунда һәллин ахтарылан y_k гијмәтләри ардычыл олараг тәсһиһ олуна билир ки, бу да методун дәгиг олдуғуну вә ондан ЕРҺМ-да сәмәрәли истифадә етмәк мүмкүн олдуғуну көстәрир.

VI ҺИССӘ

СЫРАЛАР

XXXV ФӘСИЛ

ӘДӘДИ СЫРАЛАР

§ 1. ЈЫҒЫЛАН ӘДӘДИ СЫРАЛАР ВӘ ОНЛАРЫН САДӘ ХАССӘЛӘРИ

Индијә кими сонлу сајда әдәдләрин чәминдән данышылмышдыр. Бурада сонлу сајда әдәдләрин чәми анлајышы „сонсуз сајда" әдәдләр (топлананлар) үчүн үмумиләшдирилир вә белә „чәм" анлајышынын бир сыра хассәләри өјрәнилир.

Тутаг ки, $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ әдәдләри ардычыллығы верилмишдир. Бу әдәдләрдән дүзәлмиш

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \tag{1}$$

вә ја

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa \tag{2}$$

ифадәсинә (формал олараг дүзәлмиш „чәмә") *әдәди сыра* вә ја садәчә олараг *сыра* дејилир. U_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots)$ әдәдләри сыранын һәдләри, U_1 әдәди сыранын биринчи, U_n исә n-чи һәдди адланыр.

Сонлу сајда топлананларын чәми вә ону тә'јинетмә гајдасы бизә мә'лумдур. Сыра исә „сонсуз сајда" әдәдләрин „чәмидир". Буна көрә дә сонсуз сајда әдәдләрин чәми нә демәк олдуғуну тә'јин (мүәјјән) етмәлијик. Бу мәгсәдлә (1) сырасынын һәдләриндән ашағыдакы кими чәмләр дүзәлдәк:

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \sum_{\kappa=1}^{n} U_\kappa \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Бу чәмә (1) сырасынын *n-чи хүсуси чәми* дејилир.

Тә'риф 1. *(1) сырасынын S_n хүсуси чәмләри ардычыллығынын сонлу*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{4}$$

лимити варса, һәмин сыраја јығылан сыра вә S әдәдинә онун чәми дејилир. Буну

$$S = U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$$

вә ја

$$S = \sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa$$

кими јазырлар.

Әкс һалда, јә'ни $\{S_n\}$ ардычыллығынын лимити олмадыгда (1) сырасына *дағылан сыра* дејилир. Дағылан сыранын јухарыда дедијимиз мә'нада чәми јохдур. Лакин $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ вә ја $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ олдугда биз кәләчәкдә шәрти олараг

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa = \infty \quad \text{вә ја} \quad \sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa = \pm\infty$$

кими јазачағыг.

Гејд едәк ки, һәр бир сонлу

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n \tag{5}$$

чәминә сонсуз сајда һәдләри сыфра бәрабәр

$$U_{n+1} = U_{n+2} = \cdots = 0$$

олан сыра кими бахмаг олар. Бу һалда $\sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa$ сырасынын чәми (5) чәминә бәрабәр олар.

Мисал 1.

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \tag{5'}$$

сырасы јығыландыр. Доғрудан да,

$$S_n = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{1}{\kappa(\kappa+1)} = \sum_{\kappa=1}^{n} \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

хүсуси чәминин $n\to\infty$ шәртиндә сонлу лимити вар:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = S.$$

Демәли, (5′) сырасы јығыландыр вә 1 әдәди онун чәмидир:

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa(\kappa+1)} = 1.$$

Мисал 2.

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots \tag{6}$$

сырасынын јығылмасыны тәдгиг етмәли.

Һәндәси силсиләнин биринчи n һәддинин чәми дүстуруна әсасән сыранын хүсуси чәми үчүн

$$S_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{1}{1-q}q^n\ (q\neq 1)$$

ифадәси алыныр.

$|q|<1$ олдугда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ олдуғундан (XII, § 3)

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{1-q}q^n\right)=\frac{1}{1-q}$$

олар, јә'ни $|q|<1$ олдугда (6) сырасы јығылыр вә онун чәми $\frac{1}{1-q}$ әдәдинә бәрабәрдир:

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots. \tag{7}$$

$|q|>1$ олдугда исә $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$ (XII, § 8) олдуғундан

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{1-q}q^n\right)=\infty$$

олар ки, бу да (6) сырасынын дағылан олдуғуну көстәрир. $q=-1$ олдугда (6) сырасы

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots \tag{8}$$

шәклиндә јазылар вә онун хүсуси чәми

$$S_n=\begin{cases}0, & n \text{ чүт әдәд олдугда,}\\ 1, & n \text{ тәк әдәд олдугда}\end{cases}$$

олар. Бу S_n ардычыллығынын исә лимити јохдур (XII, § 1). Демәли, $q=-1$ олдугда (6) сырасы, јә'ни (8) сырасы дағыландыр.

$q=1$ олдугда исә (6) сырасынын хүсуси чәми $S_n=1+1+\cdots+1=n$ вә $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ олар. Јә'ни, бу һалда да, (6) сырасы дағыландыр.

Демәли, (6) сырасы $|q|<1$ олдугда јығылан, $|q|\geqslant 1$ олдугда исә дағыландыр.

Јығылан әдәди сыраларын бир сыра садә хассәләри вардыр.

Теорем 1. *(1) сырасы јығыландырса, истәнилән C әдәди үчүн*

$$\sum_{k=1}^{\infty} CU_k \tag{9}$$

сырасы да јығыландыр.

Исбаты. (1) сырасынын хүсуси чәми S_n оларса, онда

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} CU_k=C\sum_{k=1}^{n} U_k=C\,S_n$$

олар вә бурадан

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(CS_n)=C\lim_{n\to\infty}S_n=CS.$$

алыныр. Демәли, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} CU_k$ сырасы јығыландыр.

Нәтичә. (1) сырасы дағыландырса, истәнилән $C\neq 0$ әдәди үчүн (9) сырасы да дағыландыр.

Теорем 2. (1) вә

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k=V_1+V_2+\cdots+V_n+\cdots \tag{10}$$

сырасы јығыландырса, онда һәмин сыраларын чәмы вә фәрги адланан

$$\sum_{k=1}^{\infty}(U_k+V_k)=(U_1+V_1)+(U_2+V_2)+\cdots+(U_n+V_n)+\cdots \tag{11}$$

вә

$$\sum_{k=1}^{\infty}(U_k-V_k)=(U_1-V_1)+(U_2-V_2)+\cdots+(U_n-V_n)+\cdots \tag{12}$$

сыралары да јығыландыр.

Исбаты. (1), (10), (11) вә (12) сыраларынын хүсуси чәмләрини ујғун олараг S_n, σ_n, T_n вә Q_n илә ишарә етсәк, онда

$$T_n=S_n+\sigma_n,\quad Q_n=S_n-\sigma_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}\sigma_n,\quad \lim_{n\to\infty}Q_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}\sigma_n$$

олар. Бурадан теоремин доғрулуғу ајдындыр.

Гејд едәк ки, (1) вә (10) сыраларынын бири јығылан, дикәри дағылан олдугда (11) вә (12) сыралары дағылан олар. (1) вә (10) сыраларынын икиси дә дағылан олдугда (11) вә (12) сыраларынын јығылан вә ја дағылан олмасы һаггында һеч нә демәк олмаз. Мәсәлән, дағылан

$$1+1+\cdots+1+\cdots$$

вә

$$-1-1-\cdots-1-\cdots$$

сыраларынын чәми јығыландыр:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(U_k+V_k)=0+0+\cdots+0+\cdots,$$

фәрги исә дағыландыр:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(U_k-V_k)=2+2+\cdots+2+\cdots$$

Теорем 3. *Јығылан (1) сырасынын һәдләрини, дүзүлүш сырасыны позмадан, истәнилән шәкилдә груплашдырдыгда алынан*

$$(U_1+U_2+\cdots+U_{\kappa_1})+(U_{\kappa_1+1}+U_{\kappa_1+2}+\cdots+U_{\kappa_2})+\cdots+$$
$$+(U_{\kappa_{n-1}+1}+U_{\kappa_{n-1}+2}+\cdots+U_{\kappa_n})+\cdots \tag{13}$$

сырасы да јығыландыр вә онун чәми верилмиш (1) сырасынын чәминә бәрабәрдир.

Исбаты. Тутаг ки, (1) сырасы S әдәдинә јығылыр. (13) сырасыны

$$T_1+T_2+\cdots+T_n+\cdots \tag{14}$$

кими јазаг; бурада

$$T_m=U_{\kappa_{m-1}+1}+U_{\kappa_{m-1}+2}+\cdots+U_{\kappa_m},\ \kappa_0=0.$$
$$(m=1,\ 2,\ldots)$$

(1) вә (14) сыраларынын хүсуси чәмләрини ујғун олараг S_n вә W_n илә ишарә етсәк, онда $W_n=S_{\kappa_n}$ олар. Бурадан $n\to\infty$ шәртиндә $\kappa_n\to\infty$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\lim_{n\to\infty} W_n=\lim_{n\to\infty} S_{\kappa_n}=\lim_{\kappa_n\to\infty} S_{\kappa_n}=S$$

алынар ки, бу да (13) сырасынын S әдәдинә јығылдығыны көстәрир.

Гејд. Теоремин тәрси доғру дејилдир, јә'ни (13) сырасынын јығылмасындан (1) сырасынын јығылмасы чыхмыр. Доғрудан да, бүтүн һәдләри сыфра бәрабәр олан

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

сырасы јығыландыр, лакин мө'тәризәләри ачдыгда алынан

$$1-1+1-\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$$

сырасы дағыландыр.

Нәтиҹә. (13) сырасы дағылан олдугда ујғун (1) сырасы да дағылан олар.

Исбат етдијимиз теоремләр көстәрир ки, јығылан сыраларын бир сыра хассәләри сонлу сајда һәдләр чәминин ујғун хассәләринин аналогудур. Бунунла белә, сонлу чәмләрин һәр бир хассәсинин јығылан сыралар үчүн доғру олдуғуну сөјләмәк олмаз.

§ 2. СЫРАНЫН ГАЛЫҒЫ ВӘ ОНУН ЈЫҒЫЛМАСЫ ҺАГГЫНДА ЗӘРУРИ ВӘ КАФИ ШӘРТЛӘР

Верилмиш

$$U_1+U_2+\cdots+U_n+\cdots \tag{1}$$

сырасынын биринчи n сајда һәддини атдыгда

$$U_{n+1}+U_{n+2}+\cdots+U_{n+m}+\cdots \tag{2}$$

сырасы алыныр.

Теорем. *(1) вә (2) сыралары ејни заманда ја јығыландыр, ја да дағыландыр.*

Исбаты. (1) вә (2) сыраларынын хүсуси чәмләрини ујғун олараг S_n вә σ_m илә ишарә едәк:

$$\sigma_m=U_{n+1}+U_{n+2}+\cdots+U_{n+m}.$$

Онда $S_{n+m}-S_n=\sigma_m$ вә ја

$$S_{n+m}=S_n+\sigma_m \tag{3}$$

бәрабәрлији доғру олар.

Тутаг ки, (1) сырасы јығыландыр. Онда $\lim\limits_{m\to\infty} S_m=S$ лимити вә буна көрә дә $\lim\limits_{m\to\infty} S_{n+m}=S$ лимити сонлу олар. Бу һалда (3) бәрабәрлијиндән

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{m\to\infty}(S_{n+m}-S_n)=S-S_n$$

мүнасибәти алыныр ки, бу да (2) сырасынын јығылан вә чәминин $S-S_n$ олдуғуну көстәрир.

Инди фәрз едәк ки, (2) сырасы јығыландыр: $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=\sigma$. Онда (3) бәрабәрлијиндән

$$\lim_{m\to\infty} S_{n+m}=\lim_{m\to\infty}(S_n+\sigma_m)=S_n+\sigma$$

алыныр ки, бу да (1) сырасынын јығылан олдуғуну көстәрир.

Бурадан ајдындыр ки, (1) вә (2) сыраларынын бири дағылан олдугда, о бири дә дағылан олар. Чүнки сыранын бири јығылан олдугда, јухарыда исбат етдијимиз кими о бири дә јығылан олмалыдыр.

Нәтиҹә. Верилмиш сыранын сонлу сајда һәддини атмаг вә ја она сонлу сајда јени һәдд әлавә етмәк, һәмин сыранын јығылан вә ја дағылан олмасына тә'сир етмир (дәјишмир).

(2) сырасына (1) сырасынын *n-чи галығы дејилир*. (1) сырасы јығылан олдугда исбат етдијимиз теоремә әсасән (2) сырасы да јығылан олар. (2) сырасынын чәмини r_n илә ишарә едәк:

$$r_n=U_{n+1}+U_{n+2}+\cdots+U_{n+m}+\cdots. \tag{4}$$

Онда

$$S-S_n=r_n$$

вә ја

$$S=S_n+r_n \tag{5}$$

бәрабәрлијини јазмаг олар. Бурадан вә сыранын јығылмасынын тә'рифинә әсасән ашағыдакы тәклиф алыныр: (1) сырасынын S әдәдинә јығылан олмасы үчүн

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\lim_{n\to\infty}(S-S_n)=0 \tag{6}$$

мүнасибәтинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

Сыраларын јығылмасынын тә'рифинә көрә (1) сырасынын S әдәдинә јығылмасы онун S_n хүсуси чәмләри ардычыллығынын һәмин әдәдә јығылмасына еквивалентдир. Ардычыллығын јығылан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт Коши критери-

синдә көстәрилир (XII, § 11). Һәмин критерини хүсуси чәмләр ардычыллығы үчүн сөјләдикдә (1) сырасынын јығылан олмасы үчүн ашағыдакы зәрури вә кафи шәрт алыныр:

Коши критериси. (1) сырасынын јығылан олмасы үчүн ашағыдакы шәртин өдәнилмәси зәрури вә кафидир: истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N > 0$ вар ки, n-нин $n > N$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари натурал гијмәтләриндә вә истәнилән натурал p әдәди үчүн

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \tag{7}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Хүсуси һалда, јығылан сыралар үчүн (7) шәрти $p = 1$ олдугда

$$|U_{n+1}| < \varepsilon \quad (n > N)$$

кими јазылыр ки, бу да јығылан сыралар үчүн

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

шәртинин өдәнилдијини көстәрир. Бу тәклифи билаваситә ашағыдакы кими дә исбат етмәк олар:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Беләликлә, ашағыдакы тәклиф алыныр.

Сыраларын јығылан олмасы үчүн зәрури шәрт: Јығылан сыранын үмуми һәддинин лимити сыфра бәрабәрдир:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0. \tag{8}$$

Сыраларын јығылан олмасы үчүн бу зәрури шәрт кафи дејилдир. Мәсәлән, һармоник сыра адланан

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{9}$$

сырасынын үмуми һәддинин лимити сыфра бәрабәрдир; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, лакин һәмин сыра дағыландыр. Доғрудан да, истәнилән натурал $n \geqslant 1$ әдәди үчүн

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} =$$

$$= n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

олар, јә'ни $\varepsilon = \frac{1}{2}$ вә $p = n$ олдугда (7) шәрти һеч бир натурал n әдәди үчүн өдәнилмир. Бу исә (9) сырасынын дағылан олдуғуну көстәрир.

Демәли, верилмиш сыранын үмуми һәддинин сыфырдан фәргли лимити варса вә јахуд да лимити јохдурса, онда һәмин сыра дағыландыр.

Мисал 1.

$$1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \cdots$$

сырасы дағыландыр. Доғрудан да, сыранын јығылан олмасы үчүн зәрури шәрт өдәнилмир:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty.$$

Мисал 2.

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{n^2}{1+n^2} + \cdots$$

сырасы дағыландыр.

Доғрудан да, сыранын јығылан олмасы үчүн зәрури шәрт өдәнилмир:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1 \neq 0.$$

Мисал 3.

$$a - a + a - \cdots + (-1)^{n+1} a + \cdots \quad (a > 0)$$

сырасы дағыландыр.

Сыранын үмуми һәддинин лимити, јә'ни $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1} a$ лимити јохдур.

§ 3. МҮСБӘТҺӘДЛИ СЫРАЛАРЫН ЈЫҒЫЛМА ӘЛАМӘТЛӘРИ

Верилмиш

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \tag{1}$$

сырасынын һәдләри мәнфи олмајан әдәдләр $U_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ олдугда она *мүсбәтһәдли сыра* дејилир. Белә сыраларын гурулушу нисбәтән садәдир. Буна көрә дә онларын јығылмасы һаггында бир сыра даһа садә вә конкрет тәклифләр сөјләмәк мүмкүндүр. Бу тәклифләрин бә'зиси сонсуз сәрһәдли гејри-мәхсуси интегралларын јығылма әламәтләрини хатырладыр.

1. Зәрури вә кафи шәрт.

Теорем 1. ***Мүсбәтһәдли (1) сырасынын хүсуси чәмләри ардычыллығынын јухарыдан мәһдуд олмасы онун јығылан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәртдир.***

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, мүсбәтһәдли (1) сырасы јығыландыр: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Јығылан ардычыллыг исә мәһдуддур (XII, § 2). Бурадан

$$S_n \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

мүнасибәти алыныр.

Шәртин кафилији. Мүсбәтһәдли сыранын хүсуси чәмләри ардычыллығы монотон азалмајан олар:

$$S_n \leqslant S_n + U_{n+1} = S_{n+1} \; (U_{n+1} \geqslant 0).$$

Монотон артан (азалмајан) вә јухарыдан мәһдуд олан ардычыллыг исә јығыландыр (XII, § 3). Бурадан (1) сырасынын јығылан олмасы алыныр.

Нәтиҹә. Мүсбәтһәдли сыра јығылан олмадыгда онун хүсуси ҹәмләри ардычыллығы гејри-мәһдуд олар вә $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Гејд. Сыранын хүсуси ҹәмләри ардычыллығынын мәһдуд олмасы истәнилән сыранын јығылан олмасы үчүн зәрури шәртдир, лакин кафи дејилдир. Мәсәлән, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ сырасынын хүсуси ҹәмләри ардычыллығынын мәһдуд $|S_n|\le 1$ олмасына бахмајараг һәмин сыра дағыландыр.

2. Коши-Маклоренин интеграл әламәти.

Мүсбәтһәдли сыраларын вә мәнфи гијмәтләр алмајан функсијаларын гејри-мәхсуси интегралынын јығылмасы арасында мүәјјән әлагә вардыр.

Теорем 2. *$f(x)$ функсијасы $[1, \infty)$ областында тә'јин олунмуш, мәнфи гијмәтләр алмајан вә монотон азалан олдугда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \tag{3}$$

сырасы илә

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \tag{4}$$

гејри-мәхсуси интегралы ејни заманда ја јығыландыр, ја да дағыландыр.

Исбаты. $f(x)$ функсијасы $[1, \infty)$ областында азалан олдуғундан x-ин $k\le x\le k+1$ $(k=1, 2, \ldots)$ гијмәтләриндә

$$f(k)\ge f(x)\ge f(k+1)\quad (k=1, 2, \ldots)$$

бәрабәрсизликләри доғру олар. Бу бәрабәрсизликләрин бүтүн тәрәфләрини $[k, k+1]$ парчасы үзрә интегралласаг,

$$f(k)\ge\int_k^{k+1} f(x)\,dx\ge f(k+1)\quad (k=1, 2, \ldots)$$

мүнасибәтини аларыг. Бурада k-ја $1, 2, \ldots, n$ гијмәтләрини верәрәк алынан бүтүн бәрабәрсизликләри тәрәф-тәрәфә топлајаг:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\ge\int_1^{n+1} f(x)\,dx\ge\sum_{k=1}^{n} f(k+1). \tag{5}$$

(3) сырасынын хүсуси ҹәмини $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$ илә ишарә

едәк. Онда (5) бәрабәрсизликләрини

$$S_n\ge\int_1^{n+1} f(x)\,dx\ge S_{n+1}-f(1)\quad (n=1, 2, \ldots) \tag{6}$$

кими јазмаг олар.

Тутаг ки, (3) сырасы јығыландыр. Онда 1-чи теоремә көрә $S_n\le M$ $(n=1, 2, \ldots)$ олар. Бу һалда (6) мүнасибәтиндән истәнилән n үчүн өдәнилән

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx\le M \tag{7}$$

бәрабәрсизлији алыныр. (7) бәрабәрсизлији өдәнилдијиндән мәнфи гијмәтләр алмајан функсијанын сонсуз сәрһәдли гејри-мәхсуси интегралынын јығылма әламәтинә көрә (XXIV, § 4) (4) гејри-мәхсуси интегралы јығылан олар.

Инди, тутаг ки, (4) гејри-мәхсуси интегралы јығыландыр. Онда јухарыда көстәрдијимиз мә'лум теоремә (XXIV, § 4, теорем 1) көрә

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx\le\int_1^{\infty} f(x)\,dx<+\infty$$

олар. Бу һалда (6) бәрабәрсизлијиндән

$$S_{n+1}\le f(1)+\int_1^{\infty} f(x)\,dx=M<+\infty\quad (n=1, 2, \ldots)$$

мүнасибәти алыныр ки, бу да 1-чи теоремә көрә (3) сырасынын јығылан олдуғуну көстәрир.

Мүсбәтһәдли (3) сырасы дағылан олдугда онун хүсуси ҹәмләри ардычыллығы гејри-мәһдуд олар вә (6) бәрабәрсизлијинә көрә

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx\to+\infty\quad (n\to\infty)$$

алынар ки, бу да (4) интегралынын дағылан олдуғуну көстәрир.

(4) гејри-мәхсуси интегралы дағылан олдугда исә $\int_1^{n+1} f(x)dx\to+\infty$ $(n\to\infty)$ вә (6) бәрабәрсизлијинә көрә $S_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$, јә'ни (3) сырасы дағылан олар.

Мисал 1.

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots \tag{8}$$

сырасынын јығылмасыны тәдгиг етмәли.

$f(x)=\frac{1}{x^s}$ $(x\ge 1)$ функсијасы васитәсилә (8) сырасыны

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+\cdots \tag{9}$$

шәклиндә јазмаг олар. Онда 2-чи теоремә көрә (9) сырасы вә

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \tag{10}$$

гејри-мәхсуси интегралы ејни заманда ја јығыландыр, ја да дағыландыр. Мә'лумдур ки, (10) гејри-мәхсуси интегралы $\alpha>1$ олдугда јығылан, $\alpha\leqslant 1$ олдугда исә дағыландыр (XXIV, § 2). Демәли, (8) сырасы $\alpha>1$ олдугда јығылан, $\alpha\leqslant 1$ олдугда исә дағыландыр.

Хүсуси һалда, $\alpha=1$ олдугда алынан һармоник

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

сырасы дағылан, $\alpha=2$ олдугда алынан

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

сырасы исә јығылан олар.

Мисал 2. $\sum\limits_{\kappa=2}^{\infty}\frac{1}{\kappa\ln\kappa}$ сырасынын јығылмасыны тәдгиг етмәли.

Бурада $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ функсијасы үчүн $\frac{1}{\kappa\ln\kappa}=f(\kappa)$ мүнасибәти өдәнилир вә һәмин функсијанын гејри-мәхсуси интегралы дағыландыр:

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \int_2^\infty \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln\ln x\,\Big|_2^\infty = \infty.$$

Буна көрә дә верилмиш сыра дағыландыр.

3. Мүгајисә әламәти.

Теорем 3. *Мүсбәтһәдли*

$$U_1+U_2+\cdots+U_n+\cdots$$

вә

$$V_1+V_2+\cdots+V_n+\cdots \tag{11}$$

сыраларынын үјгун һәдләри арасында $U_n\leqslant V_n$ ($n=1, 2, \ldots$) мүнасибәти өдәнилирсә, онда (11) сырасы јығылдыгда (1) сырасы да јығылыр, (1) сырасы дағылдыгда исә (11) сырасы да дағылыр.

Исбаты. (11) сырасы јығылдыгда 1-чи теоремә көрә елә $M>0$ әдәди вар ки, $\sigma_n=\sum\limits_{\kappa=1}^{n}V_\kappa\leqslant M$ ($n=1, 2, \ldots$) мүнасибәти өдәнилир. Онда $U_\kappa\leqslant V_\kappa$ бәрабәрсизлијинә көрә

$$S_n=\sum_{\kappa=1}^{n}U_\kappa\leqslant\sum_{\kappa=1}^{n}V_\kappa=\sigma_n\leqslant M$$

вә ја

$$S_n\leqslant M \quad (n=1, 2, \ldots)$$

бәрабәрсизлијин алынар ки, бу да 1-чи теоремә көрә (1) сырасынын јығылан олдуғуну көстәрир.

Мүсбәтһәдли (1) сырасы дағылан олдугда $S_n\to+\infty$ ($n\to\infty$) олар вә $S_n\leqslant\sigma_n$ мүнасибәтинә әсасән $\sigma_n\to+\infty$ ($n\to\infty$) алынар. Бурадан (11) сырасынын дағылан олдуғу ајдындыр.

Гејд. Теорем $U_n\leqslant V_n$ бәрабәрсизлији n-нин мүәјјән n_0 нөмрәсиндән сонра галан ($n\geqslant n_0$) гијмәтләриндә өдәнилдикдә дә доғру олар. Бу, сыранын сонлу сајда һәддини атдыгда онун јығылмасына вә дағылмасына тә'сир етмәдијиндән ајдындыр.

Нәтичә 1. Тутаг ки, $V_n\neq 0$ ($\kappa=1, 2, \ldots$) вә

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\gamma \tag{12}$$

лимити вар. Онда 1) $0\leqslant\gamma<+\infty$ вә (11) сырасы јығылан олдугда (1) сырасы да јығылыр, 2) $0<\gamma\leqslant+\infty$ вә (11) сырасы дағылан олдугда (1) сырасы да дағылыр.

Хүсуси һалда, $U_n\sim V_n$ олдугда (1) вә (11) сыралары ејни заманда ја јығыландыр, ја да дағыландыр.

Нәтичәнин доғрулуғуна инанмаг үчүн лимитин тә'рифиндән истифадә едәк: (12) бәрабәрлијинә әсасән истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди ($\gamma-\varepsilon\neq 0$) үчүн елә n_0 нөмрәси вар ки, n-нин n_0-дан сонра галан бүтүн гијмәтләриндә

$$\left|\frac{U_n}{V_n}-\gamma\right|<\varepsilon \quad (n>n_0)$$

вә ја

$$(\gamma-\varepsilon)\,V_n<U_n<(\gamma+\varepsilon)\,V_n \tag{13}$$

бәрабәрсизликләри доғрудур. $\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty}V_\kappa$ вә $\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty}CV_\kappa$ ($C\neq 0$) сыраларынын ејни заманда јығылан вә ја дағылан олдуғуну нәзәрә алсаг, (13) бәрабәрлијиндән нәтичәнин доғрулуғу ајдын олур.

(1) сырасыны

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots \tag{14}$$

сырасы ($\alpha>1$ олдугда јығылан, $\alpha\leqslant 1$ олдугда дағылан, § 2) илә мүгајисә етдикдә ашағыдакы нәтичә алыныр:

Нәтичә 2. Әкәр

$$\lim_{n\to\infty}n^\alpha U_n=\gamma \tag{15}$$

лимити варса, онда 1) $\alpha>1$ вә $0\leqslant\gamma<+\infty$ олдугда (1) сырасы јығылыр, 2) $\alpha\leqslant 1$ вә $0<\gamma\leqslant+\infty$ олдугда исә (1) сырасы дағылыр.

Хүсуси һалда, $U_n\sim\frac{1}{n^\alpha}$ вә $\alpha>1$ олдугда (1) сырасы јығылыр, $\alpha\leqslant 1$ олдугда исә һәмин сыра дағылыр.

Мисал 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2}$$

сырасынын јығылмасыны тәдгиг етмәли.

Бу сыранын $U_n = \frac{n}{n^3+2}$ үмуми һədди үчүн

$$\lim_{n\to\infty} n^2 U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+2} = 1$$

бәрабәрлији өдәнилдијиндән һәмин сыра јығыландыр (Нәтичә 2, 1).

Мисал 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ сырасынын јығылмасыны тәдгиг етмәли.

$n\to\infty$ шәртиндә

$$\sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$$

вә $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ сырасы дағылан олдуғундан верилән сыра дағыландыр.

4. Даламбер әламәти.

Теорем 4. ***Мүсбәтһәдли***

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \quad (U_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$

сырасынын һәдләри n-нин һәр һансы n_0-дан сонра галан бүтүн гијмәтләриндә

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant q < 1 \quad (n \geqslant n_0) \qquad (16)$$

бәрабәрсизлијини өдәдикдә (1) сырасы јығылан,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1 \quad (n \geqslant n_0) \qquad (17)$$

бәрабәрсизлијини өдәдикдә исә һәмин сыра дағыландыр.

Исбаты. n-ин n_0-дан сонра кәлән бүтүн гијмәтләриндә (16) вә ја

$$U_{n+1} \leqslant q\, U_n$$

бәрабәрсизлији өдәнилдикдә n-нин $n = n_0,\ n_0+1,\ n_0+2, \ldots$ гијмәтләриндә ашағыдакы бәрабәрсизликләри јазмаг олар:

$$U_{n_0+1} \leqslant q\, U_{n_0},$$
$$U_{n_0+2} \leqslant q\, U_{n_0+1} \leqslant q^2 U_{n_0},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_{n_0+m} \leqslant q\, U_{n_0+m-1} \leqslant q^m U_{n_0},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Сағ тәрәфдәки һәдләрдән дүзәлмиш

$$U_{n_0} q + U_{n_0} q^2 + \cdots + U_{n_0} q^m + \cdots$$

сырасы јығылан (§ 1, мисал 2) олдуғундан 3-чү теоремә көрә

$$U_{n_0+1} + U_{n_0+2} + \cdots + U_{n_0+m} + \cdots$$

сырасы да јығыландыр. Бурадан исә (1) сырасынын јығылан олмасы ајдындыр.

n-нин n_0-дан сонра кәлән бүтүн гијмәтләриндә (17) бәрабәрсизлији өдәнилдикдә ардычыл олараг

$$U_{n_0+1} \geqslant U_{n_0},$$
$$U_{n_0+2} \geqslant U_{n_0+1} \geqslant U_{n_0},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

мүнасибәтләрини јазмаг олар. Бурадан алынан $U_n \geqslant U_{n_0} > 0$ $(n = n_0+1,\ n_0+2, \ldots)$ мүнасибәти сыранын јығылан олмасы үчүн $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ зәрури шәртинин (§ 2) өдәнилмәдијини көстәрир. Буна көрә дә (1) сырасы дағыландыр.

Нәтичә (Лимит шәклиндә Даламбер[1] әламәти). *Мүсбәтһәдли (1) сырасы үчүн*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \qquad (18)$$

лимити варса, онда $l<1$ олдугда (1) сырасы јығылан, $l>1$ олдугда исә (1) сырасы дағыландыр.

Лимитин тә'рифинә көрә $l<1$ олдугда $0<\varepsilon<1-l$ шәртини өдәјән һәр бир $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә n_0 нөмрәси вар ки, n-нин n_0-дан сонра кәлән бүтүн гијмәтләриндә

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} - l \right| < \varepsilon$$

вә ја

$$l - \varepsilon < \frac{U_{n+1}}{U_n} < l + \varepsilon = q < 1 \quad (n \geqslant n_0) \qquad (19)$$

бәрабәрсизлији өдәниләр. Бурадан алынан

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < q < 1 \quad (n \geqslant n_0)$$

бәрабәрсизлији (1) сырасынын јығылан олдуғуну көстәрир.

$l>1$ олдугда (1) сырасынын дағылан олдуғуна инанмаг үчүн исә (19) мүнасибәтинин сол бәрабәрсизлијиндән истифадә етмәк лазымдыр.

$l=1$ олдугда (1) сырасынын јығылан вә ја дағылан олмасы һаггында һеч нә демәк олмаз.

[1] Даламбер Жан Лерон (1717—1783) франсыз ријазијјатчысы вә механикидир.

Доғрудан да, дағылан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (һармоник сырасы) вә һәм дә јығылан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сыраларынын һәр икиси үчүн (18) лимити ваһидә бәрабәрдир.

Мисал 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ сырасынын јығылмасыны тәдгиг етмәли.

Бу сыра үчүн (18) лимити вар:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

$l = 0 < 1$ олдуғундан һәмин сыра јығыландыр.

5. **Коши әламәти.**

Теорем 5. ***Мүсбәтһәдли (1) сырасынын һәдләри n-ин һәр һансы n_0-дан сонра кәлән бүтүн гијмәтләриндә***

$$\sqrt[n]{U_n} \leqslant q < 1$$

бәрабәрсизлијини өдәдикдә (1) сырасы јығылан.

$$\sqrt[n]{U_n} \geqslant 1 \qquad (20)$$

бәрабәрсизлијини өдәдикдә исә һәмин сыра дағыландыр.

Исбаты. n-ин $n > n_0$ гијмәтләриндә (19) бәрабәрсизлији өдәнилдијиндән

$$U_n \leqslant q^n \ (n \geqslant n_0)$$

олар. $0 \leqslant q < 1$ олдуғундан $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ сырасы јығыландыр. Онда 3-чү теоремә көрә $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ сырасы да јығылан олар.

(1) сырасынын јығылан олмасы бурадан ајдындыр.

(20) бәрабәрсизлији өдәниликдә исә $U_n \geqslant 1$ $(n \geqslant n_0)$ олар вә сыранын јығылан олмасы үчүн зәрури шәрт $\left(\lim_{n\to\infty} U_n = 0\right)$ өдәнилмәз. Бу һалда (1) сырасы дағылан олар.

Нәтичә (Лимит шәклиндә Коши әламәти). *Мүсбәтһәдли (1) сырасы үчүн*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = l \qquad (21)$$

лимити варса, онда $l < 1$ олдуғда (1) сырасы јығылан, $l > 1$ олдуғда исә (1) сырасы дағыландыр.

$l = 1$ олдуғда (1) сырасынын јығылан вә ја дағылан олмасы һаггында һеч нә демәк олмаз.

Доғрудан да, дағылан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ һармоник сырасы үчүн

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

олар. Бурада $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ бәрабәрлијиндән истифадә олунур. Һәмин бәрабәрлијин исбаты ашағыда верилир:

$$a_n = \sqrt[n]{n}, \ \ln a_n = \frac{\ln n}{n}, \ \lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \ \text{(XVI, § 4)},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln a_n} = e^0 = 1.$$

(21) лимити јығылан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сырасы үчүн дә ваһидә бәрабәрдир:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 = 1.$$

Демәли, һәм јығылан вә һәм дә дағылан сыра үчүн (21) лимити ваһидә бәрабәр олур.

Гејд. Мүсбәтһәдли (1) сырасы үчүн (18) лимити варса, (21) лимити дә вар вә онлар бир-биринә бәрабәрдир:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}. \qquad (22)$$

Лакин (21) лимити сонлу олдуғда (18) лимити олмаја да биләр. Бу көстәрир ки, мүсбәтһәдли сыраларын јығылмасына лимит шәклиндә Даламбер әламәти тәтбиг олунан һалда лимит шәклиндә Коши әламәти дә тәтбиг олунур. Үмумијјәтлә, сыраларын јығылмасы мәсәләсинә Коши әламәтинин тәтбиг олуна билдији бир чох һалларда Даламбер әламәти тәтбиг олунмур. Бу бахымдан Коши әламәти Даламбер әламәтиндән күчлүдүр.

§ 4. ИШАРӘСИНИ НӨВБӘ ИЛӘ ДӘЈИШӘН СЫРАЛАР

Мүсбәтһәдли сыраларын јығылмасы һаггында исбат етдијимиз тәклифләр вә јығылма әламәтләри (§ 3) бүтүн һәдләри мүсбәт олмајан әдәдләр олан

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \qquad (1)$$

сырасынын $(U_n \leqslant 0, \ n = 1, 2, \ldots)$ јығылмасыны тәдгиг етмәк үчүн дә тәтбиг олунур. Һәдләри мүхтәлиф ишарәли һәгиги әдәдләр олан сыраларын јығылмасына исә һәмин јығылма әламәтләрини билаваситә тәтбиг етмәк олмаз. Белә сыраларын јығылмасы мүхтәлиф үсулларла тәдгиг олунур.

Һәдләри мүхтәлиф ишарәли әдәдләр олан сыраларын ән садә нөвү ишарәсини нөвбә илә дәјишән сыралардыр.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n \ (U_n > 0, \ n = 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

шәклиндә олан сыраја *ишарәсини нөвбә илә дәјишән сыра* дејилир. Ишарәсини нөвбә илә дәјишән сыранын һәдләри нөвбә илә мүсбәт вә мәнфи әдәдләрдир. Белә сыралар һаггында ашағыдакы теореми исбат етмәк олар.

Теорем (Лејбнис). ***Ишарәсини нөвбә илә дәјишән (2) сырасы үчүн***

$$U_n \geqslant U_{n+1} > 0 \quad (n=1, 2, \dots) \tag{3}$$

вә

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0 \tag{4}$$

шәртләри өдәнилдикдә һәмин сыра јығыландыр.

Исбаты. (2) сырасынын чүт индексли хүсуси чәмләрини

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} U_k = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \dots + (U_{2n-1} - U_{2n})$$

кими јазаг. $U_k - U_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots$) фәргләри (3) шәртинә көрә мәнфи олмајан әдәдләрдир. Буна көрә дә

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} + (U_{2n+1} - U_{2n+2}) \geqslant S_{2n}$$

олар, јә'ни (2) сырасынын чүт индексли хүсуси чәмләринин $\{S_{2n}\}$ ардычыллығы монотон артандыр. Бундан башга,

$$S_{2n} = U_1 - (U_2 - U_3) - \dots - (U_{2n-2} - U_{2n-1}) - U_{2n}$$

бәрабәрлији ($U_k - U_{k+1} \geqslant 0$, $U_{2n} > 0$) көстәрир ки, $S_{2n} < U_1$ ($n=1, 2, \dots$) бәрабәрсизлији доғрудур.

Демәли, $\{S_{2n}\}$, монотон артан (азалмајан) вә јухарыдан мәһдуд ардычыллыгдыр. Белә ардычыллығын исә сонлу лимити вар (XII, § 3):

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S. \tag{5}$$

$S_{2n+1} = S_{2n} + U_{2n+1}$ бәрабәрлијиндән вә (4) шәртинә көрә $\lim\limits_{n\to\infty} U_{2n+1} = 0$ олмасындан ајдындыр ки, (2) сырасынын тәк индексли хүсуси чәмләри ардычыллығы да һәмин S әдәдинә јығылыр:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S. \tag{6}$$

(5) вә (6) бәрабәрликләри (2) сырасы хүсуси чәмләринин $\{S_n\}$ ардычыллығынын јығылан олдуғуну көстәрир:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Теоремин исбатындан ајдындыр ки, (2) сырасынын чүт индексли хүсуси чәмләри ардычыллығы азалмајан, тәк индексли

$$S_{2n+1} = U_1 - (U_2 - U_3) - \dots - (U_{2n} - U_{2n+1}) = S_{2n-1} - (U_{2n} - U_{2n+1})$$

хүсуси чәмләри ардычыллығы исә артмајандыр. Онда (5) вә (6) бәрабәрликләринә әсасән (XII, § 3) истәнилән n үчүн

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1} \tag{7}$$

олар. Бурадан

$$0 \leqslant S_{2n-1} - S \leqslant S_{2n-1} - S_{2n} = U_{2n}$$

вә

$$0 \leqslant S - S_{2n} \leqslant S_{2n+1} - S_{2n} = U_{2n+1}$$

бәрабәрсизликләри алыныр. Демәли, истәнилән n үчүн

$$|S_n - S| \leqslant U_{n+1} \tag{8}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Нәтичә. Ишарәсини нөвбә илә дәјишән (2) *сырасынын галығы үчүн*

$$|R_n| = |S - S_n| \leqslant U_{n+1} \tag{9}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Мисал. Ишарәсини нөвбә илә дәјишән

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots \tag{10}$$

сырасы үчүн теоремин шәртләри, јә'ни

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

мүнасибәтләри өдәнилдијиндән һәмин сыра јығыландыр.

§ 5. МҮТЛӘГ ЈЫҒЫЛАН СЫРАЛАР

Бүтүн һәдләри ихтијари ишарәли һәгиги әдәдләр олан

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \tag{1}$$

сырасына бахаг. Бу сыранын һәдләринин мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш

$$|U_1| + |U_2| + \dots + |U_n| + \dots \tag{2}$$

сырасы јығылан олдугда (1) сырасына *мүтләг јығылан сыра* дејилир. Ајдындыр ки, јығылан мүсбәтһәдли истәнилән сыра мүтләг јығыландыр.

Фәрз едәк ки,

$$U_k^+ = \begin{cases} U_k, & U_k \geqslant 0 \text{ олдугда} \\ 0, & U_k < 0 \text{ олдугда} \end{cases} \quad \text{вә} \quad U_k^- = \begin{cases} -U_k, & U_k \leqslant 0 \text{ олдугда} \\ 0, & U_k > 0 \text{ олдугда} \end{cases}$$

Бу кәмијјәтләр мәнфи дејилдир: $U_k^+ \geqslant 0$, $U_k^- \geqslant 0$ ($k=1, 2, \dots$) вә онлар үчүн ашағыдакы бәрабәрликләр доғрудур:

$$U_k = U_k^+ - U_k^-, \qquad |U_k| = U_k^+ + U_k^-. \tag{3}$$

Беләликлә, ихтијари (1) сырасына ујғун олан ашағыдакы кими ики јени мүсбәтһәдли сыра дүзәлтмәк олар:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k^+ \quad \text{вә} \quad \sum_{k=1}^{\infty} U_k^-. \tag{4}$$

Бу сыраларын биринчиси (1) сырасынын мүсбәт һәдләриндән, икинчиси исә (1) сырасынын мәнфи һәдләринин мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмишдир.

Теорем 1. ***Мүтләг јығылан сыра јығыландыр.***

Доғрудан да, $U_k^+ \leqslant |U_k|$ вә $U_k^- \leqslant |U_k|$ $(k=1, 2,\ldots)$ бәрабәрсизликләри өдәнилдијиндән вә (2) сырасы јығылан олдуғундан мүгајисә әламәтинә (§ 3) көрә мүсбәтһәдли (4) сыралары јығыландыр. Онда (3) бәрабәрлијинә көрә ики јығылан сыранын фәрги олан (1) сырасы да јығылан олар:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k = \sum_{k=1}^{\infty} (U_k^+ - U_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} U_k^-. \tag{5}$$

Теоремин исбатындан ајдындыр ки, (1) сырасы мүтләг јығылан олдугда онун ујғун олараг мүсбәт вә мәнфи һәдләринин мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш мүсбәтһәдли (4) сыралары јығыландыр. Бунун тәрси дә доғрудур. (4) сыралары јығылан олдугда (1) сырасы мүтләг јығыландыр. Бу тәклифин доғрулуғу (3) бәрабәрликләринин икинчисиндән $|U_k| = U_k^+ + U_k^-$ вә ики јығылан сыранын чәминин јығылан олмасындан ајдындыр:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k| = \sum_{k=1}^{\infty} (U_k^+ + U_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^-.$$

Бурадан ашағыдакы теорем алыныр:

Теорем 2. ***(1) сырасынын мүтләг јығылан олмасы үчүн онун ујғун олараг мүсбәт вә мәнфи һәдләринин мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш (4) сыраларынын јығылан олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Мүтләг јығылан сыраларын һәдләри үчүн „јердәјишмә" хассәси дә доғрудур:

Теорем 3 (Коши). ***Мүтләг јығылан сыранын һәдләринин јерини истәнилән гајда илә дәјишдикдә алынан јени сыра јенә дә мүтләг јығыландыр вә онун чәми верилмиш сыранын чәминә бәрабәрдир.***

Исбаты. Әввәлчә теореми мүсбәтһәдли (1) сырасы үчүн исбат едәк. (1) сырасынын һәдләринин јерини истәнилән шәкилдә дәјишдикдә алынан јени сыра

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n + \cdots \tag{6}$$

олсун. Бурада $V_1 = U_{k_1}$, $V_2 = U_{k_2}, \ldots, V_n = U_{k_n}, \ldots$ олдуғуну нәзәрә алсаг, һәмин сыраны

$$U_{k_1} + U_{k_2} + \cdots + U_{k_n} + \cdots \tag{7}$$

шәклиндә дә јазмаг олар. (6) (вә ја (7)) сырасынын хүсуси чәмләрини σ_n вә (1) сырасынын хүсуси чәмләрини S_n илә ишарә едәк:

$$\sigma_n = U_{k_1} + U_{k_2} + \cdots + U_{k_n}.$$

Әкәр $k_1, k_2, \ldots, k_n$ әдәдләринин ән бөјүјүнү N илә ишарә етсәк, онда $\sigma_n \leqslant S_N$ олар. Мүсбәтһәдли (1) сырасы јығылан олдугда онун хүсуси чәмләри ардычыллығы сыранын S чәми илә јухарыдан мәһдуд олмалыдыр (§ 3): $S_N \leqslant S$. Бу һалда истәнилән n үчүн $\sigma_n \leqslant S$ олар ки, бу да мүсбәтһәдли (6) сырасынын $\sigma \leqslant S$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma\right)$ әдәдинә јығылан олдуғуну көстәрир.

Демәли, мүсбәтһәдли (1) сырасынын һәдләринин јерини истәнилән шәкилдә дәјишмәклә алынан (6) сырасы јығыландыр вә онун чәми (1) сырасынын чәминдән бөјүк дејилдир: $\sigma \leqslant S$.

Инди, тәрсинә фәрз едәк ки, (6) сырасынын һәдләринин јерини дәјишмәклә (1) сырасы алынмышдыр. Онда јухарыда исбат етдијимизә көрә $S \leqslant \sigma$ олар. Бу һалда $\sigma \leqslant S$ вә $S \leqslant \sigma$ мүнасибәтләри $\sigma = S$ олдуғуну көстәрир.

Бунунла да теорем мүсбәтһәдли сыралар үчүн тамамилә исбат олунур.

Мүтләг јығылан истәнилән (1) сырасынын чәми S олсун. $P = \sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k^+$ вә $Q = \sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k^-$ гәбул етсәк, онда (5) бәрабәрлијинә көрә

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} U_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} U_k^- = P - Q$$

олар. (1) сырасынын һәдләринин јерини истәнилән шәкилдә дәјишдикдә ајрылыгда мүсбәт һәдләрдән вә мәнфи һәдләрдән дүзәлмиш $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k^+$ вә $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k^-$ сыраларынын һәдләри өз јерини ујғун шәкилдә дәјишәр. Јухарыдакы исбата көрә исә һәдләрин јерини истәнилән шәкилдә дәјишдикдә мүсбәтһәдли $\sum U_k^+$ вә мәнфиһәдли $\sum U_k^-$ сыраларынын јығылмасы вә чәми дәјишмир. Демәли, (1) сырасынын һәдләринин јерини истәнилән шәкилдә дәјишмәклә алынан јени сыра јығыландыр вә онун чәми јенә дә $S = P - Q$ әдәдинә бәрабәрдир.

Бунунла да теорем тамамилә исбат олунур.

Мисал 1.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

сырасы мүтләг јығыландыр.

Доғрудан да, һәмин сыранын һәдләринин мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

сырасы јығыландыр (§ 1).

Мисал 2.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

сырасы мүтләг јығылан дејилдир. Чүнки һәмин сыранын һәдләринин мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

һармоник сырасы дағыландыр (§ 2).

§ 6. ШӘРТИ ЈЫҒЫЛАН СЫРАЛАР

Һәдләри ихтијари һәгиги әдәдләр олан

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa \qquad (1)$$

сырасы јығылан, онун һәдләринин мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} |U_\kappa| \qquad (2)$$

сырасы дағылан олдугда (1) сырасына *шәрти јығылан сыра* дејилир. Шәрти јығылан (1) сырасынын гурулушуну өјрәнмәк үчүн онун үјғун олараг мүсбәт һәдләриндән вә мәнфи һәдләринин мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa^+ \quad \text{вә} \quad \sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa^- \qquad (3)$$

сыраларына бахаг.

(1) сырасы јығылан вә (2) сырасы дағылан олдугда (3) сыралары ејни заманда јығылан ола билмәз (Әкс һалда, (3) сыраларынын чәми олан (2) сырасы јығылан олмалыдыр).

Тутаг ки, (3) сыраларынын бири, мәсәлән, $\sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa^+$ сырасы дағыландыр:

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa^+ = \infty \ (U_\kappa^+ > 0,\ \kappa=1,\ 2,\ldots)$$

Онда $U_\kappa = U_\kappa^+ - U_\kappa^-$ бәрабәрлијинә әсасән јазылмыш

$$\sum_{\kappa=1}^{n} U_\kappa^- = \sum_{\kappa=1}^{n} U_\kappa^+ - \sum_{\kappa=1}^{n} U_\kappa \qquad (4)$$

мүнасибәти көстәрир ки, $\sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa^-$ сырасы да дағылан олмалыдыр. (4) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки биринчи чәм $n\to\infty$ шәртиндә гејри-мәһдуд олараг артыр, икинчи чәм исә сонлу лимитә јахынлашыр.

Демәли, (1) сырасы јығылан вә (2) сырасы дағылан олдугда (3) сыраларынын икиси дә дағылан олмалыдыр. Бурадан ашағыдакы теорем алыныр:

Теорем 1. ***Шәрти јығылан (1) сырасынын үјғун олараг, мүсбәт һәдләриндән вә мәнфи һәдләринин мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш (3) сыраларынын икиси дә дағыландыр.***

(1) сырасы јығылан олдуғундан $U_\kappa \to 0\ (\kappa\to\infty)$ вә буна көрә дә $U_\kappa^+ \to 0\ (\kappa\to\infty)$ вә $U_\kappa^- \to 0\ (\kappa\to\infty)$ олар.

Шәрти јығылан сыраларын һәдләри үчүн „јердәјишмә" хассәси доғру дејилдир. Шәрти јығылан сыранын һәдләринин јерини дәјишдикдә чәминин дәјишмәси вә һәтта дағылан сыра алына билмәси ашағыдакы теоремдән ајдындыр.

Теорем 2 (Риман). ***Шәрти јығылан (1) сырасынын һәдләринин јерини елә дәјишмәк олар ки, алынан јени сыранын чәми габагчадан верилмиш истәнилән $S\ (-\infty < S \leqslant \infty)$ әдәдинә бәрабәр олсун.***

Исбаты. Садәлик үчүн, фәрз едәк ки, S ихтијари сонлу мүсбәт әдәддир. (1) сырасы шәрти јығылан олдуғундан мүсбәтһәдли (3) сыраларынын икиси дә дағыландыр:

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa^+ = +\infty,\quad \sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa^- = +\infty.$$

Буна көрә дә

$$1)\ A_1=\sum_{\kappa=1}^{n_1} U_\kappa^+ > S,\quad 2)\ A_2 = A_1 - \sum_{\kappa=1}^{n_2} U_\kappa^- < S,$$

$$3)\ A_3 = A_2 + \sum_{\kappa=n_1+1}^{n_3} U_\kappa^+ > S,\quad 4)\ A_4 = A_3 - \sum_{\kappa=n_2+1}^{n_4} U_\kappa^- < S,$$

. . . .

мүнасибәтләрини өдәјән ән кичик натурал $n_1, n_2, n_3, \ldots$ әдәдләрини сечмәк олар. Бу просес нәтичәсиндә алынан

$$U_1^+ + \cdots + U_{n_1}^+ - U_1^- - \cdots - U_{n_2}^- + U_{n_1+1}^+ + \cdots + U_{n_3}^+ - U_{n_2+1}^- - \cdots - U_{n_4}^- + \cdots \qquad (5)$$

сырасы S әдәдинә јығылыр. Доғрудан да, (5) сырасынын

$$S_{n_1},\ S_{n_1+n_2},\ S_{n_2+n_3},\ldots,\ S_{n_\kappa+n_{\kappa+1}},\ldots\ (\kappa=1,\ 2,\ldots)$$

хүсуси чәмләри ардычыллығы

$$\left|S - S_{n_\kappa+n_{\kappa+1}}\right| \leqslant U^{\pm}_{n_{\kappa+1}},$$

бәрабәрсизлиjини өдәjир вә $\lim_{\kappa\to\infty} U^{\pm}_{n_{\kappa+1}} = 0$ бәрабәрлиjинә әсасән S лимитинә јығылыр:

$$\lim_{\kappa\to\infty} S_{n_\kappa+n_{\kappa+1}} = S. \tag{6}$$

(5) сырасынын истәнилән S_n хүсуси чәми үчүн исә һәмишә елә $\kappa=\kappa(n)$ әдәди тапмаг олар ки,

$$S_{n_\kappa+n_{\kappa+1}} \leqslant S_n \leqslant S_{n_{\kappa+1}+n_{\kappa+2}}$$

вә ја

$$S_{n_\kappa+n_{\kappa+1}} \geqslant S_n \geqslant S_{n_{\kappa+1}+n_{\kappa+2}}$$

бәрабәрсизликләри өдәнилир. Онда (6) бәрабәрлиjинә әсасән

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

олар.

Мисал 1.

$$\frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n\ln n} + \cdots$$

сырасынын јығылмасыны тәдгиг етмәли.

Верилмиш сыранын өзү Лејбнис теоремлинә көрә (§ 4) јығыландыр. Һәдләринин мүтләг гиjмәтләриндән дүзәлмиш

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln n} + \cdots$$

сырасы исә дағылыр (§ 3, мисал 2). Демәли, верилмиш сыра шәрти јығыландыр.

Мисал 2. Шәрти јығылан

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots \tag{7}$$

сырасынын һәдләринин јерини дәјишдикдә чәминин дәјишдијини көстәрмәли.

Һәлли. (7) сырасынын өзү Лејбнис теореминә көрә јығыландыр, онун һәдләринин мүтләг гиjмәтләриндән дүзәлмиш

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

һармоник сыра исә дағыландыр. Демәли, (7) сырасы шәрти јығылыр. Онун чәмини S вә хүсуси чәмләрини S_n илә ишарә едәк:

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{\kappa=1}^{n}(-1)^{\kappa-1}\frac{1}{\kappa} = \lim_{n\to\infty}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\frac{1}{2\kappa-1} - \frac{1}{2\kappa}\right) = \lim_{n\to\infty} S_{2n}.$$

Инди (7) сырасынын һәдләринин јерини ашағыдакы кими дәјишәк:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \\ - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots \tag{8}$$

Бу сыранын σ_{3n} хүсуси чәминә бахаг:

$$\sigma_{3n} = \sum_{\kappa=1}^{n}\left(\frac{1}{2\kappa-1} - \frac{1}{4\kappa-2} - \frac{1}{4\kappa}\right) = \sum_{\kappa=1}^{n}\left(\frac{1}{4\kappa-2} - \frac{1}{4\kappa}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\frac{1}{2\kappa-1} - \frac{1}{2\kappa}\right) = \frac{1}{2} S_{2n}.$$

Демәли,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \frac{1}{2} S$$

олар. (8) сырасы чәминин $\frac{1}{2} S$ әдәди олмасы

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n} = \lim_{n\to\infty}\sigma_{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\sigma_{3n+2} = \frac{1}{2} S = \lim_{n\to\infty}\sigma_n$$

бәрабәрликләриндән ајдындыр.

Беләликлә, биз көстәрдик ки, шәрти јығылан (7) сырасынын һәдләринин јерини (8) шәклиндә дәјишдикдә онун чәми ики дәфә азалыр.

§ 7. СЫРАЛАРЫН ҺАСИЛИ

Тутаг ки, верилмиш

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \tag{1}$$

вә

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k \tag{2}$$

сыраларынын һәдләриндән

$$W_\kappa = U_1V_\kappa + U_2V_{\kappa-1} + \cdots + U_\kappa V_1 \; (\kappa = 1, 2, \ldots)$$

кими ифадәләр дүзәлдилмишдир. Бу һалда

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n + \cdots \tag{3}$$

сырасына (1) вә (2) сыраларынын һасили дејилир.

(1) вә (2) сыралары јығылан олдугда онларын һасили һәмишә јығыландырмы? Буну һәмишә демәк олмаз: јығылан сыраларын һасили дағылан да ола биләр. Лакин верилмиш јығылан сыраларын һеч олмаса бири мүтләг јығылан олдугда онларын һасили јығылан сыра олур.

Теорем. ***Мүтләг јығылан (1) вә (2) сыраларынын һасили олан (3) сырасы мүтләг јығыландыр вә онун чәми верилмиш (1) вә (2) сыраларынын чәмләри һасилинә бәрабәрдир.***

Исбаты. Әввәлчә (3) сырасынын мүтләг јығылдығыны исбат едәк. Бу мәгсәдлә

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} |U_k|, \quad \sigma_n^* = \sum_{k=1}^{n} |V_k|, \quad \zeta_n^* = \sum_{k=1}^{n} |W_k|$$

кәмиј̃јәтләри үчүн доғру олан

$$\zeta_n^* \leqslant S_n^* \cdot \sigma_n^* \tag{4}$$

бәрабәрсизлијиндән истифадә едәк. (1) вә (2) сырасы мүтләг јығылан олдуғундан елә $M > 0$ әдәди вар ки, $S_n^* \leqslant M$ вә $\sigma_n^* \leqslant M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ олар. Онда (4) бәрабәрсизлијиндән $\zeta_n^* \leqslant M^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ мүнасибәти алыныр ки, бу да мүсбәтһәдли $\sum_{k=1}^{\infty} |W_k|$ сырасынын јығылан олдуғуну көстәрир.

Демәли, (3) сырасы мүтләг јығыландыр. Мүтләг јығылан сыранын һәдләринин јерини истәнилән шәкилдә дәјишдирдикдә исә онун јығылмасы вә чәми дәјишмир (§ 5). Буна көрә дә (3) сырасыны

$$U_1V_1 + (U_1V_2 + U_2V_2 + U_2V_1) + (U_1V_3 + U_2V_3 + U_3V_3 + U_3V_2 + U_3V_1) + \cdots \tag{5}$$

шәклиндә јазсаг, бу сыранын чәми (3) сырасынын C чәминин ејни олар. (1) вә (2) сыраларынын чәми вә хүсуси чәми уј̃ғун олараг S, S_n вә σ, σ_n олсун. Бу һалда (5) сырасынын ән бөјүк индекси n олан һәдләр (јә'ни уј̃ғун һәлләр групу) дахил олан хүсуси чәмини Q_n илә ишарә етсәк, онда

$$Q_n = S_n \cdot \sigma_n$$

бәрабәрлији доғру олар. Бурадан

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} S_n \cdot \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

вә ја

$$Q = S \cdot \sigma$$

бәрабәрлији алыныр.

Мисал. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}$ вә $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{k-1}}{(k-1)!}$ сыраларынын һасилини тәдгиг етмәли.

Верилмиш сыралар a вә b әдәдләринин истәнилән гијмәтиндә мүтләг јығыландыр. Доғрудан да, Даламбер әламәтинә көрә

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \right| \text{ вә } \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{b^{k-1}}{(k-1)!} \right|$$

сыралары јығыландыр:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a^n (n-1)!}{a^{n-1} \cdot n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n} = 0 < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|V_{n+1}|}{|V_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b^n (n-1)!}{b^{n-1}\, n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|b|}{n} = 0 < 1.$$

Верилмиш сыраларын чәмини уј̃ғун олараг $\varphi(a)$ вә $\varphi(b)$ илә ишарә етсәк, онда һәмин сыраларын һасили

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = 1 + \left(\frac{a}{1} + \frac{b}{1}\right) + \left(\frac{a^2}{2!} + \frac{a}{1!} \cdot \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!}\right) + \cdots + \left(\frac{a^k}{k!} + \frac{a^{k-1} b}{(k-1)!\, 1!} + \cdots + \frac{b^k}{k!}\right) + \cdots$$

вә ја

$$\varphi(a)\, \varphi(b) = 1 + \frac{(a+b)}{1!} + \frac{(a+b)^2}{2!} + \cdots + \frac{(a+b)^n}{n!} + \cdots$$

олар. Бурадан

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a+b)$$

мүнасибәти алыныр.

§ 8. КОМПЛЕКС ҺӘДЛИ СЫРАЛАР

Фәрз едәк ки,

$$\{z_n\} \tag{1}$$

комплекс әдәдләр $(z_n = x_n + iy_n)$ ардычыллығыдыр. Бу ардычыллығын лимитинин комплекс $z = x + iy$ әдәди олмасы о демәкдир ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә N нөмрәси вар ки, n-ин $n \geqslant N$ гијмәтләриндә

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad (n \geqslant N)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу факты

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ вә ја } z_n \to z \ (n \to \infty) \tag{2}$$

кими јазырлар. Ајдындыр ки, (2) мүнасибәти

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$$

бәрабәрлији илә ејникүчлүдүр.

Сонлу лимити олан ардычыллыға *јығылан ардычыллыг* дејилир. Јығылан ардычыллыг мәһдуддур.

Лимитин тә'рифиндән ајдындыр ки,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = x + iy$$

мүнасибәти ики һәгиги

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

бәрабәрликләри илә ејникүчлүдүр. Буна көрә дә һәгиги әдәдләр ардычыллығынын лимити һаггында мә'лум олан тәклифләр (XII, §§ 1—4) уј̃ғун шәкилдә комплекс әдәдләр ардычыллыглары үчүн дә доғрудур.

Инди (1) ардычыллығынын һәдләриндән сыра дүзәлдәк:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{3}$$

(3) сырасынын

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

хүсуси чәмләри ардычыллығынын $n \to \infty$ шәртиндә сонлу

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

лимити варса, һәмин сыраја јығылан вә S әдәдинә онун чәми дејилир.

$$S = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{4}$$

(3) сырасы јығыландырса, онун үмуми һәддинин лимити сыфра бәрабәрдир: $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

$\{S_n\}$ ардычыллығынын һеч бир лимити олмадыгда вә ја лимити ∞ олдугда (3) сырасына *дағылан сыра* дејилир. Дағылан сыранын чәминдән данышмаг олмаз.

Теорем 1. *$z_n = x_n + iy_n$ олдугда (3) сырасынын јығылан олмасы үчүн $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ вә $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сыраларынын јығылан олмасы зәрури вә кафи шәртдир.*

Бу теоремин исбаты чох садә олдуғундан ону охучулара һәвалә едирик.

Бурадан ајдындыр ки, һәгиги әдәдләр сырасы һаггында мә'лум олан теоремләр ујғун шәкилдә комплекс әдәдләр сырасы һаггында да доғру олар.

Комплекс әдәдләр сырасына мисал олараг z комплекс әдәдләриндән дүзәлмиш һәндәси силсиләни көстәрмәк олар:

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \tag{5}$$

(5) сырасынын хүсуси чәми

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

вә

$$\lim_{n\to\infty} |z^n| = \lim_{n\to\infty} |z|^n = \begin{cases} 0, & |z| < 1 \text{ олдугда}, \\ \infty, & |z| > 1 \text{ олдугда}, \end{cases}$$

олдуғундан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & |z| < 1 \text{ олдугда}, \\ \infty, & |z| > 1 \text{ олдугда} \end{cases}$$

олар. $|z| = 1$ $(z \neq 1)$ олдугда z^n функсијасынын лимити јохдур.

Демәли, $|z| < 1$ олдугда (5) сырасы (силсиләси) јығылыр вә онун чәми $\frac{1}{1-z}$ комплекс әдәдинә бәрабәрдир:

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1).$$

$|z| \geqslant 1$ олдугда исә (5) сырасы дағылыр.

Теорем 2. *Верилмиш $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сырасынын һәдләринин модулундан дүзәлмиш $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сырасы јығыландырса, һәмин сыранын өзү дә јығыландыр.*

Исбаты. Мә'лумдур ки, $z_n = x_n + iy_n$ олдугда

$$|x_n| \leqslant |z_n| \text{ вә } |y_n| \leqslant |z_n|$$

олар. Мүсбәт һәдли сыраларын јығылмасы һаггындакы мүгајисә әламәтинә көрә $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ вә $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ сыралары јығыландыр. Бурадан (§ 5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ вә } \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

сыраларынын јығылан олмасы алыныр. Онда 1-чи теоремә көрә $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сырасы јығылан олар.

Теоремин тәрси доғру дејилдир. $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сырасынын јығылмасындан $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ сырасынын јығылмасы чыхмыр.

$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ сырасы јығылан олдугда (3) сырасына *мүтләг јығылан сыра* дејилир.

Сыраларын мүтләг јығылмасыны мажорант сыраларын јығылмасы илә мүәјјән етмәк олар. (3) сырасынын һәр бир һәдди модулча мүсбәтһәдли

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{6}$$

сырасынын ујғун һәддиндән бөјүк олмадыгда, јә'ни k-нын бүтүн гијмәтләриндә $|z_k| \leqslant a_k$ олдугда, (6) сырасына (3) сырасынын *мажоранты* дејилир.

Теорем 3. *Јығылан мажоранты олан сыра јығыландыр.*

Доғрудан да, k-нын бүтүн гијмәтләриндә $|z_k| \leqslant a_k$ бәрабәрсизлији өдәнилирсә вә (6) сырасы јығыландырса, онда мүгајисә әламәтинә көрә $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ сырасы јығылан олар. Бурадан, 2-чи теоремә көрә (3) сырасынын јығылмасы чыхыр.

Теорем 4. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *сырасынын мүтләг јығылан олмасы үчүн* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *вә* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ $(z_n = x_n + iy_n)$ *сыраларынын мүтләг јығылмасы зәрури вә кафи шәртдир.*

Теоремин доғрулуғу

$$|x_n| \leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n|$$

вә

$$|y_n| \leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n|$$

бәрабәрсизликләриндән вә мүсбәтһәдли сыраларын јығылмасы үчүн мүгајисә әламәтиндән ајдындыр.

Бу теоремдән алыныр ки, мүтләг јығылан комплекс һәдли сыранын һәдләринин јерини истәнилән шәкилдә дәјишдикдә алынан јени сыра јенә дә мүтләг јығыландыр вә онун чәми верилмиш сыранын чәминә бәрабәрдир.

XXXVI ФӘСИЛ

ФУНКСИОНАЛ АРДЫЧЫЛЛЫГЛАР ВӘ СЫРАЛАР

§ 1. ФУНКСИОНАЛ АРДЫЧЫЛЛЫҒЫН ЈЫҒЫЛМАСЫ

Һәдләри һәр һансы $E \subset (-\infty, \infty)$ чохлуғунда тә'јин олунмуш $\{f_n(x)\}$ вә ја

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \quad (1)$$

ардычыллығына *функсионал ардычыллыг* дејилир. (1) ардычыллығы x-ин һәр бир конкрет $x_0 \in E$ гијмәтиндә $\{f_n(x_0)\}$ әдәди ардычыллыға чеврилир.

$\{f_n(x_0)\}$ әдәди ардычыллығы јығылан олдугда (VII, § 1) (1) ардычыллығына x_0 нөгтәсиндә јығылан дејилир. Верилмиш чохлуғун һәр бир нөгтәсиндә јығылан ардычыллыға һәмин чохлугда *јығылан ардычыллыг* дејилир. E чохлуғунда јығылан (1) ардычыллығынын һәмин чохлуғун һәр бир $x \in E$ нөгтәсиндә сонлу $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ лимити вар.

Бу һалда $f(x)$ функсијасына $\{f_n(x)\}$ ардычыллығынын *лимит функсијасы* дејилир.

(1) ардычыллығынын $f(x)$ функсијасына јығылмасыны

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)$$

вә ја

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

кими јазырлар.

Функсионал ардычыллығын јығылма областындан да данышмаг олар.

Верилмиш функсионал ардычыллығын јығылан олдуғу бүтүн x нөгтәләри чохлуғуна һәмин ардычыллығын *јығылма областы* дејилир.

(1) ардычыллығынын E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына јығылмасы лимитин тә'рифинә көрә, о демәкдир ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N = N(\varepsilon, x)$ әдәди вар ки, n-нин бүтүн $n \geq N(\varepsilon, x)$ гијмәтләриндә

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (2)$$

бәрабәрсизлији бүтүн $x \in E$ нөгтәләриндә өдәнилир. Бурадан ајдындыр ки, ε әдәди верилдикдә һәр бир x нөгтәси үчүн һәмин нөгтәдән асылы $N(\varepsilon, x)$ әдәди сечилир.

Белә бир суал гаршыја чыхыр: верилмиш E чохлуғунун бүтүн нөгтәләри үчүн елә бир $N = N(\varepsilon)$ әдәди (әлбәттә, анчаг ε әдәдиндән асылы олан) тапмаг олармы ки, n-нин бүтүн $n \geq N$ гијмәтләриндә (2) бәрабәрсизлији өдәнилсин? Белә һал мүмкүндүр. Онда дејирләр ки, (1) ардычыллығы E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылыр.

Тә'риф. *Тутаг ки, верилмиш истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N = N(\varepsilon)$ әдәди вар ки, n-нин $n \geq N$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә вә E чохлуғунун бүтүн нөгтәләриндә (2) бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда дејирләр ки, (1) ардычыллығы E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылыр.*

$\{f_n(x)\}$ ардычыллығынын E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылмасыны

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (n \to \infty,\ x \in E)$$

кими јазырлар.

Ајдындыр ки, E чохлуғунда мүнтәзәм јығылан ардычыллыг һәмин чохлуғун һәр бир нөгтәсиндә (јә'ни һәмин чохлугда) јығыландыр. Бунун тәрси доғру дејилдир. Верилмиш чохлугда јығылан ардычыллыг һәмин чохлугда мүнтәзәм јығылмаја да биләр. Мәсәлән,

$$x^2, x^4, \ldots, x^{2n}, \ldots \quad (3)$$

ардычыллығы $[-1,1]$ парчасында јығыландыр. Онун лимити

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \text{ олдугда}, \\ 1, & x = \pm 1 \text{ олдугда} \end{cases}$$

функсијасыдыр. $\varphi(x)$ лимит функсијасы $[-1,1]$ парчасынын $x = \pm 1$ нөгтәләриндә кәсиләндир. (3) ардычыллығы $[-1,1]$ парчасында мүнтәзәм јығылан дејилдир.

Буну исбат етмәк үчүн әксини фәрз едәк ки, (3) ардычыллығы $[-1,1]$ парчасында мүнтәзәм јығыландыр. Онда истәнилән $\varepsilon > 0$ $\left(\text{мәсәлән, } \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$ әдәди үчүн елә $N = N(\varepsilon)$ әдәди вар ки, n-ин $n \geq N$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| = |x^{2n} - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (4)$$

бәрабәрсизлији x-ин бүтүн $-1 < x < 1$ гијмәтләриндә өдәнилир. (4) бәрабәрсизлијинин өдәнилдији n әдәдини гејд едәк

вә x әвәзинә $[-1,1]$ парчасында јерләшән $x_0=\sqrt[2n]{2\varepsilon}$ гијмәтини $\left(\varepsilon<\frac{1}{2},\ 2\varepsilon<1 \text{ вә } x_0=\sqrt[2n]{2\varepsilon}<1\right)$ јазаг:

$$|x_0^{2n}-\varphi(x_0)|<\varepsilon.$$

$0<x_0<1$ олдуғундан $\varphi(x_0)=0$ олар вә сонунҹу бәрабәрсизликдән

$$\varepsilon>|x_0^{2n}-\varphi(x_0)|=x_0^{2n}=2\varepsilon>\varepsilon$$

зиддијјәти алынар. Бу зиддијјәт фәрзијјәмизин доғру олмадығыны, јә'ни (3) ардычыллығынын $[-1,1]$ парчасында мүнтәзәм јығылан олмадығыны көстәрир.

§ 2. ФУНКСИОНАЛ СЫРАЛАРЫН ЈЫҒЫЛМАСЫ

Сыранын һәдләри һәр һансы $E\subset(-\infty,\infty)$ чохлуғунда тә'јин олунмуш $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ функсијалары олдугда, јә'ни сыра

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots \qquad (1)$$

шәклиндә олдугда, она *функсионал сыра* дејилир. (1) функсионал сырасынын јығылмасы онун

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x),\quad n=1,2,\ldots \qquad (2)$$

хүсуси ҹәмләринин јығылмасы илә тә'јин олунур.

Тә'риф 1. *(1) функсионал сырасынын $\{S_n(x)\}$ хүсуси ҹәмләри ардычыллығы $x\in E$ нөгтәсиндә јығылан олдугда она һәмин нөгтәдә јығылан сыра дејилир. Хүсуси ҹәмләр ардычыллығынын*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x) \qquad (3)$$

лимити сыранын ҹәми адланыр вә

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\ldots \qquad (4)$$

кими јазылыр.

Верилмиш чохлуғун һәр бир нөгтәсиндә јығылан сыраја һәмин чохлугда јығылан сыра дејилир. Сыранын јығылдығы нөгтәләр чохлуғу онун *јығылма областы* адланыр. Сыранын јығылмасына мүхтәлиф јығылма әламәтләрини тәтбиг етмәклә бә'зән онун јығылма областыны тапмаг мүмкүн олур.

Мисал 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сырасынын јығылма областыны тапмалы.

Сыранын һәдләринин мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$ сырасына лимит шәклиндә Даламбер әламәтини тәтбиг едәк:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1.$$

Демәли, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ сырасы x-ин бүтүн гијмәтләриндә јығылыр. Онда верилмиш сыра да x-ин бүтүн гијмәтләриндә (XXXV, § 5) јығылан олар. Бурадан ајдындыр ки, верилмиш сыранын јығылма областы бүтүн әдәд оху, јә'ни $(-\infty,\infty)$ интервалыдыр.

Мисал 2. Мүсбәтһәдли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ сырасынын јығылма областыны да лимит шәклиндә Даламбер әламәти васитәсилә тапмаг олар:

$$l=\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^{2n}}=x^2.$$

Бурадан ајдындыр ки, верилмиш сыра $x^2<1$ вә ја $|x|<1$ олдугда јығылан, $x^2>1$ вә ја $|x|>1$ олдугда исә дағыландыр. Сыра $x=\pm1$ нөгтәләриндә дә дағыландыр. Демәли, бахылан сыранын јығылма областы $(-1,1)$ интервалыдыр.

Фәрз едәк ки, (1) сырасы E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына јығылыр, јә'ни E чохлуғунун һәр бир нөгтәсиндә

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

олур. Лимитин тә'рифинә көрә бу о демәкдир ки, истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $N=N(\varepsilon,x)$ нөмрәси вар ки, n-ин бүтүн $n\geq N$ гијмәтләриндә

$$|S_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (5)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. E чохлуғунун бүтүн нөгтәләри үчүн бу тә'рифин тәләбини өдәјән вә анҹаг ε әдәдиндән асылы олан бир $N=N(\varepsilon)$ әдәди тапмаг мүмкүн олдугда, дејирләр ки, (1) сырасы E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылыр.

Тә'риф 2. *Тутаг ки, верилмиш истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $N=N(\varepsilon)$ нөмрәси вар ки, n-нин $n>N$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә вә E чохлуғунун бүтүн нөгтәләриндә (5) бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда дејирләр ки, (1) сырасы E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылыр.*

Демәли, (1) сырасынын E чохлуғунда јығылмасы вә мүнтәзәм јығылмасы онун хүсуси ҹәмләр ардычыллығынын ујғун

оларaг, E чохлуғунда јығылмасы вә мүнтәзәм јығылмасына еквивалентдир.

Үмумиjјәтлә, верилмиш
$$S_1(x),\ S_2(x),\ \dots,\ S_n(x),\ \dots \qquad (6)$$
ардычыллығы илә һәмин ардычыллыгдан дүзәлмиш
$$S_1(x) + [S_2(x) - S_1(x)] + \cdots + [S_n(x) - S_{n-1}(x)] + \cdots \qquad (7)$$
сырасынын јығылмасы еквивалентдир. (6) ардычыллығынын һәдләри (7) сырасынын ујғун хүсуси чәмләридир. Ајдындыр ки, (6) ардычыллығы (мүнтәзәм) јығыландырса, (7) сырасы да (мүнтәзәм) јығыландыр вә тәрсинә, (7) сырасы (мүнтәзәм) јығыландырса, (6) ардычыллығы да (мүнтәзәм) јығыландыр.

Демәли, верилмиш ардычыллығын јығылмасы мәсәләси һәмишә ујғун сыранын јығылмасы мәсәләсинә вә тәрсинә, верилмиш сыранын јығылмасы мәсәләси ујғун ардычыллығын јығылмасы мәсәләсинә кәтирилә биләр. Буна көрә дә кәләчәкдә, әсасән, функсионал сыраларын јығылмасы мәсәләси тәдгиг едилир.

Ајдындыр ки, E чохлуғунда мүнтәзәм јығылан сыра һәмин чохлуғун һәр бир нөгтәсиндә дә (јә'ни һәмин чохлугда да) јығыландыр. Бунун тәрси доғру дејилдир. Верилмиш чохлугда јығылан сыра һәмин чохлугда мүнтәзәм јығылмаја да биләр. Мәсәлән,
$$x^2 + (x^4 - x^2) + \cdots + (x^{2n} - x^{2n-2}) + \cdots$$
сырасы $[-1,1]$ парчасында јығыландыр. Онун чәми
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=2}^{n}(x^{2k} - x^{2k-2}) + x^2\right] = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases}0, & -1<x<1 \ \text{олдугда}\\ 1, & x=\pm1 \ \text{олдугда}\end{cases}$$
функсијасыдыр. Лакин сыра $[-1,1]$ парчасында мүнтәзәм јығылан дејилдир (§ 1).

Һәр бир $[-a, a]$ $(0<a<1)$ парчасында исә (6) сырасы мүнтәзәм јығыландыр.

(2) вә (4) бәрабәрликләринә көрә
$$f(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots$$
олар. Бу фәргә (1) сырасынын галығы дејилир вә
$$r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots$$
илә ишарә олунур. Бурадан ашағыдакы бәрабәрлик алыныр:
$$f(x) = S_n(x) + r_n(x). \qquad (8)$$
Демәли, (1) сырасынын E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына јығылан олмасы үчүн һәмин чохлуғун бүтүн нөгтәләриндә
$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$$
мүнасибәтинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир. (1) сырасы E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылан ол-

дугда исә (5) бәрабәрсизлији әвәзинә
$$|r_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geq N)$$
бәрабәрсизлији һәмин чохлуғун бүтүн нөгтәләриндә өдәниләр.

Функсионал сыранын верилмиш нөгтәдә мүтләг јығылмасындан да данышмаг олар.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ әдәди сырасы мүтләг јығылан олдугда (1) сырасына x_0 *нөгтәсиндә мүтләг јығылан сыра* дејилир. Верилмиш E *чохлуғунун һәр бир нөгтәсиндә мүтләг јығылан сыра һәмин чохлугда мүтләг јығылан сыра адланыр.* E чохлуғунда мүтләг јығылан сыра һәмин чохлуғун һәр бир нөгтәсиндә дә јығыландыр (XXXV, § 5). Бунун тәрси исә доғру дејилдир. Верилмиш нөгтәдә јығылан сыра һәмин нөгтәдә мүтләг јығылмаја да биләр (јә'ни шәрти јығылар).

Мисал 3.
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (9)$$
сырасы (XXXV, § 1, мисал 2) x-ин бүтүн $|x|<1$ гијмәтләриндә јығыландыр вә онун чәми $\frac{1}{1-x}$ функсијасыдыр:
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$
Верилмиш сыра x-ин бүтүн $|x| \geq 1$ гијмәтләриндә дағыландыр. Демәли, сыранын јығылма областы $(-1,1)$ интервалыдыр. Ајдындыр ки, x-ин һәр бир $|x|<1$ гијмәтиндә
$$1 + |x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n + \cdots$$
сырасы да јығыландыр. Бу көстәрир ки, (9) сырасы $(-1,1)$ интервалында мүтләг јығыландыр.

§ 3. КОШИ КРИТЕРИСИ

Функсионал сыраларын вә ардычыллыгларын верилмиш чохлугда мүнтәзәм јығылмасы һаггында ән күчлү тәклиф Коши критерисидир. Коши критериси васитәсилә мүнтәзәм јығылма һаггында башга даһа инчә тәклифләр дә исбат етмәк олар.

Коши критериси (сыраларын мүнтәзәм јығылмасы һаггында). Функсионал
$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \qquad (1)$$
сырасынын E чохлуғунда мүнтәзәм јығылан олмасы үчүн ашағыдакы шәртин өдәнилмәси зәрури вә кафидир: истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $N=N(\varepsilon)>0$ вар ки, n-ин $n \geq N$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари натурал гијмәтләриндә вә истәнилән натурал p

әдәди $(p = 1, 2, \ldots)$ үчүн

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

бәрабәрсизлији x-ин E чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә өдәнилир.

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, (1) сырасы E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылыр, јә'ни сыранын $\{S_n(x)\}$ хүсуси чәмләри ардычыллығы E чохлуғунда $f(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылыр: $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty, x \in E)$. Онда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N(\varepsilon)$ вар ки, n-нин $n \geqslant N(\varepsilon)$ гијмәтләриндә вә ихтијари $p \geqslant 1$ әдәди үчүн

$$|S_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |S_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бәрабәрсизликләри x-ин E чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә өдәнилир. Бурадан (2) бәрабәрсизлији алыныр:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leqslant |S_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - S_n(x)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, (2) бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда (1) сырасы әдәди сыраларын јығылмасы һаггындакы Коши критерисинә (XXXV, § 2) көрә ихтијари $x \in E$ нөгтәсиндә јығылыр. (1) сырасынын $x \in E$ нөгтәсиндә чәми $f(x)$ олсун. Гејд олунмуш x нөгтәси оларағ E чохлуғунун ихтијари нөгтәсини көтүрмәк олар. Бурадан ајдындыр ки, (1) сырасы E чохлуғунун бүтүн нөгтәләриндә јығыландыр.

(2) бәрабәрсизлијиндә $p \to \infty$ шәртиндә лимитә кечдикдә n-ин $n \geqslant N$ гијмәтләриндә вә x-ин E чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә доғру олан

$$|S_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

бәрабәрсизлији алыныр ки, бу да

$$S_n(x) \rightrightarrows f(x) \ (n \to \infty, \ x \in E)$$

олдуғуну, јә'ни (1) сырасынын E чохлуғунда мүнтәзәм-јығылдығыны көстәрир.

Исбат етдијимиз тәклифи

$$S_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [S_{k+1}(x) - S_k(x)] \qquad (3)$$

функсионал сырасынын мүнтәзәм јығылмасына тәтбиг етсәк вә (3) сырасынын k-чы хүсуси чәминин $S_k(x)$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots \qquad (4)$$

функсионал ардычыллығынын E чохлуғунда мүнтәзәм јығылмасы һаггында ашағыдакы тәклифи аларыг.

***Коши критериси** (ардычыллыгларын мүнтәзәм јығылмасы һаггында). (4) ардычыллығынын E чохлуғунда мүнтәзәм јығылан олмасы үчүн ашағыдакы шәртин өдәнилмәси зәрури вә кафидир: истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N = N(\varepsilon) > 0$ вар ки, n-ин $n \geqslant N$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари натурал гијмәтләриндә вә истәнилән натурал p әдәди үчүн*

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији x-ин E чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә өдәнилир.

§ 4. СЫРАНЫН МҮНТӘЗӘМ ЈЫҒЫЛМАСЫ ҺАГГЫНДА ВЕЈЕРШТРАС ӘЛАМӘТИ

Верилмиш областда сыраларын мүнтәзәм јығылмасыны јохламаг үчүн мүхтәлиф садә әламәтләрдән дә истифадә олунур. Бунларын бири бурада көстәрилир.

Тутаг ки,

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \qquad (1)$$

функсионал сырасынын һәр бир һәдди x-ин E чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә

$$|f_n(x)| \leqslant \alpha_n, \ n = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

бәрабәрсизлијини өдәјир. Онда мүсбәтһәдли

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots \qquad (3)$$

сырасына (1) сырасынын E чохлуғунда *мажоранты дејилир.*

Ајдындыр ки, (1) сырасынын E чохлуғунда јығылан мажоранты варса, онда һәмин сыра E чохлуғунда мүтләг јығыландыр. Доғрудан да, (2) мүнасибәти өдәнилирсә вә (3) сырасы јығыландырса, онда мүгајисә әламәтинә көрә $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сырасы јығылан олар. Бу исә (1) сырасынын E чохлуғунда мүтләг јығылдығыны көстәрир.

Мүтләг јығылан сыра исә јығыландыр. Демәли, (1) сырасынын E чохлуғунда јығылан (3) мажоранты варса, онда һәмин сыра E чохлуғунда мүәјјән $S(x)$ чәминә јығылыр. (1) сырасынын E чохлуғунда $S(x)$ чәминә мүнтәзәм јығылмасы һаггында нә демәк олар?

Теорем (**Вејерштрасс әламәти**). ***Һәр һансы чохлуғда јығылан мажоранты олан функсионал сыра һәмин чохлуғда мүнтәзәм јығыландыр.***

Исбаты. Тутаг ки, (1) сырасынын E чохлуғунда мажоранты олан (3) сырасы јығыландыр. Онда (1) сырасы E чохлуғунда мүнтәзәм јығылан олар.

Доғрудан да, (3) әдәди сырасы јығылан олдуғундан онун галығынын лимити сыфра бәрабәрдир: $\lim_{n \to \infty} r_n = 0$. Бу көстә-

рир ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N = N(\varepsilon)$ нөмрәси вар ки, n-нин бүтүн $n \geqslant N$ гијмәтләриндә

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots < \frac{\varepsilon}{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда истәнилән $m > n \geqslant N$ әдәдләри вә (1) сырасынын $S_n(x)$ вә $S_m(x)$ хүсуси ҹәмләри үчүн

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{m} a_k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

вә ја

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

бәрабәрсизлији x-ин E чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә доғру олар. (4) бәрабәрсизлијиндә $m \to \infty$ шәртиндә лимитә кечсәк вә $\lim\limits_{m\to\infty} S_m(x) = S(x)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда x-ин E чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә доғру олан

$$|S(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

бәрабәрсизлијини аларыг ки, бу да (1) сырасынын E чохлуғунда $S(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылдығыны көстәрир.

Вејерштрас әламәтиндә функсионал сыранын мүнтәзәм јығылмасы үчүн кафи шәрт көстәрилир. Функсионал сыранын јығылан мажорантынын олмасы онун мүнтәзәм јығылмасы үчүн зәрури шәрт дејилдир. Верилмиш чохлугда мүнтәзәм јығылан сыранын јығылан мажоранты олмаја да биләр. Мәсәлән,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2} \qquad (5)$$

сырасы бүтүн әдәд охунда мүнтәзәм јығыландыр, лакин онун јығылан мажоранты јохдур.

Доғрудан да, Лејбнис теореминә (§ 4) көрә ишарәсини нөвбә илә дәјишән (5) сырасы x-ин бүтүн гијмәтләриндә јығыландыр вә онун галығы үчүн

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{x^2 + n + 1} \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad (6)$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Бурадан ајдындыр ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн елә N вар ки, $n \geqslant N$ олдугда x-ин бүтүн гијмәтләриндә

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad (n > N)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир, јә'ни (5) сырасы бүтүн әдәд охунда мүнтәзәм јығыдыр. Лакин (5) сырасы x-ин һеч бир гијмәтиндә мүтләг јығылмыр: мүсбәтһәдли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + x^2}$ сырасы x-ин бүтүн гијмәтләриндә дағылыр.

Јығылан мажоранты олан функсионал сыранын мүтләг јығылан олмасындан чыхыр ки, (5) сырасынын јығылан мажоранты ола билмәз.

Мисал 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \text{ вә } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha} \quad (\alpha > 1)$$

сыралары бүтүн әдәд охунда мүнтәзәм јығыландыр.

Доғрудан да, x-ин бүтүн гијмәтләриндә

$$\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}, \quad \left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

бәрабәрсизликләри өдәнилдијиндән $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сырасы верилмиш сыраларын мажорантыдыр. Мажорант сыра јығылан олдуғундан Вејерштрасс әламәтинә көрә верилмиш сыралар бүтүн әдәд охунда мүнтәзәм јығыландыр.

Мисал 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ сырасы $[-1,1]$ парчасында мүнтәзәм јығыландыр.

Бу тәклифин доғрулуғу x-ин $[-1,1]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

бәрабәрсизлијинин өдәнилмәсиндән вә $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ мажорант сырасынын јығылмасындан ајдындыр.

§ 5. ДИРИХЛЕ ӘЛАМӘТИ

Коши критерисини тәтбиг етмәклә функсионал сыраларын (вә ардычыллыгларын) мүнтәзәм јығылмасы һаггында башга тәклифләр дә исбат етмәк олар. Бу тәклифләрин исбаты сыраларын Абел* чевирмәсинә әсасланыр.

Тутаг ки, E чохлуғунда тә'јин олунмуш функсијалар ардычыллығы $\{a_k(x)\}$ вә

$$\beta_1(x) + \beta_2(x) + \cdots + \beta_n(x) + \cdots \qquad (1)$$

сырасы верилмишдир. Бу сыранын хүсуси ҹәмләрини $B_n(x)$

* Абел Нилс Һенрих (1802—1829) Норвеч ријазијјатчысыдыр.

илә ишарә едәк:

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(x) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Онда $\beta_k(x) = B_k(x) - B_{k-1}(x)$ олар.

Инди

$$\alpha_1(x)\beta_1(x) + \alpha_2(x)\beta_2(x) + \cdots + \alpha_k(x)\beta_k(x) + \cdots \tag{3}$$

сырасы һәдләринин

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)\beta_k(x) \tag{4}$$

чәмини ашағыдакы кими чевирәк:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)\beta_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)\left[B_k(x) - B_{k-1}(x)\right] =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)B_k(x) - \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_{k+1}(x)B_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1}[\alpha_k(x) - \tag{5}$$

$$- \alpha_{k+1}(x)]B_k(x) + \alpha_{n+p}(x)B_{n+p}(x) - \alpha_{n+1}(x)B_n(x).$$

(4) чәминин belә чеврилмәсинә *Абел чевирмәси* дејилир. Бу чевирмә һиссә-һиссә интеграллама дүстурунун аналогудур.

Теорем (Дирихле[1] әламәти). ***(1) сырасынын хүсуси чәмләри E чохлуғунда мәһдуд***

$$|B_k(x)| \leqslant M < +\infty, \quad x \in E, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

$\{\alpha_k(x)\}$ ардычыллығы исә E чохлуғунда артмајан вә сыфра мүнтәзәм јығылан олдуғда (3) сырасы E чохлуғунда мүнтәзәм јығылыр.

Исбаты. $\{\alpha_k(x)\}$ ардычыллығы артмајан

$$\alpha_1(x) \geqslant \alpha_2(x) \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n(x) \geqslant \alpha_{n+1}(x) \geqslant \cdots$$

вә сыфра мүнтәзәм јығылан $\alpha_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty,\ x \in E)$ олдуғундан ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N = N(\varepsilon)$ вар ки, n-нин $n \geqslant N$ гијмәтләриндә

$$\varepsilon_{n+1} = \sup_{x \in E} \alpha_{n+1}(x) < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{7}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Онда (5) бәрабәрлијиндән (6) вә (7) бәрабәрсизликләринә көрә x-ин бүтүн $x \in E$ вә $n \geqslant N$ гијмәтләриндә

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)\beta_k(x)\right| \leqslant M\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x)) + \right.$$

$$\left. + \alpha_{n+p}(x) + \alpha_{n+1}(x)\right| = 2M\alpha_{n+1}(x) \leqslant 2M\varepsilon_{n+1} < \varepsilon$$

[1] Дирихле Петер Густав Лежен (1805—1859) алман ријазијјатчысыдыр.

мүнасибәти алыныр. Демәли, (3) сырасы үчүн Коши критериsинин шәртләри өдәнилир. Буна көрә дә (3) сырасы E чохлуғунда мүнтәзәм јығыландыр.

Мисал.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha} \quad (\alpha > 0) \tag{8}$$

сыраларынын мүнтәзәм јығылмасыны тәдгиг етмәли.

(8) сыраларынын бүтүн әдәд охунда $\alpha > 1$ олдугда мүнтәзәм јығылан олмасы мә'лумдур (§ 3).

(8) сыраларынын α-нын $0 < \alpha \leqslant 1$ гијмәтләриндә мүнтәзәм јығылмасы Дирихле әламәтинә әсасән тәдгиг едилир. Бу мәгсәдлә

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} = D_n(x), \tag{9}$$

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = K_n(x) \tag{10}$$

дүстурларындан истифадә олунур. Бу дүстурларын доғрулуғуна инанмаг үчүн

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} =$$

$$= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} + i\,\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

бәрабәрлијиндә һәгиги вә хәјали һиссәләри ајырмаг вә онлары ујғун олараг бир-биринә бәрабәр һесаб етмәк лазымдыр.

(9) вә (10) бәрабәрликләриндән ајдындыр ки,

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx + \cdots, \tag{11}$$

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx + \cdots \tag{12}$$

сыраларынын $D_n(x)$ вә $K_n(x)$ хүсуси чәмләри истәнилән $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ парчасында $(0 < \varepsilon < 2\pi - \varepsilon < 2\pi)$ мәһдуддур:

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}, \quad |K_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Бундан башга, $\alpha_k(x) = \frac{1}{k^\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ ардычыллығы монотон азаландыр: $\alpha_k(x) \geqslant \alpha_{k+1}(x)$ вә $k \to \infty$ шәртиндә сыфра јығылыр.

Инди нөвбә илә $\beta_к(x) = \cos кx$ вә $\beta_к(x) = \sin кx$ көтүрмәклә (8) сыраларына $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ парчасында Дирихле әламәтини тәтбиг етмәк олар. Нәтичәдә (8) сыраларынын $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ парчасында мүнтәзәм јығылан олдуғу алыныр.

§ 6. СЫРА ЧӘМИНИН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Мә'лумдур ки, сонлу сајда кәсилмәз функсијаларын чәми кәсилмәз функсијадыр (XIII, § 3). Бу хассә сонсуз сајда функсијаларын чәми (јә'ни сыра чәми) үчүн доғру олмаја да биләр. Лакин мүнтәзәм јығылан кәсилмәз функсијалар сырасынын чәми кәсилмәз функсијадыр.

Т е о р е м 1. ***Һәдләри $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијалар олан вә һәмин парчада мүнтәзәм јығылан***

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \qquad (1)$$

функсионал сырасынын чәми $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функсијадыр.

И с б а т ы. (1) сырасынын чәми $f(x)$, хүсуси чәми $S_n(x)$ вә галығы $r_n(x)$ оларса,

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \qquad (2)$$

олар (§ 2). $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасынын истәнилән $x \in [a, b]$ нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну исбат етмәк үчүн һәмин нөгтәдә аргументә Δx $(x + \Delta x \in [a, b])$ артымы верәк. Онда (2) бәрабәрлијинә көрә

$$f(x + \Delta x) - f(x) = [S_n(x + \Delta x) - S_n(x)] + r_n(x + \Delta x) - r_n(x)$$

олар. Бурадан

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leqslant |S_n(x + \Delta x) - S_n(x)| + $$
$$+ |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)| \qquad (3)$$

бәрабәрсизлији алыныр.

Шәртә көрә $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty,\ x \in [a, b])$ олдуғундан ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N(\varepsilon)$ вар ки, n-нин $n \geqslant N$ гијмәтләриндә

$$|r_n(x)| = |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon_3, \qquad (4)$$

$$|r_n(x + \Delta x)| = |f(x + \Delta x) - S_n(x + \Delta x)| < \varepsilon/_3 \qquad (5)$$

бәрабәрсизликләри өдәниләр.

Дикәр тәрәфдән, һәр бир $n \geqslant N$ үчүн верилмиш x нөгтәсиндә кәсилмәјән сонлу n сајда функсијаларын чәми олан $S_n(x)$ функсијасы һәмин нөгтәдә кәсилмәјәндир. Буна көрә дә ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $|\Delta x| < \delta$ олдугда

$$|S_n(x + \Delta x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (6)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

(3), (4), (5) вә (6) бәрабәрсизликләринә көрә $|\Delta x| < \delta$ олдугда

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon/_3 + \varepsilon/_3 + \varepsilon/_3 = \varepsilon$$

алынар. Бу исә $f(x)$ функсијасынын истәнилән $x \in [a, b]$ нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну көстәрир.

Теоремин доғрулуғу үчүн сыранын мүнтәзәм јығылмасы әсас шәртдир. Мәсәлән, $[-1, 1]$ парчасында кәсилмәјән функсијалардан дүзәлмиш

$$x^2 + (x^4 - x^2) + \cdots + (x^{2n} - x^{2n-2}) + \cdots \qquad (7)$$

сырасы $[-1, 1]$ парчасында јығыландыр (§ 2), лакин онун чәми кәсилән функсијадыр:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \quad \text{олдугда,} \\ 1, & x = \pm 1 \quad \text{олдугда.} \end{cases}$$

(7) сырасы $[-1, 1]$ парчасында мүнтәзәм јығылан дејилдир.

Г е ј д. Теоремин һөкмүнү истәнилән $x_0 \in [a, b]$ нөгтәси үчүн

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{к=1}^{\infty} f_к(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \sum_{к=1}^{\infty} f_к(x_0) = \sum_{к=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_к(x)$$

кими јазмаг олар. Бу көстәрир ки, теоремин шәртләри өдәнилдикдә (1 сырасында һәдбәһәд лимитә кечмәк олар, јә'ни мүнтәзәм јығылан кәсилмәјән функсијалар сырасы чәминин лимити, сыранын һәдләринин лимитләриндән дүзәлмиш сыранын чәминә бәрабәрдир:

$$\lim_{x \to x_0} \left[\sum_{к=1}^{\infty} f_к(x)\right] = \sum_{к=1}^{\infty} [\lim_{x \to x_0} f_к(x)].$$

Исбат едилмиш теоремдән функсионал ардычыллыглар үчүн ашағыдакы тәклиф алыныр:

Т е о р е м 2. ***Һәдләри $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијалар олан вә һәмин парчада мүнтәзәм јығылан $\{S_n(x)\}$ функсионал ардычыллығынын лимити $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функсијадыр.***

Бу теоремин һөкмүнү истәнилән $x_0 \in [a, b]$ нөгтәси үчүн

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} S_n(x)$$

кими јазмаг, јә'ни x вә n дәјишәнләринә көрә лимитләрин јерини дәјишмәк олар.

§ 7. СЫРАНЫН ҺӘДБӘҺӘД ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Т е о р е м 1. ***Тутаг ки, һәдләри $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијалар олан***

$$\sum_{к=1}^{\infty} f_к(t) \qquad (1)$$

ырасы һәмин парчада мүнтәзәм јығыландыр вә $f(t)$ функсијасы онун чәмидир.

Онда

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\int_a^x f_\kappa(t)\,dt,\quad a\leqslant x\leqslant b \qquad (2)$$

сырасы да һәмин парчада мүнтәзәм јығыландыр вә

$$\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x\left[\sum_{\kappa=1}^{\infty} f_\kappa(t)\right]dt=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\int_a^x f_\kappa(t)\,dt \qquad (3)$$

бәрабәрлији доғрудур, јә'ни (1) сырасыны $[a, x]$ парчасы үзрә һәдбәһәд интеграллaмаг олар.

Исбаты. (1) сырасы $[a, b]$ парчасында мүнтәзәм јығылдығындан вә һәлләри кәсилмәјән функсијалар олдуғундан, онун $f(t)$ чәми һәмин парчада кәсилмәјән функсија олар (§ 5). Бу сыранын хүсуси чәмини

$$S_n(t)=\sum_{\kappa=1}^{n} f_\kappa(t)$$

илә ишарә етсәк, онда $S_n(t)\rightrightarrows f(t)$ $(n\to\infty,\ t\in[a,b])$ олдуғундан ихтијари $\varepsilon/(b-a)$ әдәди үчүн елә N_0 нөмрәси вар ки,

$$|S_n(t)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

бәрабәрсизлији n-нин $n\geqslant N_0$ гијмәтләриндә вә t-нин бүтүн $t\in[a,b]$ гијмәтләриндә өдәнилир. Бу һалда, n-нин $n\geqslant N_0$ вә x-ин $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt-\sum_{\kappa=1}^{n}\int_a^x f_\kappa(t)\,dt\right|=\left|\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^x S_n(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^x|f(t)-S_n(t)|\,dt\leqslant\int_a^b|f(t)-S_n(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dt=\varepsilon$$

олар, јә'ни (2) сырасы $[a, b]$ парчасында $\int_a^x f(t)\,dt$ функсијасына мүнтәзәм јығылыр:

$$\left\{\sum_{\kappa=1}^{n}\int_a^x f_\kappa(t)\,dt\right\}\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,dt\quad (n\to\infty,\ x\in[a,b]).$$

Бурадан (3) бәрабәрлијинин доғрулуғу ајдындыр.

Бу теоремдән функсионал ардычыллыг үчүн ашағыдакы тәклиф алыныр:

Теорем 2. *Һәдләри $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијалар олан вә һәмин парчада $S(t)$ функсија-*

сына мүнтәзәм јығылан $\{S_n(t)\}$ ардычыллығы үчүн

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x S_n(t)\,dt\rightrightarrows\int_a^x S(t)\,dt \qquad (4)$$

бәрабәрлији (x-ә нәзәрән мүнтәзәм) доғрудур, јә'ни $\int_a^x S_n(t)\,dt$ интегралы алтында лимитә кечмәк олар:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x S_n(t)\,dt=\int_a^x\left[\lim_{n\to\infty} S_n(t)\right]dt.$$

Ардычыллығын мүнтәзәм јығылмасы (4) бәрабәрлијинин доғрулуғу үчүн кафи шәрт олуб, зәрури шәрт дејилдир.

Мәсәлән, $S_n(t)=t^n$ ардычыллығы $[0, 1]$ парчасында

$$S(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<1 \text{ олдугда},\\ 1, & t=1 \text{ олдугда}\end{cases}$$

функсијасына јығылыр, лакин мүнтәзәм јығылмыр, буна бахмајараг (4) бәрабәрлији доғрудур:

$$\int_0^x t^n\,dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}\to 0=\int_0^x S(t)\,dt\quad (n\to\infty).$$

§ 8. СЫРАНЫН ҺӘДБӘҺӘД ДИФЕРЕНСИАЛЛАНМАСЫ

Тутаг ки, $f_\kappa(x)$ $(\kappa=1,2,\ldots)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында диференсиалланандыр вә төрәмәләрдән дүзәлмиш

$$f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_\kappa'(x)+\cdots \qquad (1)$$

сырасы јығылыр. Бу һалда,

$$\left[\sum_{\kappa=1}^{\infty} f_\kappa(x)\right]'=\sum_{\kappa=1}^{\infty} f_\kappa'(x) \qquad (2)$$

бәрабәрлији доғрудурса, онда дејирләр ки,

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_\kappa(x)+\cdots \qquad (3)$$

сырасыны һәдбәһәд диференсиалламаг олар.

(1) сырасынын јығылмасы (2) бәрабәрлијинин доғрулуғу үчүн кифајәт дејилдир. Бунун үчүн бир сыра әлавә шәртләр дә өдәнилмәлидир.

Теорем 1. *Тутаг ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәз төрәмәләри олан $f_\kappa(x)$ $(\kappa=1,2,\ldots)$ функсијаларынын (3) сырасы һеч олмаса бир $x_0\in[a,b]$ нөгтәсиндә јығылыр вә (1) сырасы $[a, b]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр. Онда (3) сырасы да һәмин парчада мүнтәзәм јығылыр вә ону һәдбәһәд диференсиалламаг олар.*

Исбаты. (3) сырасынын чәмини $f(x)$ илә, (1) сырасынын чәмини исә $\sigma(x)$ илә ишарә едәк: $\sigma(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} f'_\kappa(x)$.

(1) сырасы $[a, b]$ парчасында мүнтәзәм јығылан олдуғундан, ону һәдбәһәд интегралламаг олар (§ 6):

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f'_\kappa(t)\,dt = \sum_{\kappa=1}^{\infty} [f_\kappa(x) - f_\kappa(x_0)] \quad (a \leqslant x \leqslant b). \qquad (4)$$

Бурада алынан $\sum_{\kappa=1}^{\infty} [f_\kappa(x) - f_\kappa(x_0)]$ сырасы $[a, b]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр (әввәлки параграфын 1-чи теореминә көрә), $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f_\kappa(x_0) = f(x_0)$ исә јығылан әдәди сырадыр (әдәди сыра мүнтәзәм јығылыр). Буна көрә дә һәмин сыраларын чәми олан

$$f(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} f_\kappa(x)$$

сырасы $[a, b]$ парчасында мүнтәзәм јығылар. Бу һалда (4) бәрабәрлији

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = f(x) - f(x_0) \qquad (5)$$

кими јазылыр. Һәдләри $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијалар олан мүнтәзәм јығылан (1) сырасынын $\sigma(x)$ чәми кәсилмәјән функсијадыр. Буна көрә дә (5) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини x дәјишәнинә нәзәрән диференсиалламаг олар. Онда

$$\sigma(x) = f'(x)$$

вә ја

$$f'(x) = \left[\sum_{\kappa=1}^{\infty} f_\kappa(x)\right]' = \sigma(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} f'_\kappa(x)$$

бәрабәрлији алыныр, јә'ни (3) сырасыны һәдбәһәд диференсиалламаг олар.

Бу теореми функсионал ардычыллыг үчүн ашағыдакы кими сөјләмәк олар:

Теорем 2. ***Тутаг ки $[a, b]$ парчасында кәсилмәз төрәмәләри олан функсијаларын***

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\kappa(x), \ldots \qquad (6)$$

ардычыллығы һеч олмаса бир $x_0 \in [a, b]$ нөгтәсиндә јығылыр вә онларын төрәмәләри ардычыллығы $f'_\kappa(x)$ ($\kappa = 1, 2, \ldots$) $[a, b]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр. Онда 1) (6) ардычыллығы $[a, b]$ парчасында мүнтәзәм јығылар, 2) бу ардычыллығын лимитинин кәсилмәз төрәмәси вар вә төрәмә ишарәси алтында лимитә кечмәк олар, јә'ни

$$\lim_{n\to\infty} [f_n(x)]' = \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]', \quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad (7)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Гејд. Теоремләрин доғрулуғу үчүн төрәмәләр сырасынын вә төрәмәләр ардычыллығынын мүнтәзәм јығылмасы әсас шәртдир. Мәсәлән,

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

ардычыллығы $[-1, 1]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

лакин төрәмәләр ардычыллығы мүнтәзәм јығылмыр.

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ олдугда} \\ 0, & 0 < x \leqslant 1 \text{ олдугда.} \end{cases}$$

Буна көрә дә (7) мүнасибәти өдәнилмир:

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(0) = 1 \neq f'(0) = 0.$$

Мисал 1. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) ардычыллығы истәнилән $[a, b]$ парчасында $f(x) \equiv 0$ функсијасына мүнтәзәм јығылыр. Лакин онун $f'_n(x) = \cos nx$ ($n = 1, 2, \ldots$) төрәмәләри ардычыллығы $x = (2\kappa + 1)\pi$ (κ там әдәддир) нөгтәләриндә дағыландыр.

Мисал 2. $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \cos\frac{x}{\kappa^2}$ сырасы x-ин бүтүн гијмәтләриндә дағыландыр. Доғрудан да, истәнилән x нөгтәсиндә сыранын јығылмасы үчүн зәрури шәрт өдәнилмир:

$$\cos\frac{x}{\kappa^2} \to \cos 0 = 1 \quad (\kappa \to \infty).$$

Сыранын һәдләринин төрәмәләриндән дүзәлмиш

$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(-\sin\frac{x}{\kappa^2}\right)/\kappa^2$ сырасы исә бүтүн әдәд охунда мүнтәзәм јығылыр. Бу нәтичә сыранын јығылан мажорантынын олмасындан алыныр. Доғрудан да,

$$\left|\left(-\sin\frac{x}{\kappa^2}\right)\kappa^2\right| \leqslant \frac{1}{\kappa^2}$$

бәрабәрсизлији өдәнилдијиндән вә $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2}$ сырасы јығылан олдуғундан Вејерштрасс әламәтинә көрә (§ 3) төрәмәләр сырасы мүнтәзәм јығылыр.

XXXVII ФӘСИЛ

ГҮВВӘТ СЫРАЛАРЫ

§ 1. ГҮВВӘТ СЫРАЛАРЫНЫН ЈЫҒЫЛМАСЫ

Гүввәт сырасы функсионал сыраларын ән садә нөвүдүр.

$$C_0 + C_1(t-a) + C_2(t-a)^2 + \cdots + C_n(t-a)^n + \cdots \qquad (1)$$

шәклиндә олан функсионал сыраја *гүввәт сырасы* дејилир. Бурада C_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) вә a сабит әдәдләрдир. C_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) әдәдләринә гүввәт сырасынын *әмсаллары* дејилир.

(1) шәклиндә олан һәр бир гүввәт сырасы $t = a$ нөгтәсиндә јығылыр вә чәми C_0 әдәдинә бәрабәрдир.

Бурада $t - a = x$ әвәзләмәсини апардыгда (1) гүввәт сырасы

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n + \cdots \qquad (2)$$

шәклиндә јазылыр. (2) шәклиндә олан бүтүн гүввәт сыралары $x = 0$ нөгтәсиндә јығылыр.

Ајдындыр ки, (1) сырасынын јығылмасыны тәдгиг етмәк үчүн (2) сырасынын јығылмасыны тәдгиг етмәјә еквивалентдир. Буна көрә дә бундан сонра анчаг (2) шәклиндә гүввәт сыраларынын јығылмасы тәдгиг едилир.

Теорем 1 (Абел[1] теореми).

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n \qquad (2)$$

гүввәт сырасы сыфырдан фәргли x_0 нөгтәсиндә јығыландырса, онда x-ин $|x| < |x_0|$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә мүтләг јығыландыр.

Исбаты. (2) гүввәт сырасы $x = x_0$ нөгтәсиндә јығылан олдуғундан $\lim\limits_{n\to\infty} C_nx_0^n = 0$ олар (јығылманын зәрури шәрти) Јығылан ардычыллығын мәһдуд олмасына әсасән елә сабит $M > 0$ әдәди тапмаг олар ки, n-нин бүтүн гијмәтләриндә

$$|C_nx_0^n| \leqslant M \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда $|x| < |x_0|$ мүнасибәтини өдәјән бүтүн x нөгтәләри үчүн

$$|C_nx^n| = |C_nx_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

вә ја $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$ гәбул етдикдә

$$|C_nx^n| < Mq^n \qquad (3)$$

олар. $q < 1$ олдуғундан

$$M + Mq + Mq^2 + \cdots + Mq^n + \cdots$$

сырасы (азалан һәндәси силсилә) јығыландыр. Бурадан, мүгајисә әламәтинә (XXXV, § 3) көрә (2) сырасынын $|x| < |x_0|$

[1] Нилс Һенрих Абел (1802—1829) Норвеч ријазијјатчысыдыр.

мүнасибәтини өдәјән истәнилән x нөгтәсиндә мүтләг јығылан олмасы ајдындыр.

Нәтичә. Һәр һансы $\overset{*}{x}_0$ нөгтәсиндә дағылан (2) гүввәт сырасы $|x| > |\overset{*}{x}_0|$ мүнасибәтини өдәјән һәр бир x нөгтәсиндә дә дағыландыр.

Доғрудан да, (2) гүввәт сырасы $|x_0| > |\overset{*}{x}_0|$ мүнасибәтини өдәјән бир x_0 нөгтәсиндә јығылан оларса, онда Абел теореминә көрә о, $\overset{*}{x}_0$ нөгтәсиндә дә јығылан олмалыдыр. Бу исә шәртә зиддир.

Гүввәт сырасынын јығылдығы бүтүн нөгтәләр чохлуғуна онун јығылма областы дејилир. Инди гүввәт сыраларынын јығылма областынын формасыны тәдгиг едәк.

Гејд едәк ки, һәр бир гүввәт сырасы үчүн ашағыдакы үч һалдан бири ола биләр:

I. Гүввәт сырасы истәнилән сонлу x нөгтәсиндә јығылыр. Буна

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (4)$$

гүввәт сырасы мисал ола биләр. (4) сырасы бүтүн һәгиги охда јығылыр.

II. Гүввәт сырасы истәнилән $x \neq 0$ нөгтәсиндә дағыландыр. Буна

$$1 + x + 2!\,x + \cdots + n!\,x^n + \cdots \qquad (5)$$

гүввәт сырасы мисал ола биләр. (5) сырасы анчаг $x = 0$ нөгтәсиндә јығылыр.

III. Гүввәт сырасы әдәд охунун бә'зи нөгтәләриндә ($x \neq 0$) јығылан, бә'зи нөгтәләриндә дағыландыр. Һәр бир белә гүввәт сырасы үчүн елә симметрик $(-R, R)$ интервалы вар ки, бу интервал дахилиндә һәмин гүввәт сырасы јығылыр, харичиндә исә дағылыр.

Буну көстәрмәк үчүн фәрз едәк ки, (2) гүввәт сырасы мүсбәт r_1 нөгтәсиндә јығылыр вә мүсбәт R_1 нөгтәсиндә дағылыр. Онда Абел теореминә көрә һәмин сыра $|x| < r_1$ мүнасибәтини өдәјән бүтүн x нөгтәләриндә јығылар, $|x| > R_1$ мүнасибәтини ($r_1 < R_1$) өдәјән бүтүн x нөгтәләриндә исә дағылар.

Бу һалда, $\frac{r_1 + R_1}{2}$ нөгтәсиндә (2) сырасы јығылан олдугда, $r_2 = \frac{r_1 + R_1}{2}$ вә $R_1 = R_2$, $\frac{r_1 + R_1}{2}$ нөгтәсиндә (2) сырасы дағылан олдугда исә $r_1 = r_2$ вә $R_2 = \frac{r_1 + R_1}{2}$ гәбул едәк. Ајдындыр ки, $[r_1, R_1] \supset [r_2, R_2]$ вә $R_2 - r_2 = \frac{R_1 - r_1}{2}$ олар.

Ејни гајда илә $[r_2, R_2] \supset [r_3, R_3]$ вә $R_3 - r_3 = \frac{R_2 - r_2}{2}$ шәрт-

ләрини едәјән r_3 вә R_3 әдәдләри дә сечилир. Бу просеси давам етдирмәклә (2) сырасынын јығылан олдуғу

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_n \leqslant \cdots$$

нөгтәләри вә дағылан олдуғу

$$R_1 \geqslant R_2 \geqslant \cdots \geqslant R_n \geqslant \cdots$$

нөгтәләри сечилир. Бу нөгтәләр үчүн

$$[r_n, R_n] \supset [r_{n+1}, R_{n+1}] \text{ вә } R_n - r_n = \frac{R_1 - r_1}{2^{n-1}} \to 0 \ (n \to \infty)$$

мүнасибәтләри едәнилир. Демәли,

$$[r_1, R_1], [r_2, R_2], \ldots, [r_n, R_n], \ldots \qquad (6)$$

парчалары ардычыллығы јығылан парчалар ардычыллығыдыр (XII, § 3). Онда јығылан парчалар принсипинә көрә (XII, § 3) бүтүн (6) парчалары үчүн ортаг олан јеканә

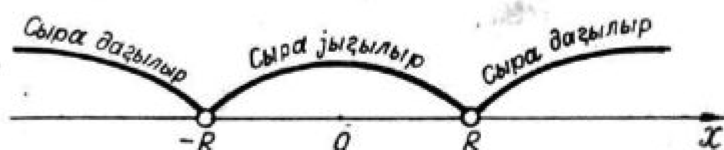
$$R = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} R_n$$

нөгтәси вар. Бу һалда (2) сырасы $(-R, R)$ интервалынын дахилиндә јығылыр, харичиндә исә дағылыр.

Доғрудан да, һәр бир $|x| < R$ нөгтәси үчүн елә N әдәди вар ки, n-нин $n > N$ гијмәтләриндә $|x| < r_n$ бәрабәрсизлији едәнилир. (2) сырасы r_n нөгтәсиндә јығылан олдуғундан Абел теореминә көрә x нөгтәсиндә дә мүтләг јығылан олар.

x нөгтәси $(-R, R)$ интервалынын харичиндә јерләшдикдә, јә'ни $|x| > R$ олдуғда кифајәт гәдәр бөјүк n әдәдләри үчүн $x > R_n$ олар. (2) сырасы R_n нөгтәсиндә дағылан олдуғундан Абел теореминин нәтичәсинә көрә x нөгтәсиндә дә дағыландыр.

Беләликлә, III нөв һәр бир гүввәт сырасы үчүн елә $(-R, R)$ интервалы вар ки, сыра бу интервалын истәнилән дахили нөгтәсиндә јығылыр, истәнилән харичи нөгтәсиндә исә дағылыр. Белә интервала гүввәт сырасынын *јығылма интервалы*, R әдәдинә исә гүввәт сырасынын *јығылма радиусу* дејилир (шәкил 262).



Шәкил 262

Јығылма интервалынын $-R$ вә R учларында гүввәт сырасынын јығылыб-дағылан олмасыны сөјләмәк олмаз. Һәр бир сыранын учларда јығылан олуб-олмамасы ајрыча тәдгиг олунмалыдыр.

I нөв гүввәт сыралары үчүн $R = +\infty$ вә II нөв гүввәт сыралары үчүн $R = 0$ һесаб етсәк, ашағыдакы тәклифи аларыг:

Теорем 2. ***Һәр бир гүввәт сырасынын јығылма областы мәркәзи координат башланғычында олан симметрик интервалдыр.***

Гејд. Бу теорем (2) шәклиндә гүввәт сыраларына аиддир. Гүввәт сырасы (1) шәклиндә олдуғда онун јығылма интервалы

$$|t - a| = |x| < R \text{ вә ја } -R < t - a < R$$

мүнасибәти илә тә'јин олунар. Бурадан ајдындыр ки, (1) сырасы t-нин $(a - R < t < a + R)$ бәрабәрсизлијини едәјән гијмәтләриндә, јә'ни $(a - R, a + R)$ интервалындакы гијмәтләриндә јығылыр (шәкил 263).

Шәкил 263

Демәли, (1) шәклиндә гүввәт сырасынын јығылма областы мәркәзи $t = a$ нөгтәсиндә олан $(a - R, a + R)$ шәклиндә симметрик интервалдыр.

Гүввәт сырасынын јығылма радиусуну бә'зән сыраларын мә'лум јығылма әламәтинә әсасән тапмаг олур.

1. Тутаг ки, (2) гүввәт сырасынын әмсаллары үчүн сонлу вә ја сонсуз

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right|$$

лимити вар. Онда Даламберин јығылма әламәтинә көрә (2) сырасы x-ин

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}x^{n+1}|}{|C_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = |x| l < 1, \ |x| < \frac{1}{l}$$

мүнасибәтини едәјән гијмәтләриндә јығылар,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = |x| l > 1, \ |x| > \frac{1}{l}$$

мүнасибәтини едәјән гијмәтләриндә исә дағылар. Бу һалда (2) гүввәт сырасынын јығылма радиусу

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \qquad (7)$$

дүстуру илә тә'јин олунар.

Мисал 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ сырасынын $\left(C_n = \frac{1}{n(n+1)}\right)$ јығылма радиусу ваһидә бәрабәрдир:

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1.$$

Верилмиш сыра $(-1, 1)$ јығылма интервалынын $x = \pm 1$ уч нөгтәләриндә дә јығылыр.

2. Гүввәт сырасынын јығылма радиусуну Кошинин јығылма әламәтинә әсасән тә'јин етмәк үчүн фәрз едәк ки, (2) сырасынын әмсаллары үчүн сонлу вә ја сонсуз

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}$$

лимити вардыр. Онда Коши әламәтинә көрә (2) сырасы x-ин

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = |x| l < 1, \quad |x| < \frac{1}{l}$$

мүнасибәтини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә јығылар,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = |x| l > 1, \quad |x| > \frac{1}{l}$$

мүнасибәтини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә исә дағылар. Демәли, бу һалда (2) гүввәт сырасынын јығылма радиусу

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \tag{8}$$

дүстуру илә тә'јин олунар.

Үмуми һалда, (2) гүввәт сырасынын јығылма радиусу

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}} \tag{9}$$

Коши—Адамар[1] дүстуру васитәсилә тә'јин олунур (јухары лимит һаггында мә'лумат XII фәсил § 4-дә верилмишдир).

Мисал 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ гүввәт сырасынын јығылма радиусуну (8) дүстуру илә һесабламаг олар:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Верилмиш сыра $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ јығылма интервалынын $x = \pm \frac{1}{2}$ уч нөгтәләриндә дағылыр.

§ 2. ГҮВВӘТ СЫРАСЫНЫН МҮНТӘЗӘМ ЈЫҒЫЛМАСЫ

Теорем 1. ***Јығылма радиусу $R \neq 0$ олан***

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \tag{1}$$

гүввәт сырасы, өзүнүн $(-R, R)$ јығылма интервалы дахилиндә јерләшән һәр бир парчада мүнтәзәм јығыландыр.

Исбаты. Тутаг ки, $[a, b]$ парчасы (1) сырасынын јығылма интервалы дахилиндә јерләшән ихтијари парчадыр. Онда елә $0 < r < R$ әдәди тапмаг олар ки, $[a, b]$ парчасы $[-r, r]$ парчасынын да дахилиндә јерләшир. $r \in (-R, R)$ олдуғундан Абел теореминә көрә $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |C_n| r^n$ сырасы јығылыр, јә'ни (1) сырасы $x = r$ нөгтәсиндә мүтләг јығылыр. Бу һалда, x-ин $[-r, r]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$|C_n x^n| \leqslant |C_n| r^n$$

бәрабәрсизлији өдәнилдијиндән Вејерштрасс әламәтинә (XXXVI, § 3) көрә (1) сырасы $[-r, r]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр. Онда (1) сырасы $[-r, r]$ парчасында јерләшән $[a, b]$ парчасында да мүнтәзәм јығылан олар.

[1] Жак Адамар (1865—1963) франсызријазијјатчысыдыр.

Гејд 1. Гүввәт сырасы бүтүн јығылма интервалында мүнтәзәм јығылмаја да биләр. Мәсәлән, јығылма интервалы $(-1, 1)$ олан

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \tag{2}$$

гүввәт сырасы $(-1, 1)$ интервалында мүнтәзәм јығылмыр. Доғрудан да, (2) сырасынын чәми илә хүсуси чәминин фәрги һеч бир n үчүн x-ин бүтүн $-1 < x < 1$ гијмәтләриндә

$$|f(x) - S_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлијини өдәјә билмәз, чүнки x дәјишәни 1-ә јахынлашанда $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ кәмијјәти гејри-мәһдуд оларак артыр, јә'ни

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} \to \infty \quad (x \to 1).$$

Демәли, һеч бир N үчүн n-нин бүтүн $n > N$ вә x-ин ихтијари $-1 < x < 1$ гијмәтләриндә (1) бәрабәрсизлији өдәнилә билмәз.

Теорем 2. ***Гүввәт сырасынын чәми өзүнүн јығылма интервалында кәсилмәјән функсијадыр.***

Исбаты. Тутаг ки, (1) сырасынын чәми $f(x)$ вә онун јығылма интервалы $(-R, R)$-дир. $(-R, R)$ интервалында јерләшән ихтијари x_0 нөгтәси көтүрәк. Бу нөгтә үчүн елә r әдәди тапмаг олар ки, $|x_0| < r < R$ бәрабәрсизлији өдәнилсин (шәкил 264).

(1) гүввәт сырасы өзүнүн $(-R, R)$ јығылма интервалы дахилиндә јерләшән һәр бир $[-r, r]$ парчасында мүнтәзәм јығылдығындан (теорем 1) вә һәдләри истәнилән сонлу парчада кәсилмәјән олдуғундан онун чәми $[-r, r]$ парчасында, хүсуси һалда $x_0 \in [-r, r]$ нөгтәсиндә кәсилмәјән функсија олар (XXXVI, § 6).

Шәкил 264

Гејд 2. Гүввәт сырасы, өзүнүн $(-R, R)$ јығылма интервалынын $x = R$ учунда јығылан олдугда $[0, R]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр вә онун чәми

407—24

$x = R$ нөгтәсиндә солдан кәсилмәјәндир, јә'ни

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n$$

бәрабәрлији доғрудур (Абелин икинчи теореми).

Гүввәт сырасы јығылма интервалынын сол $x = -R$ учунда јығылан олдуғу һалда да ујғун тәклиф доғрудур.

§ 3. ГҮВВӘТ СЫРАСЫНЫН ҺӘДБӘҺӘД ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ ВӘ ДИФЕРЕНСИАЛЛАНМАСЫ

Функсионал сыраларын һәдбәһәд интегралланмасы вә диференсиалланмасы һаггында олан теоремләри гүввәт сыраларына тәтбиг етмәк олар.

Теорем 1. *Јығылма радиусу $R \neq 0$ олан*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \tag{1}$$

гүввәт сырасыны өзүнүн јығылма интервалы дахилиндә јерләшән һәр бир $[a, b]$ парчасы үзрә һәдбәһәд интегралламаг олар.

Хүсуси һалда, (1) сырасыны $[0, x]$ парчасы ($|x| < R$) үзрә һәдбәһәд интегралламаг олар:

$$\int_0^x f(x)\,dx = C_0 x + \frac{C_1}{2} x^2 + \frac{C_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{C_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots \tag{2}$$

Исбаты. (1) сырасы $[a, b] \subset (-R, R)$ парчасында мүнтәзәм јығылан олдуғундан (§ 2), функсионал сыраларын һәдбәһәд интегралланмасы һаггындакы теоремә әсасән (XXXVI, § 6) (1) сырасыны һәмин парча үзрә һәдбәһәд интегралламаг олар.

Гејд. (1) сырасы илә онун һәдбәһәд интегралланмасындан алынан (2) сырасынын уйғун R вә R_1 јығылма радиуслары бәрабәрдир. Доғрудан да, Коши—Адамар дүстуруна (§ 1) көрә

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{C_n}{n+1}\right|}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}} = R.$$

Теорем 2. *(1) гүввәт сырасыны өзүнүн $(-R, R)$ јығылма интервалы дахилиндә һәдбәһәд диференсиалламаг олар:*

$$f'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots + nC_n x^{n-1} + \cdots \tag{3}$$

(1) гүввәт сырасы илә онун һәдбәһәд диференсиалланмасындан алынан (3) сырасынын јығылма радиуслары бәрабәрдир.

Исбаты. Әввәлчә теоремин икинчи һиссәсини исбат едәк. Тутаг ки, (3) сырасынын јығылма радиусу R_1-дир. Онда R_1 әдәди

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n = C_1 x + 2C_2 x^2 + 3C_3 x^3 + \cdots + nC_n x^n + \cdots \tag{4}$$

сырасынын да јығылма радиусу олар. Буна көрә дә Абел теореминә әсасән (4) сырасы һәр бир $|x| < R_1$ нөгтәсиндә мүтләг јығылар. $|C_n x^n| \leqslant n|C_n x^n|$ бәрабәрсизлији көстәрир ки, һәмин $|x| < R_1$ нөгтәләриндә (1) сырасы да мүтләг јығылыр. Бурадан $R_1 \leqslant R$ олмасы ајдындыр.

Инди $R_1 \geqslant R$ бәрабәрсизлијинин доғру олдуғуну исбат едәк. Ајдындыр ки, һәр бир $|x| < R$ әдәди үчүн $|x| < |x_1| < R$ бәрабәрсизлијини өдәјән x_1 әдәди тапмаг олар. Бу x_1 нөгтәсиндә (1) сырасы мүтләг јығылан олдуғундан $\lim\limits_{n\to\infty} |C_n x_1^n| = 0$ олмалыдыр. Бурадан, һәр һансы сабит M әдәди үчүн

$$|C_n x_1^n| \leqslant M \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

бәрабәрсизлији вә буна көрә дә

$$n|C_n x^n| = n\left|\frac{x}{x_1}\right|^n \cdot |C_n x_1^n| \leqslant nM\left|\frac{x}{x_1}\right|^n \tag{5}$$

мүнасибәти алыныр. Сағ тәрәфдәки әдәдләрдән дүзәлмиш $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nM\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ сырасы јығылыр (Коши әламәтинә көрә буну асанлыгла јохламаг олар). Онда мүгајисә әламәтинә көрә (3) сырасы һәмин $|x| < R$ нөгтәсиндә мүтләг јығылар. Демәли, $R_1 \geqslant R$ олмалыдыр.

Бурадан $R = R_1$ бәрабәрлији алыныр. Инди теоремин биринчи һиссәсини исбат едәк.

Тутаг ки, x_0, (1) сырасынын $(-R, R)$ јығылма интервалы дахилиндә јерләшән ихтијари нөгтәдир. Бу нөгтәни өз дахилиндә алан $[-r, r]$ парчасы ($|x_0| < r < R$) көтүрәк. Ајдындыр ки, (1) гүввәт сырасы $[-r, r]$ парчасында јығылыр, онун һәдләринин төрәмәләриндән дүзәлмиш (3) сырасы исә һәмин $[-r, r]$ парчасында ($[-r, r]$ парчасы (3) сырасынын $(-R, R)$ јығылма интервалынын дахилиндә јерләшдијиндән) мүнтәзәм јығылыр. Онда функсионал сыраларын һәдбәһәд диференсиалланмасы һаггындакы теоремә көрә (XXXVI, § 7) (1) сырасыны $[-r, r]$ парчасында вә хүсуси һалда, ихтијари $x_0 \in [-r, r]$ нөгтәсиндә, һәдбәһәд диференсиалламаг олар.

Теорем тамамилә исбат олунду.

Бу теореми (3) сырасына тәтбиг етмәклә һәмин сыранын да $(-R, R)$ јығылма интервалы дахилиндә һәдбәһәд диференсиалланан олдуғуну алмаг олар. Һәмин просеси истәнилән

гәдәр давам етдирмәк мүмкүндүр. Беләликлә, ашағыдакы нәтиҹәләр алыныр:

Нәтиҹә 1. *(1) гүввәт сырасыны өзүнүн $(-R, R)$ јығылма интервалы дахилиндә истәнилән тәртибдән һәдбәһәд диференсиалламаг олар:*

$$f'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots + nC_n x^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3 x + \cdots + n(n-1)\, C_n x^{n-2} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6)$$

$$f^{(n)}(x) = n!\, C_n + (n+1)\, n \cdots 2\, C_{n+1} x + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Бурада һәдбәһәд диференсиалламагла алынан (6) сыраларынын һамысынын јығылма интервалы јенә дә $(-R, R)$-дир.

Нәтиҹә 2. *Гүввәт сырасы ҹәминин өз јығылма интервалы дахилиндә истәнилән тәртибли $f^{(\kappa)}(x)$ $(\kappa = 1, 2, \ldots)$ төрәмәси вар.*

§ 4. ФУНКСИЈАЛАРЫН ГҮВВӘТ СЫРАСЫНА АЈРЫЛМАСЫ

Тә'риф 1. *Тутаг ки,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \qquad (1)$$

гүввәт сырасы $(a-R,\ a+R)$ интервалында јығылыр вә онун ҹәми $f(x)$ функсијасына бәрабәрдир, јә'ни x-ин $(a-R,\ a+R)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \qquad (2)$$

бәрабәрлији доғрудур. Онда, дејирләр ки, $f(x)$ функсијасы $(a-R,\ a+R)$ интервалында (1) гүввәт сырасына ајрылыр.

Теорем 1. ***$f(x)$ функсијасы $(a-R,\ a+R)$ интервалында гүввәт сырасына ајрылырса, онда онун һәмин интервал дахилиндә истәнилән тәртибли кәсилмәз төрәмәси вар.***

Доғрудан да, $f(x)$ функсијасы $(a-R,\ a+R)$ интервалында (1) гүввәт сырасына ајрылырса, онда $(a-R,\ a+R)$ интервалы (1) гүввәт сырасынын јығылма интервалы дахилиндә јерләшәр. Гүввәт сырасынын ҹәмини өзүнүн јығылма интервалы дахилиндә истәнилән тәртибдән һәдбәһәд диференсиалламаг мүмкүндүр (§ 3, нәтиҹә 2). Бу һалда (1) сырасынын истәнилән тәртибдән һәдбәһәд диференсиалланмасындан алынан сыраларын $f^{(\kappa)}(x)$ ҹәмләри јығылма интервалы дахилиндә вә буна көрә дә, хүсуси һалда, $(a-R,\ a+R)$ интервалында кәсилмәјән функсијалар олар (§ 2, теорем 2).

Демәли, $f(x)$ функсијасы $(a-R,\ a+R)$ интервалында гүввәт сырасына ајрылырса, јә'ни x-ин $(a-R,\ a+R)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

бәрабәрлији доғрудурса, онда бу сыраны истәнилән тәртибдән һәдбәһәд диференсиалламаг олар вә x-ин һәмин интервалдакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f^{(\kappa)}(x) = \sum_{n=\kappa}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-\kappa+1)\, C_n (x-a)^{n-\kappa}$$

$$(\kappa = 1, 2, \ldots) \qquad (3)$$

бәрабәрликләри доғрудур. Бу бәрабәрликләрдә $x = a$ һесаб етсәк

$$f(a) = C_0,\quad f^{(\kappa)}(a) = \kappa!\, C_\kappa,\quad \kappa = 1, 2, \ldots$$

олар. Бурадан

$$C_\kappa = \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots;\ 0! = 1) \qquad (4)$$

аларыг. Бу гијмәтләри (2) бәрабәрлијиндә јеринә јаздыгда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \qquad (5)$$

вә ја

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Тә'риф 2. *Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы a нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмушдур вә һәмин нөгтәдә истәнилән тәртибдән төрәмәси вар. Онда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \qquad (6)$$

гүввәт сырасына $f(x)$ функсијасынын a нөгтәсиндә Тејлор сырасы, (4) әдәдләринә исә Тејлор әмсаллары дејилир.

Хүсуси һалда, $a = 0$ олдугда Тејлор сырасы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (7)$$

шәклиндә јазылар. Буна $f(x)$ функсијасынын *Маклорен сырасы* дејилир.

Беләликлә, јухарыда апарылан мүһакимәјә вә исбат едилән (5) бәрабәрлијинә әсасән ашағыдакы тәклиф алыныр:

Теорем 2. ***$f(x)$ функсијасы a нөгтәсинин мүәјјән әтрафында (2) гүввәт сырасына ајрылырса, онда бу сыра һәмин функсијанын Тејлор сырасыдыр.***

Демәли, $x=a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасынын $x-a$ фәргинин гүввәтләринә көрә гүввәт сырасына ајрылма мәсәләси, елә һәмин функсијанын (6) Тејлор сырасына ајрылмасы мәсәләсинин ејнидир.

Нәтиҹә 1. $x=a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында јығылан

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \qquad (8)$$

гүввәт сырасынын ҹәми ејниликлә сыфра бәрабәрдирсә, онда онун бүтүн әмсаллары сыфра бәрабәрдир: $C_n=0$ ($n=0, 1, 2, \ldots$).

Доғрудан да, a нөгтәсинин мүәјјән әтрафында (8) сырасынын ҹәми $f(x)\equiv 0$ олдуғундан (4) дүстуруна әсасән $C_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=0$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) олар.

Нәтиҹә 2. **(Гүввәт сырасына ајрылышын јеканәлији).** *$x=a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында ејни бир $f(x)$ функсијасына јығылан*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \text{ вә } \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n$$

гүввәт сыралары бир-биринин ејнидир, јә'ни онларын ујғун әмсаллары бәрабәрдир:

$$C_n=d_n, \; n=0, 1, 2, \ldots \qquad (9)$$

Башга сөзлә, $f(x)$ функсијасы $x-a$ фәргинин гүввәтләринә көрә јеканә гүввәт сырасына ајрыла биләр.

Доғрудан да, (4) дүстуруна көрә

$$C_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ вә } d_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

олдуғундан (9) бәрабәрликләри доғрудур.

Тә'риф 3. $x=a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында гүввәт вә ја Тејлор сырасына ајрыла билән $f(x)$ функсијасына һәмин нөгтәдә аналитик функсија дејилир.

Бурадан вә јухарыда исбат етдијимиз 1-ҹи теоремдән ајдындыр ки, $x=a$ нөгтәсиндә аналитик олан функсијанын һәмин нөгтәнин мүәјјән әтрафында истәнилән тәртибли төрәмәси вар. Бу тәклифин тәрси доғру олмаја да биләр: верилмиш $x=a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында истәнилән тәртибли төрәмәси олан елә функсијалар вардыр ки, онлар $x=a$ нөгтәсиндә аналитик дејилдир, јә'ни һәмин нөгтәнин әтрафында Тејлор (гүввәт) сырасына ајрылмыр. Мәсәлән,

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \text{ олдугда} \\ 0, & x=0 \text{ олдугда} \end{cases} \qquad (10)$$

функсијасынын бүтүн әдәд охунда, хүсуси һалда $x=0$ нөгтәсинин һәр бир әтрафында истәнилән тәртибли төрәмәси вар. Доғрудан да, $x\neq 0$ нөгтәләриндә

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \; f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}, \ldots,$$

$x=0$ нөгтәсиндә исә

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x}=0,$$

$$f''(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2}{(\Delta x)^3}e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x}=0, \ldots$$

алыныр, јә'ни функсијанын $x=0$ нөгтәсиндә бүтүн төрәмәләри сыфра бәрабәрдир:

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=f^{(n+1)}(0)=\cdots=0.$$

Һәмин функсија үчүн $x-0=x$ гүввәтләринә көрә јазылмыш (6) Тејлор сырасыны дүзәлдәк:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0}{n!}x^n=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots+0\cdot x^n+\cdots \qquad (11)$$

Бу сыра бүтүн әдәд охунда јығылыр вә онун ҹәми ејниликлә сыфра бәрабәрдир:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0}{n!}x^n\equiv 0.$$

Демәли, (10) функсијасынын (11) Тејлор сырасынын ејниликлә сыфра бәрабәр олан ҹәми һәмин функсијанын өзүнә бәрабәр дејилдир (анҹаг $x=0$ нөгтәсиндә бәрабәрдир). Бу көстәрир ки, (10) функсијасы $x=0$ нөгтәсинин һеч бир әтрафында гүввәт сырасына (Тејлор сырасына) ајрылмыр, јә'ни аналитик дејилдир.

§ 5. ФУНКСИЈАЛАРЫН ТЕЈЛОР СЫРАСЫНА АЈРЫЛА БИЛМӘСИ ШӘРТЛӘРИ

Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $x=a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмушдур вә һәмин нөгтәдә истәнилән тәртибдән төрәмәси вар. Онда $f(x)$ функсијасы үчүн $x=a$ нөгтәсиндә

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (1)$$

Тејлор сырасыны јазмаг олар. (1) сырасынын јығылан вә ја

дағылан олмасы, јығылан олдугда исә онун чәминин $f(x)$ функсијасына бәрабәр олмасы һаггында әввәлчәдән һеч нә демәк олмаз. Буна көрә дә (1) сырасынын $f(x)$ функсијасынын Тејлор сырасы олмасыны

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (2)$$

кими јазырлар ($\sim$ ујғунлуг ишарәсидир).

Хүсуси һалда, (1) сырасы $f(x)$ функсијасына јығылан олдугда (2) мүнасибәтиндә $\sim$ (ујғунлуг) ишарәси əвəзинə $=$ (бәрабәрлик) ишарәси јазылыр. Бу һалда, дејирләр ки, $f(x)$ функсијасы Тејлор (вә ја гүввәт) сырасына ајрылыр (§ 4).

Белә бир суал гаршыја чыхыр: $f(x)$ функсијасынын Тејлор сырасы нә заман онун өзүнә јығылыр? Бу мәсәләни тәдгиг етмәк үчүн $f(x)$ функсијасынын $(x-a)$ фәргинин гүввәтләринә көрә јазылмыш Тејлор дүстуруна бахаг (XVI, § 5):

$$f(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(x-a)^{\kappa} + R_n(x). \qquad (3)$$

Бурада

$$S_n(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(x-a)^{\kappa} \qquad (4)$$

чохһәдлиси $f(x)$ функсијасынын *n-дәрәчәли Тејлор чохһәдлиси*, $R_n(x)$ исә Тејлор дүстурунун *галыг һәдди* адланыр. (4) чәми ејни заманда (1) Тејлор сырасынын n-чи хүсуси чәмидир. (3) дүстуруну

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) \qquad (5)$$

вә ја

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

кими јаздыгда ашағыдакы теорем алыныр:

Теорем 1. ***$f(x)$ функсијасынын $(a-R, a+R)$ интервалында (1) Тејлор сырасына ајрылмасы үчүн һәмин интервалда онун истәнилән тәртибли төрәмәсинин олмасы вә (3) Тејлор дүстуру галыг һәддинин x-ин $(a-R, a+R)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә***

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (6)$$

бәрабәрлијини өдәмәси зәрури вә кафи шәртдир.

Бу теоремин шәртләрини јохламаг бә'зән чәтин олур. Белә һалларда функсијанын гүввәт сырасына ајрылмасыны ашағыдакы кафи шәртә әсасән мүәјјән етмәк олар.

Теорем 2. ***Тутаг ки, $f(x)$ функсијасынын $(a-R, a+R)$ интервалында истәнилән тәртибли төрәмәси вар вә бу төрәмәләрин һамысы һәмин интервалда мүнтәзәм мәһдуддур, јә'ни x-ин $(a-R, a+R)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә***

$$|f^{(\kappa)}(x)| \leqslant M \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (7)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда $f(x)$ функсијасы һәмин интервалда Тејлор сырасына ајрылыр:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (8)$$

Исбаты. (8) бәрабәрлијинин доғрулуғуна инанмаг үчүн x-ин $(a-R, a+R)$ интервалында јерләшән бүтүн гијмәтләриндә (6) мүнасибәтинин өдәнилдијини көстәрмәк кифајәтдир.

(3) Тејлор дүстурунун галыг һәддини Лагранж шәклиндә (XVI, § 5) көтүрәк:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \ \xi \in (a, x).$$

(7) бәрабәрсизлијинә көрә

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (9)$$

олар. Китабын II һиссәсиндә (XVI, § 6) һәр бир гејд олунмуш x үчүн

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

бәрабәрлијинин доғрулуғу исбат олунмушдур. Онда (9) бәрабәрсизлијинә әсасән һәр бир $x \in (a-R, a+R)$ үчүн

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

олар. Теорем исбат олунду.

§ 6. ЕЛЕМЕНТАР ФУНКСИЈАЛАРЫН ТЕЈЛОР СЫРАСЫНА АЈРЫЛМАСЫ

Әввәлки параграфда исбат едилмиш теоремләри тәтбиг едәрәк бир сыра елементар функсијалары Тејлор сырасына ајырмаг олар.

I. $f(x) = e^x$. Бу функсија үчүн

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = \cdots = e^x$$

олдуғундан x-ин $(-R, R)$ интервалында јерләшән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f^{(\kappa)}(x)| = |e^x| < e^R \quad (\kappa = 0, 1, 2 \ldots)$$

бәрабәрсизлији өдәниләр. Демәли, e^x функсијасы үчүн 2-чи теоремин (§ 5) шәртләри өдәнилир, јә'ни һәмин функсија истәнилән сонлу интервалда (буна көрә дә бүтүн әдәд охунда)

Тејлор сырасына ($a=0$) ајрылыр. $f^{(n)}(0)=e^0=1$ олдуғундан e^x функсијасынын Тејлор ајрылышы

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (1)$$

шәклиндә олар.

II. $f(x)=\sin x$. Бу функсија үчүн

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_n(x).$$

Тејлор дүстурунун вә x-ин бүтүн гијмәтләриндә

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

бәрабәрлијинин доғрулуғу әввәлләр (XVI, § 6) исбат едилмишдир. Демәли, $\sin x$ функсијасы бүтүн әдәд охунда

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (2)$$

Тејлор сырасына ајрылыр.

III. $f(x)=\cos x$ функсијасы үчүн

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_n(x)$$

Тејлор дүстуру вә x-ин бүтүн гијмәтләриндә

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

бәрабәрлијинин доғрулуғу әввәлдән (XVI, § 6) мә'лумдур. Бурадан һәмин функсија үчүн

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (3)$$

ајрылышы алыныр.

IV. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$. Бу һалда

$$f^{(\kappa)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-\kappa+1)(1+x)^{\alpha-\kappa}$$

олдуғундан Тејлор дүстуру ($a=0$ һалына бахырыг)

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\kappa+1)}{\kappa!}x^{\kappa}+R_n(x) \qquad (4)$$

шәклиндә олар. Галыг һәддини Коши шәклиндә (XVI, § 5) көтүрәк

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}=$$

$$=\alpha_n(x)\cdot\beta_n(x)\cdot\gamma_n(x),\ 0<\theta=\theta(x,n)<1. \qquad (5)$$

Бурада ашағыдакы ишарәләрдән истифадә олунур:

$$\alpha_n(x)=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n,$$

$$\beta_n(x)=\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1},\ \gamma_n(x)=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Инди көстәрәк ки, x-ин $(-1,1)$ интервалында јерләшән бүтүн гијмәтләриндә

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \qquad (6)$$

бәрабәрлији өдәнилир. Бу мәгсәдлә биномиал сыра адланан

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \qquad (7)$$

сырасынын јығылма областыны тәдгиг едәк. (7) сырасы үчүн $C_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ олдуғундан онун јығылма радиусу

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1$$

олар (§ 1), јә'ни (7) сырасы x-ин $|x|<1$ гијмәтләриндә мүтләг јығылыр, $|x|>1$ гијмәтләриндә исә дағылыр. Јығылан сыранын үмуми һәддинин лимити сыфра бәрабәрдир (сыранын јығылан олмасы үчүн зәрури шәрт). Буна көрә дә (7) сырасында α әвәзинә $\alpha-1$ јаздығда алынан сыранын үмуми һәдди олан $\alpha_n(x)$ ифадәсинин x-ин $|x|<1$ гијмәтләриндә лимити сыфра бәрабәр олар:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x)=0,\ |x|<1.$$

x-ин $-1<x<1$ гијмәтләриндә $1-|x|<1+\theta x<1+|x|$ олмасындан ајдындыр ки, $|\beta_n(x)|$ кәмијјәти n-дән асылы олмајан

$$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} \text{ вә } |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$$

кәмијјәтләри арасында јерләшир, јә'ни x-ин $|x|<1$ гијмәтләриндә $|\beta_n(x)|$ кәмијјәти n-ә нәзәрән мәһдуддур.

Бундан башга x-ин $|x|<1$ гијмәтләриндә

$$|\gamma_n(x)|=\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|<\left|\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right|<1$$

бәрабәрсизлији дә доғрудур.

Беләликлә, $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ вә $\gamma_n(x)$ кәмијјәтләри һаггында дедикләримиздән (6) мүнасибәти алыныр.

Бу көстәрир ки, $(1+x)^{\alpha}$ функсијасы $(-1,1)$ интервалында Тејлор сырасына ајрылыр:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \qquad (8)$$

Хүсуси һалда, $\alpha = -1$ олдугда (8) бәрабәрлиіиндән

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \qquad (9)$$

ајрылышы, $\alpha = \frac{1}{2}$ олдугда исә

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots \qquad (10)$$

ајрылышы алыныр.

V. $f(x) = \ln(1+x)$.

Јығылма интервалы $(-1, 1)$ олан (9) гүввәт сырасыны $[0, x]$ $(|x| < 1)$ парчасы үзрә һәдбәһәд интегралласаг,

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right] dx$$

вә ја

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (11)$$

ајрылышыны аларыг. Лејбнис теореминә көрә (XXXV, § 4) (11) сырасы $x = 1$ нөгтәсиндә јығылыр. Буна көрә дә онун

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

чәми $[0, 1]$ парчасында кәсилмәјән функсијадыр (§ 2, гејд 2) $f(x) = \ln(1+x)$ функсијасы да $[0, 1]$ парчасында кәсилмәјән дир вә $[0, 1)$ интервалында $S(x)$ илә үст-үстә дүшүр. Демәли

$$\ln 2 = \lim_{x\to 1-0} \ln(1+x) = \lim_{x\to 1-0} S(x) = S(1) =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

вә ја

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

VI. $\operatorname{sh} x$ *вә* $\operatorname{ch} x$. (1) сырасы илә һәмин сырадан алынан

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

сырасыны топлајыб, сонра да чыхмагла

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad (12)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (13)$$

ајрылышларыны алмаг олар.

VII. Ејлер дүстуру. Тә'рифә көрә хәјали үстлү e^{ix} үстлү функсијасы ашағыдакы сыра илә тә'јин олунур:

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots \qquad (14)$$

Онда $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1, \ldots$ вә с. олдуғуну нәзәрә алсаг, (14) бәрабәрлијини

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \cdots =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

кими јазмаг олар. Сағ тәрәфдәки мө'тәризәләрин ичәрисиндәки сыраларын чәмләри ((2) вә (3) дүстурларына әсасән), ујғун олараг $\cos x$ вә $\sin x$ функсијаларына бәрабәр олдуғундан

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (15)$$

ејнилији алынар. Буна *Ејлер дүстуру* дејилир.

VIII. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ **функсијасы үчүн**

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \qquad (16)$$
$$-1 < x < 1$$

ајрылышы доғрудур. Буну алмаг үчүн јығылма интервалы $(-1, 1)$ олан

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

гүввәт сырасыны $[0, x]$ парчасы $(|x| < 1)$ үзрә һәдбәһәд интегралламаг лазымдыр:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

§ 7. ИНТЕГРАЛЛАРЫН ВӘ ФУНКСИЈА ГИЈМӘТЛӘРИНИН СЫРА ВАСИТӘСИЛӘ ҺЕСАБЛАНМАСЫ

Елә интеграллар вардыр ки, онлар елементар функсијаларла сонлу шәкилдә ифадә едилә билмир (XXI, § 7). Белә интеграллары сыралар васитәсилә һесабламаг бә'зән мүмкүн олур. Буну ики мисал үзәриндә изаһ едәк.

I. Тутаг ки,

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx \qquad (1)$$

интегралыны һесабламаг лазымдыр. Интегралалты функсијаны гүввәт сырасына ајырмаг үчүн

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

ајрылышындан истифадә едәк.

Бурадан x-ин бүтүн гијмәтләриндә јығылан

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \left(\frac{\sin x}{x}\right)\Big|_{x=0} = 1$$

ајрылышы алыныр. Ону (1) интегралы алтында јазараг, һәдбәһәд интегралладыгда (1) интегралынын гијмәти тапылыр:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}. \qquad (2)$$

(2) сырасы ишарәсини нөвбә илә дәјишән сырадыр. Онун чәмини хүсуси чәмләри илә әвәз етдикдә алынан хәтаны асанлыгла гијмәтләндирмәк олур (XXXV, § 4). Мәсәлән, $a=2$ олдугда алынан $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$ интегралынын 0,01 дәгиглији илә гијмәти

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \approx 2 - \frac{8}{3 \cdot 3!} + \frac{32}{5 \cdot 5!} = 1{,}61$$

олар.

II. $\int_0^a e^{-x^2} dx$ интегралыны һесабламаг үчүн интегралалты функсијаны

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ајрылышындан (§ 6, (1)) истифадә едәрәк гүввәт сырасына ајырмаг лазымдыр:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

x-ин бүтүн гијмәтләриндә јығылан бу ајрылышы интеграл алтында јаздыгда

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} \qquad (3)$$

бәрабәрлији алыныр. Бу ајрылышдан истифадә едәрәк ихтијари a үчүн верилмиш интегралы истәнилән дәгигликлә һесабламаг олар.

Хүсуси һалда, $a=1$ олдугда

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, n!}$$

алыныр. Бу интегралын 0,01 дәгиглији илә гијмәти

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0{,}75.$$

Гүввәт сыраларындан истифадә едәрәк бир сыра функсијаларын гијмәтләрини мүәјјән дәгигликлә һесабламаг олар.

Мәсәлән, $\sin x$ функсијасынын

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

гүввәт сырасына ајрылышындан (§ 6) истифадә едәрәк, онун мүәјјән нөгтәләрдә гијмәтини тәләб едилән дәгигликлә һесабламаг мүмкүндүр. $\sin x$ функсијасынын $x=1$ нөгтәсиндә 0,01 дәгигликлә гијмәти

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0{,}84$$

олар. Сыранын дөрд һәддини көтүрдүкдә исә онун гијмәти

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040} \approx 0{,}841$$

кими тапылыр. Бу заман бурахылан хәта

$$\frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + \cdots < \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880}$$

олар. Әввәлки параграфда алдығымыз

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ вә } \operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ајрылышларында $x=1$ (бу нөгтәдә сыраларын икиси дә јығылыр) көтүрдүкдә

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

бәрабәрликләри алыныр. Бу бәрабәрликләрдән истифадә едәрәк e вә π әдәдләринин гијмәтләрини истәнилән дәгигликлә һесабламаг олар:

$$e = 2{,}7182818\ldots, \quad \pi = 3{,}1415926\ldots$$

Биномиал сырадан (§ 6)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

истифадә едәрәк, көкләри гијмәтини мүәјјән дәгигликлә һесабламаг олар. Мәсәлән,

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 49}{25 \cdot 49}} = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{100^2} + \cdots\right) = 1{,}41421356\ldots,$$

$$\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{4}} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots\right].$$

Әдәдләрин логарифмләри

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \; |x| < 1 \qquad (4)$$

вә

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots, \; |x| < 1 \qquad (5)$$

ајрылышларындан алынан

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \qquad (6)$$

бәрабәрлији васитәсилә һесабланыр. (6) сырасы (4) вә (5) сыраларына нисбәтән сүр'әтлә јығылыр. (6) бәрабәрлијиндә $x = \frac{1}{3}$ көтүрсәк,

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \cdots\right) \approx 0{,}693146.$$

Бу гајда илә тригонометрик, логарифмик вә б. функсијаларын гијмәтләри чәдвәли тәртиб едилир. Дедикләримиздән ајдындыр ки, гүввәт сыраларындан мүхтәлиф тәгриби һесабламаларда, мүәјјән интегралларын һесабланмасында вә башга мәсәләләрин һәллиндә кениш истифадә олунур.

§ 8. ГҮВВӘТ СЫРАЛАРЫНЫН КӨМӘЈИ ИЛӘ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН ҺӘЛЛИ

Елә диференсиал тәнликләр вардыр ки, онларын һәлли елементар функсијаларла ифадә олунмур вә буна көрә дә, әксәр һалларда квадратураја кәтирилмир. Мәсәлән, бирдән бөјүк тәртибли дәјишән әмсаллы хәтти диференсиал тәнликләрин һәлли, үмумијјәтлә, квадратураја кәтирилмир.

Белә тәнликләрин һәллини бә'зән гүввәт сырасы шәклиндә көстәрмәк даһа мүнасиб олур. Бу заман гүввәт сырасынын сонлу сајда һәдләринин чәмини диференсиал тәнлијин тәгриби һәлли кими дә көтүрмәк олар.

Һәллин гүввәт сырасы шәклиндә көстәрилмәси методу хәтти диференсиал тәнликләрә даһа јахшы тәтбиг олунур.

Тутаг ки, дәјишән әмсаллы

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x) \qquad (1)$$

хәтти диференсиал тәнлијинин верилмиш $p_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n)$

әмсаллары вә $f(x)$ сағ тәрәфи $x = a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында гүввәт сырасына ајрылыр. Онда һәмин тәнлијин һәллини $x - a$ фәргинин гүввәтләринә көрә јазылмыш гүввәт сырасы шәклиндә ахтармаг олар. Бурада ашағыдакы ики үсул нәзәрдән кечирилир.

I. Тутаг ки, (1) тәнлијинин $(a, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ башланғыч шәртләрини өдәјән, јә'ни

$$\varphi(a) = y_0, \; \varphi'(a) = y'_0, \ldots, \; \varphi^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)} \qquad (2)$$

бәрабәрликләрини өдәјән $y = \varphi(x)$ һәллини тапмаг лазымдыр. Бу һәлли

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{1!}\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\varphi''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\varphi^{(n)}(a) + \cdots \qquad (3)$$

Тејлор сырасы шәклиндә ахтараг. (3) сырасыны тапмаг үчүн онун әмсалларыны, јә'ни $y = \varphi(x)$ һәллинин вә онун бүтүн төрәмәләринин $x = a$ нөгтәсиндә гијмәтләрини тә'јин етмәк лазымдыр. Бунларын n дәнәси (2) башланғыч шәртләриндә верилир, јердә галанлары исә (1) тәнлији васитәсилә (2) шәртләринә әсасән тапылыр. $\varphi^{(n)}(a) = y^{(n)}(a)$ төрәмәсини тапмаг үчүн (1) тәнлијиндә x әвәзинә a әдәдини јазмаг, $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$-ин $x = a$ нөгтәсиндә гијмәтләри олараг (2) башланғыч шәртләрини көтүрмәк вә алынан бәрабәрлији $y^{(n)}(a)$-ја нәзәрән һәлл етмәк лазымдыр.

Сонра, $y^{(n+1)}(a)$ төрәмәсини тапмаг үчүн (1) тәнлијинин һәр ики тәрәфиндән x дәјишәнинә нәзәрән төрәмә алыныр:

$$y^{(n+1)} + p'_1(x)\, y^{(n-1)} + p_1(x)\, y^{(n)} + \cdots + p_n(x)\, y' + p'_n(x)\, y = f'(x).$$

Бу бәрабәрликдә x әвәзинә a әдәдини, $y, y', \ldots, y^{(n)}$ кәмијјәтләри әвәзинә исә онларын мә'лум гијмәтләрини јазараг, алынан бәрабәрлији $y^{(n+1)}(a)$-ја нәзәрән һәлл етмәк олар. Бурадан $y^{(n+1)}(a) = \varphi^{(n+1)}(a)$ төрәмәси тапылыр.

Көстәрилән гајда илә $y = \varphi(x)$ функсијасынын бүтүн

$$\varphi^{(n)}(a), \; \varphi^{(n+1)}(a), \; \varphi^{(n+2)}(a), \ldots$$

төрәмәләри вә беләликлә дә (1) тәнлијинин (3) шәклиндә һәлли тапылыр.

Гејд. Шәрһ олунан үсул јүксәктәртибли төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

шәклиндә диференсиал тәнлијин һәллини тапмаг үчүн дә тәтбиг олуна биләр.

Мисал 1.

$$y'' - xy = 1 \qquad (4)$$

тәнлијинин

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0 \qquad (5)$$

башланғыч шәртләрини өдәјән $y = \varphi(x)$ һәллини тапмалы.

Бу һәлли (3) Тејлор сырасы шәклиндә тапмаг үчүн $\varphi''(0)$, $\varphi'''(0), \ldots$ төрәмәләрини тапмаг лазымдыр ($\varphi(0)$ вә $\varphi'(0)$ кәмијјәтләри (5) шәртиндә верилмишдир). (4) бәрабәрлијиндә x әвәзинә $x = 0$ јазсаг вә $y(0) = \varphi(0) = 0$, $y'(0) = \varphi'(0) = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$y''(0) = 1 + 0 \cdot y(0) = 1$$

олар. Инди (4) бәрабәрлијини ардычыл диференсиаллајаг:

$$y''' - xy' - y = 0,$$
$$y^{(IV)} - xy'' - 2y' = 0,$$
$$y^{(V)} - xy''' - 3y'' = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Бу бәрабәрликләрдә x әвәзинә 0 әдәдини јазараг,

$$\varphi(0) = y(0) = 0,\ \varphi'(0) = y'(0) = 0,\ \varphi''(0) = y''(0) = 1.$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, онда ардычыл олараг тапарыг:

$$y'''(0) = \varphi'''(0) = 0,\ \varphi^{(IV)}(0) = 0,\ \varphi^{(V)}(0) = 3,$$
$$\varphi^{(VI)}(0) = 0,\ \varphi^{(VII)}(0) = 0,\ \varphi^{(VIII)}(0) = 3 \cdot 6, \ldots$$

Үмумијјәтлә,

$$\varphi^{(3n+2)}(0) = 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n-3) \cdot 3n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Јердә галан төрәмәләр исә сыфра бәрабәрдир. Бу гијмәтләри (3) бәрабәрлијиндә јазмагла (4) тәнлијинин ахтарылан һәллини ашағыдакы шәкилдә тапырыг:

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^5}{5!} + \frac{3 \cdot 6 \cdot x^8}{8!} + \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot x^{11}}{11!} + \cdots \qquad (6)$$

(6) сырасы x-ин бүтүн гијмәтләриндә јығылыр.

II. (1) тәнлијинин һәллини гејри-мүәјјән әмсаллы

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (7)$$

гүввәт сырасы шәклиндә дә ахтармаг олар. Бу мәгсәдлә y-ин (7) шәклиндә ифадәсини вә төрәмәләринин һәмин бәрабәрликдән тапылмыш гијмәтләрини (1) тәнлијиндә јеринә јазырлар. Тәнлијин $p_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ әмсалларыны вә $f(x)$ сағ тәрәфини дә гүввәт сырасына ајырырлар. Гүввәт сыралары үзәриндә лазыми әмәлијјатлар апарылдыгдан сонра намә'лум әмсаллар дахил олан ики гүввәт сырасынын бәрабәрлији алыныр. Гүввәт сыраларынын бәрабәр олмасы үчүн исә x-ин ејни дәрәчәли гүввәтләринин әмсаллары бәрабәр олмалыдыр. Беләликлә, ахтарылан намә'лум a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ әмсалларыны тапмаг үчүн сонсуз хәтти тәнликләр системи алыныр. Бу

әмсалларын биринчи n дәнәси ихтијари сахланылыр, јердә галанлары исә онлар васитәсилә ифадә олунур. Нәтичәдә (1) тәнлијинин n сајда ихтијари сабитдән (сахладығымыз n әмсалдан) асылы олан һәлли алыныр. Бу, тәнлијин үмуми һәллидир.

Башланғыч шәртләр верилдикдә сахланылмыш n ихтијари әмсал ади гајда илә тә'јин едилир.

Мисал 2.

$$y'' - xy = 0 \qquad (8)$$

тәнлијинин һәллини (7) гүввәт сырасы шәклиндә ахтараг. Бу мәгсәдлә (8) тәнлијиндә y әвәзинә (7) ифадәсини јазаг:

$$(2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \cdots) - (a_0 x + a_1 x^2 + + a_2 x^3 + \cdots) = 0.$$

Бурадан

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 0, \\ x^1 & 3 \cdot 2 \cdot a_3 - a_0 = 0, \\ x^2 & 4 \cdot 3 \cdot a_4 - a_1 = 0, \\ x^3 & 5 \cdot 4 \cdot a_5 - a_2 = 0, \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots \\ x^k & (k+2)(k+1)\, a_{k+2} - a_{k-1} = 0, \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

сонсуз хәтти тәнликләр системи алыныр. Онун һәлли беләдир:

$$a_{3k} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1) \cdot 3k}\, a_0,$$
$$a_{3k+1} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 3k\,(3k+1)}\, a_1,$$
$$a_{3k+2} = 0.$$

Бурада a_0 вә a_1 ихтијари әмсаллардыр. Бу гијмәтләри (7) бәрабәрлијиндә нәзәрә алдыгда (8) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_0 x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1) \cdot 3k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 3k(3k+1)} = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

кими алыныр. $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ хүсуси һәлләрини тә'јин едән гүввәт сыралары x-ин бүтүн гијмәтләриндә јығылыр (јохла!).

Хүсуси һалда, (8) тәнлијинин

$$y(0) = a_0 = 1,\ y'(0) = a_1 = 0$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли $y = y_1(x)$ олар.

§ 9. БЕССЕЛ ТӘНЛИЈИ

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0 \qquad (1)$$

шәклиндә диференсиал тәнлијә Бессел тәнлији дејилир. Бурада сабит ν әдәди параметрдир вә тәнлијин *индекси* адланыр.

Бессел тәнлији бир чох физики, техники вә ријази мәсәләләрин һәллиндә кениш тәтбиг едилир.

Әмсаллары сабит олмајан (1) тәнлијинин һәллини үмумиләшмиш гүввәт сырасы шәклиндә, јә'ни

$$y = x^r \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa x^\kappa \tag{2}$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр (r һәр һансы сабит әдәддир). Бунун сәбәби одур ки, $x=0$ нөгтәси тәнлијин мәхсуси нөгтәсидир. Бурада r әдәди һәләлик мүәјјән олмадығындан a_0 әмсалыны сыфырдан фәргли һесаб етмәк олар.

(2) ифадәсини вә

$$y' = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (r+\kappa) a_\kappa x^{r+\kappa-1},$$

$$y'' = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (r+\kappa)(r+\kappa-1) a_\kappa x^{r+\kappa-2}$$

төрәмәләрини (1) тәнлијиндә јеринә јазаг:

$$x^2 \sum_{\kappa=0}^{\infty} (r+\kappa)(r+\kappa-1) a_\kappa x^{r+\kappa-2} + x \sum_{\kappa=0}^{\infty} (r+\kappa) a_\kappa x^{r+\kappa-1} + (x^2-\nu^2) \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa x^{r+\kappa} = 0.$$

Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини x^r вуруғуна бөлсәк вә һәдләри груплашдырсаг

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} [(r+\kappa)^2-\nu^2]\, a_\kappa x^\kappa + \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa x^{\kappa+2} = 0 \tag{3}$$

бәрабәрлији алынар. x-ин мүхтәлиф гүввәтләринин әмсалларыны сыфра бәрабәр һесаб едәк:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & (r^2-\nu^2)\, a_0 = 0 \\ x^1 & [(r+1)^2-\nu^2]\, a_1 = 0 \\ x^\kappa & [(r+\kappa)^2-\nu^2]\, a_\kappa + a_{\kappa-2} = 0, \ \kappa \geq 2. \end{array} \tag{4}$$

Бурадан $a_0 \neq 0$ олдуғундан $r_1 = \nu$ вә $r_2 = -\nu$ алыныр.

Әввәлчә $r_1 = \nu \geq 0$ көкүнә ујғун олан һәлли тапаг. (4) бәрабәрликләринин икинчисиндән

$$[(\nu+1)^2-\nu^2]\, a_1 = 0, \ (2\nu+1)\, a_1 = 0, \ a_1 = 0$$

алыныр. (4) бәрабәрликләринин үчүнчүсүнә көрә

$$a_\kappa = -\frac{a_{\kappa-2}}{(r+\kappa)^2-\nu^2}, \ \kappa \geq 2$$

вә κ-нын чүт вә тәк әдәд олмасындан асылы олараг

$$a_{2\kappa+1} = -\frac{a_{2\kappa-1}}{(2\kappa+1)(2\nu+2\kappa+1)}, \tag{5}$$

$$a_{2\kappa} = -\frac{a_{2\kappa-2}}{2\kappa(2\nu+2\kappa)} = -\frac{a_{2\kappa-2}}{2^2\kappa(\nu+\kappa)} \tag{6}$$

олар. $a_1 = 0$ олдуғундан $a_{2\kappa+1} = 0$ ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots$) вә

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(\nu+1)(\nu+2)}, \ldots,$$

$$a_{2\kappa} = (-1)^\kappa \frac{a_0}{2^{2\kappa}\kappa!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+\kappa)} \tag{7}$$

мүнасибәтләри алыныр. Әмсаллар үчүн тапдығымыз бу гијмәтләри (2) бәрабәрлијиндә јеринә јазараг, $r_1 = \nu$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$y_1 = x^\nu \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{a_0}{2^{2\kappa}\kappa!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+\kappa)} x^{2\kappa}. \tag{8}$$

Бу сыра Даламбер әламәтинә әсасән x-ин бүтүн һәгиги гијмәтләриндә јығыландыр. (8) сырасы илә тә'јин олунан функсија (1) тәнлијинин хүсуси һәллидир. Бу функсија a_0 сабитинин мүәјјән сечилмиш гијмәтиндә *биринчи нөв ν тәртибли* вә ја *ν индексли Бессел функсијасы* адланыр вә $I_\nu(x)$ илә ишарә олунур. Бессел функсијасына бә'зән *биринчи нөв силиндрик функсија* да дејилир.

Ејни гајда илә (1) тәнлијинин $r_2 = -\nu$ көкүнә ујғун һәллини дә гурмаг олар. Бу һалда (4) бәрабәрликләринин үчүнчүсүндән чүт индексли $a_{2\kappa}$ әмсалларынын тапыла билмәси үчүн

$$(r_2+2\kappa)^2-\nu^2 \neq 0, \ r_2+2\kappa \neq \nu \ (= r_1), \ r_1-r_2 \neq 2\kappa$$

шәрти өдәнилмәлидир. $r_1 = \nu$ вә $r_2 = -\nu$ олдуғундан $r_1 - r_2 = 2\nu$ олар. Демәли, ν әдәди там олмадыгда икинчи хүсуси һәлли тапмаг олар. Бу һәлл (8) бәрабәрлијиндә ν әвәзинә $-\nu$ јазмагла алыныр:

$$y_2 = x^{-\nu} \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{a_0}{2^{2\kappa}\kappa!(-\nu+1)(-\nu+2)\cdots(-\nu+\kappa)} x^{2\kappa}. \tag{9}$$

Бу һалдан a_0 сабитинин сечилмиш мүәјјән гијмәтиндә алынан функсијаја биринчи нөв $-\nu$ индексли Бессел функсијасы дејилир вә $I_{-\nu}(x)$ илә ишарә олунур.

ν әдәди там олмадыгда (8) вә (9) ајрылышларында x-ин мүхтәлиф гүввәтләри иштирак едәр. Буна көрә дә ν әдәди там олмадыгда $I_\nu(x)$ вә $I_{-\nu}(x)$ функсијалары (1) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләридир. Бу һалда һәмин тәнлијин үмуми һәлли

$$y = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x) \tag{10}$$

шәклиндә олар.

Бурада бир хүсуси һалы да гејд едәк. (1) тәнлијинин $\nu = \frac{1}{2}$ олдугда хүсуси һәлләри

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

вә

$$I_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

Бессел функсијалары, үмуми һәлли исә

$$y=C_1 I_{\frac{1}{2}}(x)+C_2 I_{-\frac{1}{2}}(x)$$

ифадәси олар.

Инди, фәрз едәк ки, ν там мүсбәт әдәддир. Бу һалда (1) тәнлијинин бир хүсуси һәлли јенә дә (8) бәрабәрлији илә тә'јин олунар, (9) бәрабәрлијинин бир сыра һәдләринин мәхрәҹи исә сыфра чеврилләр. Буна көрә дә Бессел тәнлијинин икинҹи хүсуси һәлли (9) бәрабәрлији илә тә'јин олуна билмәз.

Бесселин $I_\nu(x)$ функсијасы a_0-ын $a_0=\frac{1}{2^\nu \nu!}$ гијмәтиндә ν там мүсбәт әдәд олдугда (8) бәрабәрлији илә тә'јин олунур:

$$I_\nu(x)=\frac{x^\nu}{2^\nu \nu!}\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa\frac{1}{2^{2\kappa}\kappa!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+\kappa)}x^{2\kappa} \tag{11}$$

Бу бәрабәрлији

$$I_\nu(x)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa\frac{1}{\kappa!(\nu+\kappa)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa+\nu} \tag{12}$$

кими дә јазмаг олар.

Хүсуси һалда, $\nu=0$ олдугда алынан

$$xy''+y'+xy=0 \tag{13}$$

тәнлијинин бир хүсуси һәлли олан биринҹи нөв сыфыр тәртибли Бессел функсијасы

$$I_0(x)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa\frac{1}{(\kappa!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa} \tag{14}$$

кими јазылар.

Көстәрмәк олар ки, ν әдәди там олдугда (1) тәнлијинин икинҹи хүсуси һәлли

$$Y_\nu(x)=I_\nu(x)\ln x+x^{-\nu}\sum_{\kappa=0}^{\infty}b_\kappa x^\kappa \tag{15}$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр. Бу ифадәни (1) тәнлијиндә јазараг b_κ әмсаллары тә'јин едилир.

(15) һәлли $x=0$ нөгтәсиндә сонсузлуға чеврилир. Белә тә'јин едилмиш $Y_\nu(x)$ функсијасынын мүәјјән сабитлә һасилинә *икинҹи нөв ν тәртибли Бессел функсијасы* дејилир. $I_\nu(x)$ вә $Y_\nu(x)$ функсијалары (1) тәнлијинин хәтти асылы олмајан

һәлләридир. Буна көрә дә ν там әдәд олдугда (1) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y=C_1 I_\nu(x)+C_2 Y_\nu(x) \tag{16}$$

шәклиндә олар.

Ајдындыр ки, (1) тәнлијинин $x=0$ нөгтәсиндә сонлу һәллини алмаг үчүн (16) бәрабәрлијиндә $C_2=0$ көтүрүлмәлидир.

§ 10. БЕССЕЛ ФУНКСИЈАЛАРЫНЫН БИР СЫРА ХАССӘЛӘРИ

Бессел функсијаларынын бир сыра мүһүм вә мараглы хассәләри вардыр. Бунларын бир нечәсини көстәрәк:

I. Бессел функсијалары арасындакы әлагәни тә'јин етмәк үчүн әввәлки параграфын (12)-чи бәрабәрлијиндән алынан

$$x^\nu I_\nu(x)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa\frac{2^\nu}{\kappa!(\nu+\kappa)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa+2\nu}\quad(\nu>0)$$

бәрабәрлијини x-ә нәзәрән диференсиаллајаг:

$$\frac{d}{dx}[x^\nu I_\nu(x)]=\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa\frac{(2\kappa+2\nu)2^\nu}{2\cdot\kappa!(\nu+\kappa)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa+2\nu-1}=$$

$$=x^\nu\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa\frac{1}{\kappa!(\nu+\kappa-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa+\nu-1}=x^\nu I_{\nu-1}(x). \tag{1}$$

Ејни гајда илә

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}I_\nu(x)]=-x^{-\nu}I_{\nu+1}(x) \tag{2}$$

дүстуруну да алмаг олар. Бу дүстурлары ачыг шәкилдә јазаг:

$$\nu x^{\nu-1}I_\nu(x)+x^\nu I'_\nu(x)=x^\nu I_{\nu-1}(x),$$

$$-\nu x^{-\nu-1}I_\nu(x)+x^{-\nu}I'_\nu(x)=-x^{-\nu}I_{\nu+1}(x).$$

Бу бәрабәрликләрин биринҹисини x^ν-јә, икинҹисини $x^{-\nu}$-јә ихтисар етдикдән сонра алынан бәрабәрликләри нөвбә илә тәрәф-тәрәфә чыхсаг вә топласаг

$$I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}I_\nu(x), \tag{3}$$

$$I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)=2I'_\nu(x) \tag{4}$$

дүстурлары алынар. Истәнилән там ν әдәди үчүн исбат етдијимиз (3) вә (4) дүстурлары ν-нүн истәнилән гијмәтиндә дә доғрудур.

II. Бессел функсијасы үчүн ν-нүн там мәнфи олмајан гијмәтләриндә алынмыш

$$I_\nu(x)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa\frac{1}{\kappa!(\nu+\kappa)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa+\nu} \tag{5}$$

көстәрилишиндән (§ 9) ајдындыр ки, $\nu \geqslant 1$ олдугда $I_\nu(0)=0$ вә $\nu \geqslant 2$ олдугда $I'_\nu(0)=0$ олур. Ејни заманда $I_0(0)\neq 0$ вә $I'_1(0)\neq 0$.

Бунунла belә, исбат етмәк олар ки, истәнилән $\nu \geqslant 0$ индексли һәр бир $I_\nu(x)$ Бессел функсијасынын $(0, +\infty)$ интервалында сонсуз сајда сыфры вар.

III. λ вә μ әдәдләри $I_\nu(x)$ $(\nu \geqslant 0)$ Бессел функсијасынын мүхтәлиф сыфырлары олдугда

$$\int_0^1 x I_\nu(\lambda x) I_\nu(\mu x)\, dx = 0 \tag{6}$$

бәрабәрлији доғру олар. Буна Бессел функсијаларынын *ортогоналлыг хассәси* дејилир.

(6) бәрабәрлијини исбат етмәк үчүн гејд едәк ки, $y=I_\nu(x)$ функсијасы

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y=0 \tag{7}$$

Бессел тәнлијинин һәлли олдуғундан, истәнилән $\gamma \geqslant 0$ әдәди үчүн $y=I_\nu(\gamma x)$ функсијасы

$$x^2y''+xy'+(\gamma^2x^2-\nu^2)\,y=0 \tag{8}$$

тәнлијинин һәллидир. Онда мүхтәлиф λ вә μ әдәдләри үчүн

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}I_\nu(\lambda x)+x\frac{d}{dx}I_\nu(\lambda x)+(\lambda^2x^2-\nu^2)\,I_\nu(\lambda x)=0,$$

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}I_\nu(\mu x)+x\frac{d}{dx}I_\nu(\mu x)+(\mu^2x^2-\nu^2)\,I_\nu(\mu x)=0$$

ејниликләри өдәниләр. Бу ејниликләрин биринчисини $I_\nu(\mu x)$-ә, икинчисини $I_\nu(\lambda x)$-ә вуруб, тәрәф-тәрәфә чыхдыгда

$$\frac{d}{dx}\left\{x\left[I_\nu(\mu x)\frac{d}{dx}I_\nu(\lambda x)-I_\nu(\lambda x)\frac{d}{dx}I_\nu(\mu x)\right]\right\}=$$
$$=x(\mu^2-\lambda^2)\,I_\nu(\lambda x)\,I_\nu(\mu x) \tag{9}$$

ејнилији алыныр. Бу ејниликдә

$$\frac{d}{dx}I_\nu(\lambda x)=\lambda I'_\nu(\lambda x) \text{ вә } \frac{d}{dx}I_\nu(\mu x)=\mu I'_\nu(\mu x)$$

олдуғуну нәзәрә алаг вә ону $[0, 1]$ парчасы үзрә интеграллајаг:

$$(\mu^2-\lambda^2)\int_0^1 xI_\nu(\lambda x)\,I_\nu(\mu x)\,dx=\lambda I'_\nu(\lambda)\,I_\nu(\mu)-\mu I_\nu(\lambda)\,I'_\nu(\mu). \tag{10}$$

Бурадан $I_\nu(\lambda)=I_\nu(\mu)=0\ (\lambda\neq\mu)$ олдугда (9) бәрабәрлији алыныр.

IV. Инди истәнилән λ әдәди үчүн

$$\int_0^1 x\,[I_\nu(\lambda x)]^2\,dx \tag{11}$$

интегралыны һесаблајаг. Бу мәгсәдлә һәмин интегралы

$$\int_0^1 x\,[I_\nu(\lambda x)]^2\,dx=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\lambda x\,[I_\nu(x)]^2\,dx \tag{12}$$

шәклиндә јазаг. $y=I_\nu(x)$ функсијасы (7) тәнлијинин һәлли олдуғундан

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y\equiv0,\quad (y\equiv I_\nu(x))$$

ејнилији доғрудур. Бу ејнилијин һәр ики тәрәфини $2y'\equiv 2I'_\nu(x)$ функсијасына вурмагла

$$2x^2y''y'+2x(y')^2+2(x^2-\nu^2)yy'\equiv0$$

ејнилијини вә бурадан

$$2xy^2\equiv[x^2(y')^2]'+[(x^2-\nu^2)\,y^2]' \tag{13}$$

мүнасибәтини аларыг. (13) бәрабәрлијини $[0, \lambda]$ парчасы үзрә интегралласаг

$$2\int_0^\lambda xy^2dx=\left[x^2(y')^2+(x^2-\nu^2)\,y^2\right]_0^\lambda=\lambda^2\,[I'_\nu(\lambda)]^2+(\lambda^2-\nu^2)\,[I_\nu(\lambda)]^2$$

олар. Бурадан (12) бәрабәрлијинә әсасән алырыг:

$$\int_0^1 x\,[I_\nu(\lambda x)]^2\,dx=\frac{1}{2}\left\{[I'_\nu(\lambda)]^2+\left(1-\frac{\nu^2}{\lambda^2}\right)[I_\nu(\lambda)]^2\right\}. \tag{14}$$

XXXVIII ФӘСИЛ

ФУРЈЕ СЫРАСЫ

§ 1. ХӘТТИ НОРМАЛАШМЫШ ФӘЗАЛАРЫН ТАМЛЫҒЫ

Тутаг ки, R хәтти нормалашмыш фәзадыр вә онун истәнилән $x\in R$ елементинин нормасы $\|x\|$ илә ишарә олунмушдур. Бу фәзанын истәнилән $x\in R$ вә $y\in R$ елементләри арасындакы мәсафәни

$$\rho(x, y)=\|x-y\| \tag{1}$$

кими тә'јин етдикдә һәмин фәза метрик фәзаја чеврилир (XXV, § 1). (1) метрикасына R фәзасы нормасынын доғурдуғу метрика дејилир. Беләликлә, һәр бир хәтти нормалашмыш фәза (1) тәбии метрикасы илә метрикләшир. Белә фәзаларда $\rho(x, y)$ метрикасы һәрәкәтә нәзәрән инвариантдыр вә мүсбәт бирчинслидир, јә'ни истәнилән $x\in R$, $y\in R$, $z\in R$ елементләри вә һәгиги α әдәди үчүн

$$\rho(x+z,\ y+z)=\|(x+z)-(y+z)\|=\|x-y\|=\rho(x, y),$$
$$\rho(\alpha x,\ \alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|=\|\alpha(x-y)\|=|\alpha|\cdot\|x-y\|=|\alpha|\,\rho(x, y)$$

мүнасибәтләри өдәнилир.

Гејд едәк ки, хәтти метрик фәзаны нормалашдырмаг мүмкүн олмаја да биләр. Лакин хәтти метрик фәзанын $\rho(x, y)$ метрикасы јухарыда көстәрилән һәрәкәтә нәзәрән инвариантлыг вә мүсбәт бирчинслилик хассәләрини өдәдикдә, ону нормалашдырмаг мүмкүндүр. Бу һалда, x елементинин нормасы $\|x\|=\rho(x, 0)$ бәрабәрлији илә тә'јин олунур. Белә норма үчүн хәтти нормалашмыш фәзаларын $1_0 - 3_0$ аксиомлары (IV, § 9) өдәнилир.

Метрик фәзаларда олдуғу кими һәр бир хәтти нормалашмыш фәзада да (1) метрикасына нәзәрән ардычыллығын јығылмасындан, фәзанын тамлығындан вә с. данышмаг олар.

Тә'риф 1. *Хәтти нормалашмыш R фәзасынын*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{2}$$

елементләри ардычыллығы вә $x \in R$ елементи үчүн

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$$

бәрабәрлији өдәнилдикдә, дејирләр ки, (2) ардычыллығы нормаја көрә x елементинә јығылыр. Беләликлә, (2) ардычыллығынын нормаја көрә x елементинә јығылмасы, һәмин норманын доғурдуғу (1) метрикасында (2) ардычыллығынын x елементинә јығылмасы демәкдир.

Гејд едәк ки, ејни бир хәтти фәзада мүхтәлиф нормалар тә'јин едәрәк, мүхтәлиф мә'нада јығылма анлајышлары алмаг олар.

Мисал 1. Верилмиш $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $x=x(t)$ функсијаларындан ибарәт олан R хәтти фәзасында норманы

$$\|x\|_c = \sup_{a\le t\le b} |x(t)| \tag{3}$$

кими тә'јин етдикдә хәтти нормалашмыш $C[a, b]$ фәзасы (IV, § 2, 9) алыныр. Бу фәзанын нормасында $\{x_k(t)\}$ ардычыллығынын $x(t) \in C[a, b]$ функсијасына јығылмасы

$$\lim_{k\to\infty} [\sup_{a\le t\le b} |x_k(t)-x(t)|] = \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_c = 0$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси демәкдир. Бу да кәсилмәјән функсијаларын $\{x_k(t)\}$ ардычыллығынын $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $x(t)$ функсијасына мүнтәзәм јығылмасыдыр.

Мисал 2. $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијаларын R хәтти фәзасында норманы

$$\|x\|_{L_1} = \int_a^b |x(t)|\,dt \tag{4}$$

кими тә'јин етдикдә хәтти нормалашмыш фәза алыныр ((4) нормасы үчүн хәтти нормалашмыш фәзаларын $1_0 - 3_0$ аксиомларынын (IV, § 9) өдәнилмәсини асанлыгла јохламаг олар!). Бу фәзаны $L_1^{(c)}[a, b]$ илә ишарә едәк. $\{x_k(t)\}$ функсионал ардычыллығынын $L_1^{(c)}[a, b]$ фәзасынын нормасында $x(t) \in L_1^{(c)}[a, b]$ функсијасына јығылмасы

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_{L_1^{(c)}} = \lim_{k\to\infty} \int_a^b |x_k(t) - x(t)|\,dt = 0$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси демәкдир. Буна ардычыллығын орта јығылмасы дејилир; $\{x_k(t)\}$ ардычыллығы орта мә'нада $x(t)$ функсијасына јығылыр.

Мисал 3. Инди $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијаларын R хәтти фәзасында норманы

$$\|x\|_{L_2^{(c)}} = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

кими тә'јин едәк. Бу заман хәтти нормалашмыш фәза аксиомлары өдәнилир:

1_0. $\|x\|_{L_2^{(c)}} \geqslant 0$ олмасы ајдындыр. Кәсилмәјән функсија үчүн $\|x\|_{L_2^{(c)}} = 0$ олдугда $x(t) \equiv 0$ олар.

2_0. Һәгиги λ - әдәди үчүн $\|\lambda x\|_{L_2^{(c)}} = \left(\int_a^b |\lambda x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} =$

$$= |\lambda| \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\,\|x\|_{L_2^{(c)}}.$$

3_0. Истәнилән $x \in R$ вә $y \in R$ үчүн

$$\|x + y\|_{L_2^{(c)}} \le \|x\|_{L_2^{(c)}} + \|y\|_{L_2^{(c)}} \tag{6}$$

бәрабәрсизлијинин доғру олмасы Коши—Бунјаковскинин

$$\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt \le \left(\int_a^b [x(t)]^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b [y(t)]^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

бәрабәрсизлијинә әсасән исбат олунур. (7) бәрабәрсизлији исә

$$\left[\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right]^2 = \int_a^b x^2(t)\,dt \int_a^b y^2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_a^b \left(\int_a^b [x(u)\,y(t) - y(u)\,x(t)]^2\,du\right) dt$$

ејнилијиндән алыныр. Сонунчу ејнилијин доғрулуғуну асанлыгла јохламаг олар.

Беләликлә, алынан хәтти нормалашмыш фәзаны $L_2^{(c)}[a, b]$ илә ишарә едирләр. $\{x_k(t)\}$ ардычыллығынын $L_2^{(c)}[a, b]$ фә-

засынын нормасында $x(t)\in L_2^{(c)}[a, b]$ функсијасына јығылмасы

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k - x\|_{L_2^{(c)}} = \lim_{k\to\infty}\left(\int_a^b |x_k(t)-x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

мүнасибәтинин өдәнилмәси демәкдир. Буна ардычыллығын *орта квадратик јығылмасы* дејилир.

Беләликлә, ејни бир хәтти фәзада ($[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијалар чохлуғунда) (3), (4) вә (5) кими үч мүхтәлиф норма тә'јин етдикдә функсијалар ардычыллығынын мүнтәзәм, орта вә квадратик орта јығылмасы кими мүхтәлиф јығылма анлајышлары алыныр.

Мисал 4. n-өлчүлү E_n метрик фәзасында (XXV, § 1) истәнилән $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәсинин нормасы

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$$

кими тә'јин олунур (IV, § 9). Белә алынан хәтти нормалашмыш фәзада ардычыллығын јығылмасы ујғун координатлар ардычыллығы үзрә јығылмадыр (XXV, § 3).

Тә'риф 2. Хәтти нормалашмыш фәза, норманын доғурдуғу метрикаја нәзәрән там метрик фәза олдуғда она там фәза дејилир.

Хәтти нормалашмыш там фәзаја Банах[1] *фәзасы дејилир. Банах фәзасына бә'зән (B) типли фәза да дејилир.*

Мисал 5. $E_n (n\geq 1)$ вә $C[a, b]$ фәзалары Банах фәзаларыдыр. $L_1^{(c)}[a, b]$ вә $L_2^{(c)}[a, b]$ фәзалары там дејилдир.

E_n фәзасынын тамлығы чохөлчүлү фәзанын нөгтәләр ардычыллығынын јығылмасы һаггындакы Коши критерисиндән алыныр (XXV, § 3). $C[a, b]$ фәзасынын тамлығы исә функсионал ардычыллығын бу фәзанын нормасында јығылмасы мүнтәзәм јығылма олдуғундан вә функсионал ардычыллығын мүнтәзәм јығылмасы һаггындакы Коши критерисиндән (XXXVI, § 4) ајдындыр.

$L_2^{(c)}[a, b]$ фәзасынын там олмадығыны көстәрмәк үчүн $L_2^{(c)}[-1, 1]$ фәзасына бахмаг кифајәтдир. $L_2^{(c)}[-1, 1]$ фәзасынын там олмадығына инанмаг үчүн һәмин фәзада фундаментал олан, лакин јығылмајан бир функсионал ардычыллыг көстәрмәк лазымдыр. Бу мәгсәдлә $[-1, 1]$ парчасында кәсилмәјән

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1, & -1\leq t\leq -\frac{1}{n} \text{ олдугда} \\ nt, & -\frac{1}{n}\leq t\leq \frac{1}{n} \text{ олдугда} \\ 1, & \frac{1}{n}\leq t\leq 1 \text{ олдугда} \end{cases} \qquad (8)$$

[1] Стефан Банах (1892—1945) мәшһур Полша ријазијјатчысыдыр

функсијалары ардычыллығына бахаг. (8) функсијалары мәһдуддур $|\varphi_n(t)|\leq 1$ вә $L_2^{(c)}[-1, 1]$ фәзасында фундаментал ардычыллыг тәшкил едир:

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|^2_{L_2^{(c)}} = \int_{-1}^{1} |\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|^2 dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|^2 dt <$$

$$< 4\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dt = \frac{8}{n}\to 0 \quad (m\to\infty,\ n\to\infty;\ m>n).$$

Лакин $\{\varphi_n(t)\}$ ардычыллығы $L_2^{(c)}[-1, 1]$ фәзасынын нормасында һеч бир кәсилмәјән $\varphi(t)$ функсијасына, jә'ни һеч бир $\varphi(t)\in L_2^{(c)}[-1, 1]$ функсијасына јығылмыр. Буну исбат етмәк үчүн әксини фәрз едәк ки, $\{\varphi_n(t)\}$ ардычыллығы $\varphi(t)\in L_2^{(c)}[-1, 1]$ функсијасына јығылыр:

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|_{L_2^{(c)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1}^{1}|\varphi_n(t)-\varphi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0. \qquad (9)$$

Онда һәмин $\varphi(t)$ вә

$$\psi(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0 \text{ олдугда} \\ 1, & 0 < t < 1 \text{ олдугда} \end{cases}$$

функсијалары үчүн (6) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$\|\psi-\varphi\|_{L_2^{(c)}} \leq \|\psi-\varphi_n\|_{L_2^{(c)}} + \|\varphi_n-\varphi\|_{L_2^{(c)}} \qquad (10)$$

мүнасибәти алыныр. Јохламаг олар ки,

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\psi\|_{L_2^{(c)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1}^{1}|\varphi_n(x)-\psi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad (11)$$

бәрабәрлији доғрудур. (9) вә (11) бәрабәрликләринә әсасән (10) мүнасибәтиндән

$$\|\psi-\varphi\|^2_{L_2^{(c)}} = \int_{-1}^{1}|\psi(t)-\varphi(t)|^2 dt = 0$$

бәрабәрлији, бурадан исә

$$\int_{-1}^{0}|\psi(t)-\varphi(t)|^2 dt = 0, \quad \int_{0}^{1}|\psi(t)-\varphi(t)|^2 dt = 0 \qquad (12)$$

бәрабәрликләри алыныр. Шәртә көрә $\psi(t)-\varphi(t)$ фәрги $[-1, 0)$ вә $[0, 1]$ областларынын һәр бириндә ајрылыгда кәсилмәјән

функсијалардыр. Онда (12) бәрабәрликләриндән һәмин областларда

$$\psi(t)-\varphi(t)=0 \quad (t\in[-1,\ 0),\ t\in[0,\ 1])$$

ејнилији алыныр ($f(t)\in C[a,\ b]$ функсијасы үчүн $\int_a^b f^2(t)\,dt=0$ олмасындан $f(t)=0,\ t\in[a,\ b]$ ејнилији алыныр). Бурадан ајдындыр ки,

$$\lim_{t\to-0}\varphi(t)=\lim_{t\to-0}\psi(t)\neq\lim_{t\to+0}\psi(t)=\lim_{t\to+0}\varphi(t)$$

олар, јә'ни $\varphi(t)$ функсијасы $t=0$ нөгтәсиндә кәсиләндир. Алынан зиддијјәт фәрзијјәмизин доғру олмадығыны көстәрир.

Ејни гајда илә $L_1^{(c)}[a,\ b]$ фәзасынын да там олмадығыны көстәрмәк олар.

Там олмајан $L_1^{(c)}[a,\ b]$ вә $L_2^{(c)}[a,\ b]$ фәзаларына „јени елементләр" әлавә етмәклә онлары тамамламаг, јә'ни там фәза шәклинә кәтирмәк олар. Бу һалда алынан фәзалары үјғун олараг $L_1\ [a,\ b]$ вә $L_2[a,\ b]$ илә ишарә едирләр.

Тә'риф 3. Хәтти нормалашмыш R фәзасынын истәнилән $x\in R$ елементинә, һәмин фәза елементләринин M чохлуғундан R-ин нормасына көрә јығылан $\{x_n\}$ $(x_n\in M)$ ардычыллығы ајырмаг мүмкүн олдугда, дејирләр ки, M чохлуғу R фәзасында сыхдыр (вә ја һәр јердә сыхдыр).

Хәтти нормалашмыш R фәзасында сых олан $\{x_k\}$ $(x_k\in R)$ һесаби чохлуғу вардырса, она *сепарабел фәза* дејилир.

Мисал 6. E_1 фәзасы сепарабел фәзадыр. Бүтүн расионал әдәдләр чохлуғу (һесаби чохлуг) E_1 фәзасында сыхдыр (XII, § 1).

Мисал 7. E_n фәзасы сепарабел фәзадыр. Координатлары расионал әдәдләр олан бүтүн нөгтәләр чохлуғу (һесаби чохлуг) E_n фәзасында сыхдыр (исбат един).

Мисал 8. Әмсаллары расионал әдәдләр олан бүтүн чәбри чохһәдлиләр чохлуғу һесаби чохлугдур вә $C[a,\ b]$ фәзасында сыхдыр (исбат един). Буна көрә дә $C[a,\ b]$ сепарабел фәзадыр.

§ 2 $L_p^{(R)}[a, b]$ вә l_p ФӘЗАЛАРЫ

$[a,\ b]$ парчасында тә'јин олунмуш вә мүтләг гијмәтинин p-чи дәрәчәси $(1\leqslant p<+\infty)$ һәмин парчада Риман мә'нада интегралланан (үмумијјәтлә, гејри-мәхсуси мә'нада), јә'ни

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx<+\infty$$

шәртини өдәјән f функсијалары чохлуғуну $L_p^{(R)}[a,\ b]$ илә ишарә едәк. Бу фәзада истәнилән $f\in L_p^{(R)}[a,\ b]$ функсијасынын

нормасыны

$$\|f\|_{L_p^{(R)}}=\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty \tag{1}$$

кими тә'јин едирләр. $L_p^{(R)}[a,\ b]$ фәзасынын сыфыр елементи олараг

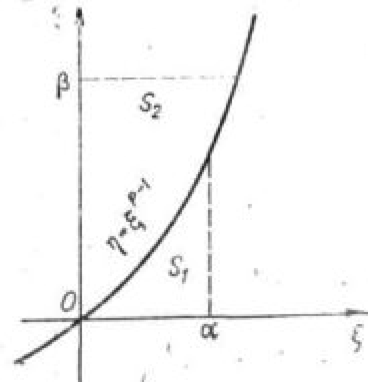
$$\int_a^b |\theta(x)|^p\,dx=0 \tag{2}$$

шәртини өдәјән $\theta(x)$ функсијасыны көтүрмәк лазымдыр. $\theta(x)=0$ функсијасы (2) шәртини өдәјир. Лакин бу шәрти өдәјән башга функсијалар да вардыр: (2) бәрабәрлијинин өдәнилмәси үчүн $\theta(x)$ функсијасынын кәсилмәз олдуғу бүтүн нөгтәләрдә сыфра бәрабәр олмасы, јә'ни $\theta(x)=0$ олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

$L_p^{(R)}[a,\ b]$ фәзасынын хәтти нормалашмыш фәза олдуғуну исбат етмәк үчүн бир нечә көмәкчи тәклиф лазымдыр.

$(\xi,\ \eta)$ мүстәвиси үзәриндә јерләшән $\eta=\xi^{p-1}$ вә ја $\xi=\eta^{q-1}$ $(pq=q+p)$ әјрисини көтүрәк (шәкил 265). Шәкилдән ајдындыр ки, S_1 вә S_2 саһәләринин чәми $\alpha\beta$ һасилиндән кичик дејилдир:

$$S_1+S_2\geqslant\alpha\beta.$$



Шәкил 265

Бурадан

$$S_1=\int_0^\alpha \xi^{p-1}d\xi=\frac{\alpha^p}{p}$$

вә $S_2=\int_0^\beta \eta^{q-1}d\eta=\frac{\beta^q}{q}$

олдуғундан

$$\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q} \tag{3}$$

аларыг. Бу бәрабәрсизликдә $\alpha=|f_1(x)|\in L_p^{(R)}[a,\ b]$ вә $\beta=|\varphi_1(x)|\in L_q^{(R)}[a,\ b]$ гәбул едәрәк, алынан мүнасибәти интегралласаг

$$\int_a^b|f_1(x)\varphi_1(x)|dx\leqslant\frac{1}{p}\int_a^b|f_1(x)|^p\,dx+\frac{1}{q}\int_a^b|\varphi_1(x)|^q\,dx$$

олар. Сонунчу бәрабәрсизликдә f_1 әвәзинә $\frac{f(x)}{\|f\|_{L_p^{(R)}}}$ вә φ_1 әвәзинә $\frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_{L_q^{(R)}}}$ көтүрдүкдә истәнилән $f\in L_p^{(R)}[a,\ b]$ вә

$\varphi(x)\in L_q^{(R)}[a, b]$ функсиjалары үчүн

$$\frac{1}{\|f\|_{L_p^{(R)}}\cdot\|\varphi\|_{L_q^{(R)}}}\int_a^b |f(x)\varphi(x)|\,dx < 1$$

вә jа

$$\int_a^b |f(x)\varphi(x)|\,dx < \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |\varphi(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4)$$

бәрабәрсизлиjи алынар.

(4) бәрабәрсизлиjинә Һөлдер[1] *бәрабәрсизлиjи деjилир.*

Еjни гаjда илә (3) бәрабәрсизлиjиндән $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p<+\infty$ вә $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^q<+\infty$ шәртләрини өдәjән $\{a_k\}$ вә $\{b_k\}$ ардычыллыглары үчүн Һөлдерин башга

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k b_k| < \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5)$$

бәрабәрсизлиjини алмаг олар.

Тутаг ки, $f\in L_p^{(R)}[a, b]$ вә $\varphi\in L_p^{(R)}[a, b]$ ихтиjари функсиjалардыр. Онда (4) бәрабәрсизлиjинә көрә

$$\int_a^b |f+\varphi|^p dx \leqslant \int_a^b |f+\varphi|^{p-1}|f|\,dx + \int_a^b |f+\varphi|^{p-1}|\varphi|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_a^b |f+\varphi|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left[\left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |\varphi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

вә jа

$$\left(\int_a^b |f+\varphi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (6)$$

олар. Еjни мүһакимә илә (5) бәрабәрсизлиjиндән $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p<+\infty$ вә $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^p<+\infty$ шәртләрини өдәjән ихтиjари $\{a_k\}$ вә $\{b_k\}$ ардычыллыглары үчүн

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (7)$$

бәрабәрсизлиjини алмаг олар.

(6) вә (7) бәрабәрсизликләринә Г. Минковски[1] бәрабәрсизликләри деjилир.

$L_p^{(R)}[a, b]$ хәтти нормалашмыш фәзадыр.

Доғрудан да, (1) нормасы үчүн хәтти нормалашмыш фәзанын 1_0-3_0 аксиомлары (IV, §9) өдәнилир.

1_0. $\|f\|_{L_p^{(R)}}>0$. $\|f\|_{L_p^{(R)}}=0$ олдугда $f(x)=\theta(x)$ олар.

2_0. Һәгиги λ әдәди үчүн

$$\|\lambda f\|_{L_p^{(R)}}=\left(\int_a^b |\lambda f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|\,\|f\|_{L_p^{(R)}}.$$

3_0. Истәнилән $f\in L_p^{(R)}[a, b]$ вә $\varphi\in L_p^{(R)}[a, b]$ үчүн

$$\|f+\varphi\|_{L_p^{(R)}}<\|f\|_{L_p^{(R)}}+\|\varphi\|_{L_p^{(R)}} \qquad (8)$$

бәрабәрсизлиjи (jә'ни (6) бәрабәрсизлиjи) доғрудур.

$\{f_n\}$ $(f_n\in L_p^{(R)}[a, b],\ n=1, 2, \ldots)$ ардычыллығынын $L_p^{(R)}[a, b]$ фәзасынын нормасында $f\in L_p^{(R)}[a, b]$ функсиjасына jығылмасы

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L_p^{(R)}}=\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=0 \qquad (9)$$

бәрабәрлиjинин өдәнилмәси демәкдир. Буна ардычыллығын орта $L_p^{(R)}$ мә'нада f функсиjасына jығылмасы деjилир.

$L_p^{(R)}[a, b]$ сонсуз өлчүлү хәтти нормалашмыш сепарабел фәза олуб, там фәза деjилдир.

l_p илә $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p<+\infty$ $(1<p<+\infty)$ шәртини өдәjән $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ вә jа $\{a_k\}$ ардычыллыглары чохлуғуну ишарә едәк. Истәнилән $a\in l_p$ елементинин нормасыны

$$\|a\|_{l_p}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (10)$$

кими тә'jин етдикдә l_p чохлуғу хәтти нормалашмыш фәзаjа

[1] О. Л. Һөлдер (1859—1937) алман риjазиjjатчысыдыр.

[1] Г. Минковски (1864—1909) алман физики вә риjазиjjатчысыдыр.

чеврилир. (10) нормасы үчүн хәтти нормалашмыш фәза аксиомларынын өдәнилмәсини јохламаг чәтин дејилдир.

Бу фәзанын сыфыр елементи $\theta(x) = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ ардычыллығыдыр. l_p хәтти нормалашмыш сонсуз өлчүлү сепарабел вә там фәзадыр. l_2 фәзасынын там олмасы сонракы параграфда исбат едилир.

§ 3. ҺИЛБЕРТ ФӘЗАСЫ

Һәгиги хәтти фәзаларда норманы бә'зән скалјар һасил васитәсилә тә'јин едирләр.

Һәгиги хәтти фәзада скалјар һасил тә'јин олундугда она *Евклид фәзасы* дејилир (IV, § 6). Евклид фәзасынын истәнилән x елементинин нормасыны

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \qquad (1)$$

кими тә'јин етдикдә о, хәтти нормалашмыш фәзаја чеврилир (IV, § 9).

Евклид фәзасынын истәнилән x вә y елементләринин (x, y) скалјар һасили үчүн Коши—Бунјаковскинин

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (2)$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Евклид фәзасында чәм, һәгиги әдәдә вурма вә скалјар һасил кәсилмәјәндир, јә'ни $n \to \infty$ шәртиндә $x_n \to x$, $y_n \to y$ ((1) нормасы мә'нада јығылма) вә $\lambda_n \to \lambda$ (әдәди ардычыллығын јығылмасы) оларса, онда $n \to \infty$ шәртиндә

$$x_n + y_n \to x + y,$$
$$\lambda_n x_n \to \lambda x,$$
$$(x_n, y_n) \to (x, y) \qquad (3)$$

мүнасибәтләри доғрудур. (3) мүнасибәтләри (2) бәрабәрсизлијинә әсасән асанлыгла исбат олунур. Мәсәлән, ахырынчы мүнасибәтин доғрулуғу

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)| \leq$$
$$\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

кими исбат олунур. Бурада нормаја көрә јығылан $\{y_n\}$ ардычыллығынын мәһдуд олмасындан, јә'ни $\|y_n\| \leq M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ олмасындан истифадә едилир.

(1) нормасы васитәсилә тә'јин олунан

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)} \qquad (4)$$

метрикасы *скалјар һасилин доғурдуғу метрика* адланыр. Бу метрика мә'нада Евклид фәзасы там ола да биләр, олмаја да биләр. Сепарабел олан вә олмајан Евклид фәзалары да вардыр.

Сонлу өлчүлү Евклид фәзалары, һәмин фәзаларда ортонормал базисин варлығы, елементләрин ортонормал базис үзрә

ајрылышы вә с. мәсәләләр китабын биринчи һиссәсиндә өјрәнилмишдир. Бурада сонсуз өлчүлү Евклид фәзаларынын бир нөвү өјрәнилир.

Тә'риф 1. Сонсуз өлчүлү там сепарабел хәтти Евклид фәзасына Һилберт[1] фәзасы дејилир.

Бурадан ајдындыр ки, H Һилберт фәзасы ашағыдакы шәртләри (аксиомлары) өдәјән истәнилән тәбиәтли $x, y, z, \ldots$ елементләри чохлуғудур:

I. H Евклид фәзасыдыр (скалјар һасил тә'јин олунмуш хәтти фәзадыр).

II. H фәзасы $\rho(x, y) = \|x - y\|$ метрикасына нәзәрән тамдыр.

III. H фәзасы сонсуз өлчүлүдүр, јә'ни истәнилән сонлу сајда хәтти асылы олмајан елементи вар.

IV. H сепарабел фәзадыр, јә'ни H фәзасында сых олан һесаби чохлуг вардыр.

Һилберт фәзасынын елементләри ардычыллығынын ики нөв јығылмасындан данышмаг олар: нормаја көрә јығылма вә зәиф јығылма.

$\{x_n\}$ ардычыллығы $(x_n \in H)$ вә $x \in H$ елементи үчүн H фәзасынын нормасында

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0 \qquad (5)$$

бәрабәрлији өдәнилдикдә, дејирләр ки, $\{x_n\}$ ардычыллығы *нормаја көрә x елементинә јығылыр.*

Әкәр истәнилән $y \in H$ елементи үчүн

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, y) = (x, y) \qquad (6)$$

бәрабәрлији өдәнилирсә, онда дејирләр ки, $\{x_n\}$ ардычыллығы *x елементинә зәиф јығылыр.* Ардычыллығын зәиф јығылмасыны нормаја көрә јығылмасындан фәргләндирмәк үчүн бә'зән ардычыллығын нормаја көрә јығылмасына онун *күчлү јығылмасы* дејилир.

Һилберт фәзасында елементләрин ортогоналлығындан вә елементләрин ортонормал системиндән данышмаг олар.

Һилберт фәзасынын x вә y елементләринин (x, y) скалјар һасили сыфра бәрабәр олдугда $(x, y) = 0$, онлара *ортогонал елементләр дејилир.* Ајдындыр ки, фәзанын сыфыр елементи онун истәнилән елементинә ортогоналдыр.

Тутаг ки,

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (7)$$

H Һилберт фәзасынын елементләри ардычыллығыдыр.

(7) ардычыллығынын истәнилән ики елементи ортогонал вә һәр бир елементинин нормасы ваһидә бәрабәрдирсә, јә'ни

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad (8)$$

[1] Давид Һилберт (1862—1943) мәшһур алман ријазијјатчысыдыр.

мүнасибәти өдәнилирсә, онда (7) ардычыллығына H фәзасында *ортонормал систем* дејилир.

Инди конкрет Һилберт фәзаларына бахаг.

l_2 фәзасы.

Бу фәза әввәлки параграфда тә'јин етдијимиз l_p фәзасындан $p=2$ олдугда хүсуси һал кими алыныр. Онун елементләри һәгиги әдәдләрдән дүзәлмиш елә $x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ардычыллыгларыдыр ки, онларын һәр бири үчүн

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty \qquad (1)$$

шәрти өдәнилир.

Бу чохлугда хәтти әмәлләри ашағыдакы кими тә'јин едирләр: $x=(x_1, x_2, \dots, x^n, \dots)$ вә $y=(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ елементләринин чәми $z=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n, \dots)$ елементинә, һәгиги λ әдәдинин $x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ елементинә һасили исә $\lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \dots)$ елементинә дејилир.

Белә тә'јин едилмиш хәтти әмәлләр үчүн хәтти фәза аксиомлары (IV, § 1) өдәнилир, јә'ни (1) шәртини өдәјән ардычыллыглар хәтти фәза тәшкил едир. Бу фәзанын сыфыр елементи $\theta=(0, 0, \dots, 0, \dots)$ олар.

Бахдығымыз чохлугда истәнилән $x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ вә $y=(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ елементләринин скалјар һасили

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \qquad (2)$$

кими тә'јин олунур. (2) сырасынын јығылан олмасы әввәлки параграфда исбат едилмиш (5) бәрабәрсизлијиндән ајдындыр.

(2) скалјар һасили үчүн Евклид фәзасынын аксиомлары өдәнилир (IV, § 6).

l_2 Евклид фәзасында истәнилән $x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ елементинин нормасы

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$$

бәрабәрлији илә, метрика исә

$$\rho(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k-x_k)^2} \qquad (3)$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур. $(x_k \pm y_k)^2 \leqslant 2(x_k^2+y_k^2)$ елементар бәрабәрсизлијиндән ајдындыр ки, истәнилән $x \in l_2$ вә $y \in l_2$ елементләри үчүн (3) сырасы јығылыр, јә'ни $\rho(x, y)$ метрикасынын мә'насы вар.

Инди көстәрәк ки, l_2 фәзасы тамдыр. Тутаг ки,

$$x^{(m)}=(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots), \quad m=1, 2, \dots \qquad (4)$$

ардычыллығы l_2 фәзасынын фундаментал ардычыллығыдыр, јә'ни $m\to\infty$ шәртиндә истәнилән $p=1, 2, \dots$ әдәди үчүн

$$\rho(x^{(m+p)}, x^{(m)})=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)})^2} \to 0 \qquad (5)$$

мүнасибәти өдәнилир. Онда

$$|x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)}| \leqslant \rho(x^{(m+p)}, x^{(m)}), \quad k=1, 2, \dots$$

бәрабәрсизлијиндән ајдындыр ки, k-нын һәр бир гејд олунмуш гијмәтиндә $\{x_k^{(m)}\}$ $(m=1, 2, \dots)$ ардычыллығы Коши критерисинин шәртини өдәјир (XXXV, § 2), јә'ни фундаментал әдәди ардычыллыгдыр. Буна көрә дә һәр бир k үчүн онун сонлу $\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)}=x_k$ лимити вар.

(5) мүнасибәтинә көрә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $N=N(\varepsilon)$ вар ки, m-ин $m \geqslant N$ вә $p=1, 2, \dots$ гијмәтләриндә

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)})^2} < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији вә буна көрә дә истәнилән гејд олунмуш натурал M әдәди үчүн

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Сонунчу бәрабәрсизликдә $p\to\infty$ шәртиндә лимитә кечсәк, истәнилән натурал $M=1, 2, \dots$ әдәди үчүн

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k-x_k^{(m)})^2 \leqslant \varepsilon^2$$

мүнасибәтини вә бурадан $M\to+\infty$ шәртиндә

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k-x_k^{(m)})^2 \leqslant \varepsilon, \quad m \geqslant N$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Бурадан ајдындыр ки, $y^{(m)}=(x_1-x_1^{(m)}, x_2-x_2^{(m)}, \dots, x_k-x_k^{(m)}, \dots)$ елементи l_2 фәзасына дахилдир. Онда $x=(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)=x^{(m)}+y^{(m)}$ $(m \geqslant N)$ елементи дә l_2 фәзасына дахил олар. Бундан башга, (4) ардычыллығы l_2 фәзасынын нормасына көрә x елементинә јығылыр:

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)}=x, \qquad (6)$$

јә'ни l_2 там фәзадыр.

l_2 фәзасынын

$$e_1=(1,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0,\dots)$$
$$e_2=(0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0,\dots)$$
$$e_3=(0,\ 0,\ 1,\ \dots,\ 0,\dots) \qquad (7)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

елементләри ортонормал систем тәшкил едир.

(7) системинин истәнилән сонлу сајда $e_1, e_2, \dots, e_n$ елементләри хәтти асылы дејилдир. Доғрудан да,

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\dots+\lambda_n e_n=0 \qquad (8)$$

бәрабәрлији өдәнилдикдә, онун һәр ики тәрәфини e_κ елементинә скалјар олараг вурсаг

$$\lambda_\kappa(e_\kappa,\ e_\kappa)=0,\ \lambda_\kappa=0\ (\kappa=1,\ 2,\dots,\ n)$$

алынар. Демәли, (8) мүнасибәти анҹаг $\lambda_\kappa=0$ $(\kappa=1,\ 2,\dots,\ n)$ олдуғда өдәнилир, јә'ни $e_1, e_2, \dots, e_n$ елементләри хәтти асылы дејилдир.

l_2 фәзасында истәнилән сонлу сајда хәтти асылы олмајан елемент олдуғундан, о сонсуз өлчүлүдүр.

(7) ардычыллығынын хәтти комбинасијалары чохлуғу l_2 фәзасында сыхдыр (бу сонра көстәрилир), јә'ни l_2 сепарабел фәзадыр. Дедикләримиздән ајдындыр ки, l_2 Һилберт фәзасыдыр.

$L_2\ [a,\ b]$ фәзасы

Сонлу $[a,\ b]$ парчасында кәсилмәјән функсијаларын хәтти нормалашмыш $L_2^{(c)}[a,\ b]$ фәзасынын (§ 1) ики ихтијари $x(t)$ вә $y(t)$ елементинин скалјар һасилини

$$(x,\ y)=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt \qquad (1)$$

кими тә'јин етдикдә Евклид фәзасы алыныр.

(1) скалјар һасили үчүн Евклид фәзасынын 9°—12° аксиомлары (IV, § 6) өдәнилир. (1) скалјар һасили васитәсилә истәнилән $x\in L_2^{(c)}[a,\ b]$ елементинин нормасы

$$\|x\|=\sqrt{(x,\ x)}$$

кими, ики ихтијари функсија арасындакы мәсафә исә

$$\rho(x,\ y)=\|x-y\|=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

кими тә'јин олунур.

$L_2^{(c)}[a,\ b]$ фәзасы сонсуз өлчүлүдүр вә сепарабел фәзадыр. $L_2^{(c)}[a,\ b]$ фәзасынын сонсуз өлчүлү олмасы һәмин фәзада истәнилән сонлу сајда хәтти асылы олмајан функсијаларын

варлығындан алыныр. Белә функсијалар олараг

$$1,\ t,\ t^2,\dots,\ t^n,\dots \qquad (3)$$

функсијаларынын истәнилән сонлу сајыны көтүрмәк олар.

$L_2^{(c)}[a,\ b]$ фәзасы там дејилдир (§ 1). Јухарыда дедијимиз кими бу фәзаны „јени елементләрлә" тамамламаг олар. Бу һалда алынан $L_2[a,\ b]$ фәзасы Һилберт фәзасыдыр.

$L_2^{(c)}[a,\ b]$ фәзасыны тамамлама үсулу мүрәккәб олдуғу үчүн бурада шәрһ едилмир. Бу мәсәләнин там һәлли Лебег[1] интегралы анлајышы илә бағлыдыр. Риман интегралынын үмумиләшмәси олан Лебег интеграл нәзәријјәси бизим курса дахил дејилдир. Ону һәгиги дәјишәнли функсијалар нәзәријјәси курсунда өјрәнирләр.

Бунунла белә, $L_2^{(c)}[a,\ b]$ фәзасынын тамамланмасы олан там $L_2[a,\ b]$ фәзасына дахил олан функсијаларын бә'зи әламәтләрини көстәрмәк олар.

$[a,\ b]$ парчасында тә'јин олунмуш вә квадраты илә Риман мә'нада интегралланан, јә'ни $\int_a^b f^2(t)\,dt<+\infty$ шәртини өдәјән $f(t)$ функсијасы $L_2[a,\ b]$ фәзасына дахилдир:

$$L_2^{(R)}[a,\ b]\subset L_2[a,\ b].$$

$[a,\ b]$ парчасында кәсилмәјән функсијалар чохлуғу $L_2[a,\ b]$ фәзасында сыхдыр, јә'ни һәр бир $f\in L_2[a,\ b]$ функсијасы үчүн елә кәсилмәјән $f_n(t)$ $(n=1,\ 2,\dots)$ функсијалары ардычыллығы вар ки, орта квадратик мә'нада она јығылыр, јә'ни

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f_n(t)-f(t)]^2\,dt=0 \qquad (4)$$

мүнасибәти өдәнилир.

Дедикләримиздән ајдындыр ки,

$$L_2^{(c)}[a,\ b]\subset L_2^{(R)}[a,\ b]\subset L_2[a,\ b]$$

мүнасибәти доғрудур вә $L_2^{(R)}[a,\ b]$ фәзасы (1) скалјар һасили илә Евклид фәзасына чеврилир.

$L_2[a,\ b]$ фәзасыны бүтүн әдәд оху үчүн дә үмумиләшдирмәк олар. Тутаг ки, $L_2^{(c)}(-\infty,\ \infty)$ илә бүтүн әдәд охунда кәсилмәјән вә квадраты илә интегралланан, јә'ни $\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\,dt<+\infty$ шәртини өдәјән функсијалар чохлуғу ишарә едилмишдир. Бу фәзада ики ихтијари функсијанын скалјар һасили

$$(f,\ \varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (5)$$

---

[1] **Анри Лебег** (1875—1941) мәшһур франсыз ријазијјатчысыдыр.

кими тә'јин едилир. (5) гејри-мәхсуси интегралы мүтләг јығыландыр. Доғрудан да,

$$|f(t)\,\varphi(t)| < \frac{f^2(t)+\varphi^2(t)}{2}$$

бәрабәрсизлијинә әсасән

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)\,\varphi(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t)\,dt\right) < +\infty$$

олар. $L_2^{(c)}(-\infty, \infty)$ фәзасы там дејилдир.

$L_2^{(c)}(-\infty, \infty)$ фәзасынын тамамланмасы олан там фәзаны $L_2(-\infty, \infty)$ илә ишарә едирләр.

$L_2(-\infty, \infty)$ Һилберт фәзасыдыр.

§ 4. ОРТОНОРМАЛ СИСТЕМ ҮЗРӘ ФУРЈЕ СЫРАСЫ

Тутаг ки, R һәгиги хәтти Евклид фәзасыдыр. Һәр бир сонлу өлчүлү һәгиги хәтти Евклид фәзасында ортонормал

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \qquad (1)$$

базиси вар вә бу фәзанын истәнилән $f \in R$ елементини һәмин базис үзрә ајырмаг олар (IV, § 8):

$$f = (f, e_1)\,e_1 + (f, e_2)\,e_2 + \cdots + (f, e_n)\,e_n. \qquad (2)$$

Инди, фәрз едәк ки, R сонсуз өлчүлү Евклид фәзасы вә

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \qquad (3)$$

һәмин фәза елементләринин ортонормал системидир, јә'ни (3) системинин елементләри үчүн

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

мүнасибәтләри өдәнилир. (3) ортонормал системинин истәнилән сонлу сајда елементләри хәтти асылы дејилдир (§ 3).

Тә'риф 1.

$$\lambda_к = (f, e_к), \quad к = 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

әдәдләринә $f \in R$ елементинин (3) ортонормал системинә нәзәрән Фурје әмсаллары,

$$\sum_{к=1}^{\infty} \lambda_к e_к \qquad (5)$$

сырасына исә һәмин елементин (3) ортонормал системи үзрә Фурје[1] сырасы дејилир вә

$$f \sim \sum_{к=1}^{\infty} \lambda_к e_к \qquad (6)$$

кими јазылыр.

[1] Мәшһур франса ријазијјатчысы Ж. Б. Фурјенин (1768—1830) шәрәфинә.

Бу һалда

$$S_n(f) = \sum_{к=1}^{n} \lambda_к e_к, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (7)$$

чәмләри (5) Фурје сырасынын хүсуси чәмләри адланыр. Әкәр (5) сырасынын S_n хүсуси чәмләри үчүн R фәзасынын нормасында

$$\lim_{n \to \infty} \|S_n - \varphi\| = 0$$

мүнасибәти өдәнилирсә, онда дејирләр ки, (5) сырасы R фәзасынын нормасында $\varphi \in R$ елементинә јығылыр:

$$\varphi = \sum_{к=1}^{\infty} \lambda_к e_к.$$

(3) ортонормал системи елементләринин ихтијари әмсаллы

$$P_n = \sum_{к=1}^{n} C_к e_к, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

хәтти комбинасијаларына бахаг.

Белә бир мәсәлә гаршыја чыхыр:

(8) хәтти комбинасијалары ичәрисиндән верилмиш $f \in R$ елементинә R фәзасынын нормасында ән јахын оланыны, јә'ни

$$\left\| f - \sum_{к=1}^{n} C_к e_к \right\| \qquad (9)$$

нормасына ән кичик гијмәт верәнини тапмалы.

(9) ифадәсинә $P_n = \sum_{к=1}^{n} C_к e_к$ чәминин $f \in R$ елементиндән R фәзасынын нормасында *мејли* дејилир.

Теорем. *(8) хәтти комбинасијалары ичәрисиндә верилмиш $f \in R$ елементиндән R Евклид фәзасынын нормасында ән аз мејл едәни онун Фурје сырасынын n-чи хүсуси чәмидир.*

Исбаты. Скалјар һасилин хассәләринә әсасән

$$\left\| f - \sum_{к=1}^{n} C_к e_к \right\|^2 = \left(f - \sum_{к=1}^{n} C_к e_к,\ f - \sum_{к=1}^{n} C_к e_к \right) =$$

$$= (f, f) - 2\sum_{к=1}^{n} C_к (f, e_к) + \sum_{к=1}^{n} C_к^2 (e_к, e_к) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{к=1}^{n} C_к \lambda_к + \sum_{к=1}^{n} C_к^2 = \|f\|^2 + \sum_{к=1}^{n} (C_к - \lambda_к)^2 - \sum_{к=1}^{n} \lambda_к^2$$

вә ја

$$\left\| f-\sum_{k=1}^{n} C_k e_k\right\|^2 = \|f\|^2+\sum_{k=1}^{n}(C_k-\lambda_k)^2-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \qquad (10)$$

алыныр. Бурадан ајдындыр ки, сағ тәрәфдәки ифадәнин ән кичик олмасы үчүн $C_k-\lambda_k=0$ олмалыдыр (јердә галан ики һәдд C_k-лардан асылы дејилдир). Демәли, (9) ифадәсинин ән кичик олмасы үчүн $C_k=\lambda_k$ олмалы јә'ни (8) хәтти комбинасијасынын әмсаллары f-ин Фурје әмсаллары олмалыдыр.

Бу һалда, (10) бәрабәрлији

$$\left\| f-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\|^2 = \|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \qquad (11)$$

шәклиндә јазылар.

Теорем исбат олунду.

Бурадан ашағыдакы нәтичә алыныр:

Нәтичә 1. *R Евклид фәзасынын истәнилән f елементи вә ихтијари $C_1, C_2, \dots C_n$ әдәдләри үчүн*

$$\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \leqslant \left\| f-\sum_{k=1}^{n} C_k e_k\right\|^2 \qquad (12)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Тә'риф* 2. *$f\in R$ олдуғда

$$E_n(f)_R=\inf_{(C_k)}\left\| f-\sum_{k=1}^{n} C_k e_k\right\|_R \qquad (13)$$

кәмијјәтинә f елементинин R фәзасынын нормасында (8) хәтти комбинасијалары васитәсилә ән јахшы јахынлашмасы дејилир.

Бурада дәгиг ашағы сәрһәд мүмкүн ола билән бүтүн $C_1, C_2, \dots, C_n$ әмсалларына нәзәрән көтүрүлүр.

Исбат етдијимиз теоремдән ајдындыр ки, $f\in R$ елементинә R фәзасынын нормасында ән јахшы јахынлашма верән хәтти комбинасија f-ин Фурје сырасынын хүсуси чәмидир:

$$E_n(f)_R=\left\| f-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\|=\sqrt{\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2}\,, \qquad (14)$$

$$\lambda_k=(f,\ e_k)\quad (k=1,\ 2, \dots,\ n, \dots).$$

Тә'рифдән ајдындыр ки, истәнилән $f\in R$ елементинин ән јахшы јахынлашмасы мәнфи әдәд дејилдир: $E_n(f)_R\geqslant 0$. Бундан башга, $E_n(f)_R$ кәмијјәти n-ин артмајан функсијасыдыр:

$$E_n(f)_R \geqslant E_{n+1}(f)_R \text{ вә ја } \|f-S_n\|\geqslant\|f-S_{n+1}\|.$$

(11) бәрабәрлијиндән $n\to\infty$ шәртиндә ашағыдакы нәтичә алыныр:

Нәтичә 2. Истәнилән $f\in R$ елементинин $\lambda_k=(f,\ e_k)$ Фурје әмсаллары үчүн

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\leqslant\|f\|^2 \qquad (15)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

(15) бәрабәрсизлијинә *Бессел*[1] *бәрабәрсизлији* дејилир. (15) бәрабәрсизлијиндән ајдындыр ки, һәр бир $f\in R$ елементи үчүн $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2$ сырасы јығылыр вә $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$ бәрабәрлији доғрудур.

Гејд едәк ки, верилмиш

$$\varphi_1,\ \varphi_2, \dots,\ \varphi_n, \dots \qquad (16)$$

ортогонал системи нормалашмыш олмадығда онларын һәр бирини өз нормасына бөлмәклә ортонормал

$$\frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|},\ \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|}, \dots,\ \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \dots$$

системини алмаг олар. Бу һалда, ихтијари $f\in R$ елементинин ортонормал системә нәзәрән Фурје әмсаллары

$$\lambda_k=\left(f,\ \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}\right)=\frac{1}{\|\varphi_k\|}(f,\ \varphi_k),\quad k=1,\ 2, \dots$$

вә (16) ортогонал системинә нәзәрән Фурје сырасы исә

$$f\sim\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f,\ \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}\varphi_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k \qquad (17)$$

олар.

Бурадан ајдындыр ки, $f\in R$ елементинин (16) ортогонал системинә нәзәрән Фурје әмсаллары

$$a_k=\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}(f,\ \varphi_k)\quad (k=1,\ 2, \dots) \qquad (18)$$

дүстуру илә тә'јин олунур. Бу һалда (15) Бессел бәрабәрсизлији

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(f,\ \varphi_k)]^2}{\|\varphi_k\|^2}\leqslant\|f\|^2 \qquad (19)$$

кими јазылыр.

§ 5. ТАМ ВӘ ГАПАЛЫ ОРТОНОРМАЛ СИСТЕМЛӘР

Тутаг ки, сонсуз өлчүлү R Евклид фәзасында

$$e_1,\ e_2, \dots,\ e_n, \dots \qquad (1)$$

ортонормал системи верилмишдир.

[1] Бессел Фридрих Вилһелм (1784—1846) алман астроному вә ријазијјатчысыдыр

Тә'риф 1. (*1*) *системинин елементләриндән дүзәлмиш бүтүн* $\sum_{k=1}^{n} C_k e_k$ *хәтти комбинасијалар чохлуғу R фәзасында һәр јердә сых олдугда һәмин система R фәзасында там систем дејилир.* Бу о демәкдир ки, һәр бир $f \in R$ елементи вә $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $n = n(f, \varepsilon)$ нөмрәси вә $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ әдәдләри вар ки,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e_k \right\|_R < \varepsilon \tag{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Теорем 1. ***(1) ортонормал системинин сонсуз өлчүлү R Евклид фәзасында там олмасындан өтрү истәнилән $f \in R$ елементи үчүн***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 = \|f\|^2 \tag{3}$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир. Бурада $\lambda_k = (f, e_k)$ илә f функсијасынын (1) ортонормал системә нәзәрән Фурје әмсаллары ишарә едилмишдир.

(*3*) *бәрабәрлијинә Парсевал*[1] *бәрабәрлији дејилир.*

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, (1) ортонормал системи R фәзасында тамдыр. Онда $f \in R$ елементи вә истәнилән $\sqrt{\varepsilon} > 0$ әдәди үчүн елә $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k e_k$ хәтти комбинасијасы вар ки,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e_k \right\| < \sqrt{\varepsilon}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда әввәлки параграфда исбат едилмиш (12) бәрабәрсизлијинә көрә

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e_k \right\|^2 < \varepsilon$$

вә ја

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 < \varepsilon \tag{4}$$

олар. Бу бәрабәрсизлијин сол тәрәфи n артдыгда азалыр вә Бессел бәрабәрсизлијинә (§ 4) көрә мәнфи әдәд дејилдир. Онда

$$\lim_{n \to \infty} \left[\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \right] = 0$$

олар, јәни (3) бәрабәрлији доғрудур.

[1] М. Парсевал (1755—1836) франса ријазијјатчысыдыр.

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, истәнилән $f \in R$ үчүн (3) бәрабәрлији өдәнилир. Онда әввәлки параграфда исбат етдијимиз (11) бәрабәрлијинә көрә

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \tag{5}$$

олдуғундан $f \in R$ елементинин Фурје сырасынын $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ хүсуси чәмләри ардычыллығы һәмин елементин өзүнә јығылар:

$$\lim_{n \to \infty} \|f - S_n\| = 0.$$

Бу көстәрир ки, (1) ортонормал системинин хәтти комбинасијалары чохлуғу R фәзасында сыхдыр, јә'ни (1) системи R фәзасында тамдыр.

(5) бәрабәрлији көстәрир ки, $f \in R$ елементи үчүн (3) бәрабәрлијинин өдәнилмәси онун

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k \tag{6}$$

Фурје сырасынын R-ин нормасында f-ин өзүнә јығылмасына еквивалентдир. Бурадан ашағыдакы тәклиф алыныр.

Теорем 2. ***(1) ортонормал системинин сонсуз өлчүлү R Евклид фәзасында там олмасы үчүн истәнилән $f \in R$ елементинин Фурје сырасынын R-ин нормасында һәмин елементин өзүнә јығылмасы, јә'ни***

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k \tag{7}$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

Нәтичә. Тутаг ки, R сонсуз өлчүлү Евклид фәзасыдыр вә (1) ортонормал системи һәмин фәзада тамдыр. Онда бүтүн (f, e_k) $(k = 1, 2, \dots)$ Фурје әмсаллары сыфра бәрабәр олан $f \in R$ елементи сыфра бәрабәрдир, јә'ни сыфыр елементдир.

Доғрудан да, $f \in R$ елементинин бүтүн $\lambda_k = (f, e_k)$ Фурје әмсаллары сыфра бәрабәр олдугда, (3) Парсевал бәрабәрлијинә көрә $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 = 0$ олар. Бурадан $\|f\| = 0$ вә $f = \theta$ алыныр.

Тә'риф 2. *R фәзасынын (1) ортонормал системинин бүтүн елементләринә ортогонал олан (јә'ни бүтүн $(\varphi, e_k) = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ бәрабәрликләрини өдәјән) φ елементи анчаг сыфыр елемент олдугда (1) системинә гапалы систем дејилир.*

Теорем 3. ***Һәр бир там ортонормал систем ејни заманда гапалыдыр.***

Доғрудан да, тутаг ки, (1) ортонормал системи тамдыр. Онда һәр бир $\psi \in R$ елементи үчүн (3) Парсевал бәрабәрлији өдәниләр:

$$\|\psi\|^2 = \sum_{к=1}^{\infty} [(\psi, e_к)]^2.$$

Демәли, бүтүн $(\psi, e_к) = 0$ $(к = 1, 2, \ldots)$ бәрабәрликләри доғру оларса, онда $\|\psi\| = 0$ олар ки, бурадан да $\psi = 0$ алыныр, ј'ни (1) ортонормал системи гапалыдыр.

Гејд. Биз көстәрдик ки, һәр бир сонсуз өлчүлү R Евклид фәзасында ортонормал системин тамлығындан онун гапалылығы чыхыр. Бу тәклифин тәрси исә истәнилән сонсуз өлчүлү Евклид фәзасы үчүн доғру дејилдир. Лакин сонсуз өлчүлү Евклид фәзасы там олдуғда, ј'ни о Һилберт фәзасы олдуғда һәмин фәзада ортонормал системин там олмасы онун гапалы олмасына еквивалентдир.

§ 6. ҺИЛБЕРТ ФӘЗАСЫНДА ОРТОНОРМАЛ СИСТЕМЛӘР

Тутаг ки,

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \tag{1}$$

ортонормал системи R фәзасында тамдыр. Онда она R фәзасынын ортонормал базиси дејилир.

Там олмаjан сонсуз өлчүлү Евклид фәзасында ортонормал базис олмаја да биләр. Лакин һәр бир сонсуз өлчүлү там Евклид фәзасында ортонормал базис вардыр.

Буну сепарабел Евклид фәзасы, ј'ни Һилберт фәзасы үчүн исбат етмәк чәтин дејилдир.

Тутаг ки,

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{2}$$

H Һилберт фәзасында һәр јердә сых олан һесаби чохлугдур. (2) елементләринин һансы өзүндән әввәлки елементләрин хәтти комбинасијасы шәклиндә көстәрилә билирсә ону атараг. јердә галанлары јенидән нөмрәләдикдә хәтти асылы олмајан

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{3}$$

елементләр системи алынар. (3) елементләр системи дә H фәзасында һәр јердә сыхдыр. (3) системинә ортонормаллашдырма просесини (IV, § 8) тәтбиг етмәклә ашағыдакы шәртләри өдәјән јени

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \tag{4}$$

системини алмаг олар.

1) (4) ортонормал системдир.

2) (4) системинин һәр бир e_n елементи (3) системинин $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ елементләринин хәтти комбинасијасыдыр:

$$e_n = a_{n1}\varphi_1 + a_{n2}\varphi_2 + \cdots + a_{nn}\varphi_n, \; a_{nn} \neq 0. \tag{5}$$

3) Һәр бир φ_n елементи исә $e_1, e_2, \ldots, e_n$ елементләринин хәтти комбинасијасыдыр:

$$\varphi_n = b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + \cdots + b_{nn}e_n, \; b_{nn} \neq 0. \tag{6}$$

Бу гајда илә алынан (4) ортонормал системи дә H фәзасында һәр јердә сыхдыр. (3) системинин H фәзасында һәр јердә сых олмасындан вә 3) шәртиндән ајдындыр ки, (4) ортонормал системи H фәзасында тамдыр. Бу да (4) системинин H фәзасында ортонормал базис олдуғуну көстәрир.

Бу һалда, истәнилән $f \in H$ елементинин (4) ортонормал базис үзрә Фурје сырасы һәмин елементин өзүнә јығылыр (§ 5):

$$f = \sum_{к=1}^{\infty} (f, e_к) e_к. \tag{7}$$

Бундан башга, һәр бир $f \in H$ елементинин ортонормал базис үзрә (7) Фурје ајрылышы јеканәдир. Доғрудан да, $f \in H$ елементинин (7) сырасындан башга

$$f = \sum_{к=1}^{\infty} \gamma_к e_к \tag{8}$$

кими бир ајрылышы да олса, онда

$$(f, e_n) = \sum_{к=1}^{\infty} \gamma_к (e_к, e_n) = \gamma_n, \; n = 1, 2, \ldots$$

олар, ј'ни (8) сырасынын әмсаллары f-ин Фурје әмсалларына бәрабәр олар. Бурадан (7) Фурје ајрылышынын јеканәлији ајдындыр.

Теорем 1. ***Һилберт фәзасында гапалы олан һәр бир ортонормал систем ејни заманда тамдыр.***

Исбаты. Тутаг ки, f, H Һилберт фәзасынын истәнилән елементи вә

$$f \sim \sum_{к=1}^{\infty} \lambda_к e_к, \; \lambda_к = (f, e_к), \; к = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

онун гапалы ортонормал (4) системинә нәзәрән Фурје сырасыдыр. (9) Фурје сырасынын әмсаллары үчүн Бессел

$$\sum_{к=1}^{\infty} \lambda_к^2 \leq \|f\|^2$$

бәрабәрсизлији (§ 4) өдәнилдијиндән $\sum_{к=1}^{\infty} \lambda_к^2$ сырасы јығыландыр.

Бу һалда (9) сырасынын $S_n = \sum_{к=1}^{n} \lambda_к e_к$ хүсуси чәмләри үчүн

$$\|S_m - S_n\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k e_k\right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k e_k, \sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k e_k\right) = \sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k^2, \ m>n$$

мүнасибәтинин өдәнилмәси $\{S_n\}$ ардычыллығынын фундаментал олдуғуну көстәрир. Фундаментал ардычыллығын исә там H фәзасында $f_0 \in H$ лимити вар: $\|S_n - f_0\| \to 0$ $(n\to\infty)$. $f_0\in H$ елементинин (4) ортонормал системинә көрә Фурје әмсаллары f-ин Фурје әмсалларына бәрабәрдир. Доғрудан да, истәнилән $n \geqslant k$ үчүн доғру олан

$$(S_n, e_k) = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, e_k\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (e_j, e_k) = \lambda_k$$

бәрабәрлијиндән вә

$$|(S_n,e_k) - (f_0,e_k)| = |(S_n - f_0, e_k)| \leqslant \sqrt{\|S_n - f_0\|\cdot\|e_k\|} = \sqrt{\|S_n - f_0\|} \to 0 \ (n\to\infty)$$

мүнасибәтиндән ајдындыр ки,

$$(f_0, e_k) = \lim_{n\to\infty}(S_n,e_k) = \lim_{n\to\infty}\lambda_k = \lambda_k = (f, e_k)$$

олар. Демәли, $f - f_0$ фәргинин бүтүн Фурје әмсаллары сыфра бәрабәрдир. Бу көстәрир ки, $f - f_0$ фәрги гапалы (4) ортонормал системинин бүтүн һәдләринә ортогоналдыр: $(f-f_0, e_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Онда $f - f_0 = \theta$, $f = f_0$.

Демәли, истәнилән $f\in H$ елементинин гапалы (4) ортонормал системинә көрә (9) Фурје сырасы һәмин елементин өзүнә јығылыр. Бу да (4) ортонормал системинин там олдуғуну көстәрир (§ 5).

Бу теоремдән вә әввәлки параграфда исбат едилмиш 3-чү теоремдән ашағыдакы нәтичә алыныр.

Нәтичә. Һилберт фәзасында ортонормал системин там олмасы онун гапалы олмасы үчүн зәрури вә кафи шәртдир.

Теорем 2 (Рисс—Фишер[1]). *Тутаг ки, $\{e_k\}$, H Һилберт фәзасында ихтијари ортонормал системдир. Онда $\sum_{k=1}^\infty C_k^2 < +\infty$ шәртини өдәјән һәр бир $(C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots)$ ардычыллығы үчүн елә јеканә $f\in H$ елементи вар ки, C_k $(k = 1, 2, \ldots)$ әдәдләри онун Фурје әмсалларыдыр вә*

$$\sum_{k=1}^\infty C_k^2 = \|f\|^2 = (f, f) \qquad (10)$$

мүнасибәти өдәнилир.

[1] Рисс Фриdjеш (1880—1956) мачар ријазијјатчысыдыр. Фишер Ернест (1875—1955) алман ријазијјатчысыдыр.

Исбаты. $S_n = \sum_{k=1}^n C_k e_k$ чәмләри үчүн

$$\|S_m - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m C_k^2, \ m>n$$

мүнасибәтинин өдәнилмәсиндән вә $\sum_{k=1}^\infty C_k^2$ сырасынын јығылмасындан ајдындыр ки, $\{S_n\}$ ардычыллығы H фәзасында фундаменталдыр. Онда һәмин ардычыллыг H фәзасынын нормасында бир $f\in H$ елементинә јығылар:

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^n C_k e_k - f\right\| = 0.$$

Бу һалда § 4-дә исбат едилмиш (11) бәрабәрлијинә көрә

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n C_k^2 = \|f\|^2, \quad \sum_{k=1}^\infty C_k^2 = \|f\|^2$$

олур, јә'ни (10) бәрабәрлији доғрудур.

Инди көстәрәк ки, C_k әдәдләри $f\in H$ елементинин Фурје әмсалларыдыр. Бу мәгсәдлә истәнилән $n\geqslant k$ үчүн доғру олан

$$(S_n, e_k) = \sum_{j=1}^n C_j (e_j, e_k) = C_k \qquad (11)$$

бәрабәрлијиндән вә

$$|(S_n,e_k) - (f,e_k)| \leqslant |(S_n - f, e_k)| \leqslant \sqrt{\|S_n - f\|\,\|e_k\|} = \sqrt{\|S_n - f\|}\to 0\ (n\to\infty)$$

мүнасибәтиндән истифадә етмәк лазымдыр. Беләликлә, (11) бәрабәрлијинә әсасән

$$(f, e_k) = \lim_{n\to\infty}(S_n,e_k) = \lim_{n\to\infty} C_k = C_k$$

мүнасибәти алыныр, јә'ни $C_k = (f, e_k)$, $k = 1, 2, \ldots$

Теоремин тәләбләрини өдәјән $f\in H$ елементинин јеканәлији дә ејни гајда илә исбат олунур.

Гејд. Ортонормал $\{e_k\}$ системи там (вә ја гапалы) олдугда $f\in H$ елементинин јеканәлији Фурје ајрылышынын јеканәлијиндән алыныр.

Рисс—Фишер теореминдән истифадә едәрәк көстәрмәк олар ки, истәнилән H Һилберт фәзасы l_2 фәзасына изоморфдур (IV, § 4). Бу мәгсәдлә H фәзасында там ортонормал $\{e_k\}$ системи көтүрәк вә һәр бир $f\in H$ елементинә онун $\{e_k\}$ системинә нәзәрән Фурје әмсалларыны $(C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots)$ чохлу-

ғуну гаршы ҹојаг. $\sum_{\kappa=1}^{\infty} C_\kappa^2 < +\infty$ шәрти өдәнилдијиндән $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots)$ ардычыллығы l_2 фәзасынын елементидир. Беләликлә, H фәзасынын һәр бир f елементинә l_2 фәзасынын бир $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots)$ елементи ујғун олур.

Тәрсинә, l_2 фәзасынын һәр бир $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots)$ елементинә Рисс—Фишер теореминә әсасән H фәзасынын бир јеканә $f \in H$ елементи ујғундур. Бу C_κ әдәдләри һәмин $f \in H$ елементинин Фурје әмсалларыдыр. Беләликлә, H фәзасынын елементләри илә l_2 фәзасынын елементләри арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг јарадылыр. Бу ујғунлуг заманы һәмин фәзаларда тә'јин едилмиш хәтти әмәлләр (ҹәм вә әдәдә вурма) вә скалјар һасил сахланылыр, јә'ни

$$f \longleftrightarrow C = (C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots)$$

вә

$$\varphi \longleftrightarrow d = (d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$$

олдугда

$$f + \varphi \longleftrightarrow C + d = (C_1 + d_1, C_2 + d_2, \ldots, C_n + d_n, \ldots)$$

$$\lambda f \longleftrightarrow \lambda C = (\lambda C_1, \lambda C_2, \ldots, \lambda C_n, \ldots)$$

$$(f, \varphi) \longleftrightarrow (C, d) = C_1 d_1 + C_2 d_2 + \cdots + C_n d_n + \cdots$$

олур. Сонунчу мүнасибәт

$$(f, f) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} C_\kappa^2 \quad \text{вә} \quad (\varphi, \varphi) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} d_\kappa^2$$

бәрабәрликләринә әсасән

$$(f + \varphi, f + \varphi) = (f, f) + 2(f, \varphi) + (\varphi, \varphi) =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\infty} (C_\kappa + d_\kappa)^2 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} C_\kappa^2 + 2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} C_\kappa d_\kappa + \sum_{\kappa=1}^{\infty} d_\kappa^2$$

бәрабәрлијиндән алыныр.

Бурадан ајдындыр ки, H вә l_2 фәзалары арасында јарадылмыш гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг изоморфизмдир (јә'ни бу ујғунлуг заманы хәтти әмәлләр вә елементләрин скалјар һасили сахланылыр).

Истәнилән Һилберт фәзасы l_2 фәзасына изоморфдурса, онда бүтүн Һилберт фәзалары бир-биринә дә изоморфдур. Бурадан ашағыдакы теорем алыныр:

Теорем 3. *Бүтүн Һилберт фәзалары бир-биринә изоморфдур.*

Бу о демәкдир ки, Һилберт фәзалары мүхтәлиф тәбиәтли елементләрдән ибарәт олса да, топлама, әдәдә вурма вә скалјар һасил әмәлләри илә ифадә олунан хассәләр бахымындан онлар ејни фәзалардыр.

Нәтиҹә. *l_2 вә $L_2[a, b]$ фәзалары изоморфдур.*

§ 7. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКСИЈАЛАР СИСТЕМИ ҮЗРӘ ФУРЈЕ СЫРАСЫ

Һәр бир фәзада мүхтәлиф ортогонал системләр гурмаг олар. Кәсилмәјән функсијалар фәзасында да мүхтәлиф ортогонал системләр вардыр. Классик ортогонал систем олан

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos \kappa x, \sin \kappa x, \ldots \qquad (1)$$

тригонометрик функсијалар системи $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјән функсијаларын $L_2^{(C)}[-\pi, \pi]$ фәзасында ән мүһүм ортогонал функсијалар системидир. (1) системинин ихтијари ики функсијасынын ортогонал олмасы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \kappa x \cos mx\, dx = 0 \quad (\kappa \neq m;\ \kappa, m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \kappa x \sin mx\, dx = 0 \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin \kappa x \sin mx\, dx = 0 \quad (\kappa \neq m;\ \kappa, m = 1, 2, \ldots)$$

бәрабәрликләриндән ајдындыр.

Тригонометрик функсијалар системини нормалашдырмаг үчүн онларын һәр бирини өз нормасына бөлмәк лазымдыр. Бу һалда,

$$\|\cos \kappa x\| = \|\sin \kappa x\| = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \kappa x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \kappa x\, dx = \pi$$

$$(\kappa = 1, 2, \ldots)$$

вә

$$\left\| \frac{1}{2} \right\| = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

мүнасибәтләринә әсасән ашағыдакы ортонормал тригонометрик функсијалар системи алыныр:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos \kappa x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin \kappa x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \qquad (2)$$

Ихтијари $f \in L_2^{(C)}[-\pi, \pi]$ функсијасынын (1) ортогонал тригонометрик функсијалар системинә нәзәрән Фурје әмсалларыны ујғун олараг a_κ вә b_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots)$ илә ишарә етсәк, онда § 4-дә көстәрилән үмуми (18) дүстуруна әсасән

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \kappa x\, dx \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (3)$$

вә

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \kappa x\, dx \quad (\kappa = 1, 2, \ldots) \qquad (4)$$

олар. Бу һалда f функсиіасынын (1) ортогонал тригонометрик функсиіалар системи үзрә Фурје сырасы

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_\kappa \cos \kappa x + b_\kappa \sin \kappa x) \qquad (5)$$

кими јазылар. Буна (ихтијари ортогонал систем үзрә Фурје сырасындан фәргләндирмәк үчүн) функсијанын тригонометрик Фурје сырасы дејилир.

Тригонометрик Фурје сырасындан башга, a_κ вә b_κ әмсаллары ихтијари әдәдләр олан вә тригонометрик сыра адланан

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_\kappa \cos \kappa x + b_\kappa \sin \kappa x) \qquad (6)$$

шәклиндә сыраја да бахырлар. Әмсаллары ихтијари әдәдләр олан

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{n} (a_\kappa \cos \kappa x + b_\kappa \sin \kappa x) \qquad (7)$$

шәклиндә ифадәјә *n-тәртибли тригонометрик чохһәдли* дејилир. $C^*[-\pi; \pi]$ илә $C[-\pi, \pi]$ фәзасынын елә алтфәзасыны ишарә едәк ки, о, $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјән вә $f(-\pi) = f(\pi)$ шәртини өдәјән бүтүн $f(x)$ функсијаларындан ибарәт олсун. $L_2^{(C)}[-\pi, \pi]$ фәзасынын ујғун алтфәзасыны исә $L_2^{*(C)}[-\pi, \pi]$ илә ишарә едәк.

Вејерштрас теореминә (XIX, § 9) көрә һәр бир $f \in C^*[-\pi, \pi]$ функсијасы вә истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $T_n(x)$ тригонометрик чохһәдлиси вар ки,

$$\| f(x) - T_n(x) \|_{C^*} < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу о демәкдир ки, тригонометрик чохһәдлиләр чохлуғу $C^*[-\pi, \pi]$ фәзасында һәр јердә сыхдыр. Тригонометрик чохһәдлиләр исә (1) системи функсијаларынын хәтти комбинасијаларыдыр. (1) системи функсијаларындан дүзәлмиш бүтүн $T_n(x)$ хәтти комбинасијалар (тригонометрик чохһәдлиләр) чохлуғунун $C^*[-\pi, \pi[$ фәзасында һәр јердә сых олмасы (1) тригонометрик функсијалар системинин $C^*[-\pi, \pi]$ фәзасында там олдуғуну көстәрир.

Тригонометрик чохһәдлиләр чохлуғу $L_2^{*(C)}[-\pi, \pi]$ фәзасында да һәр јердә сыхдыр.

Доғрудан да, һәр бир $f \in L_2^{*(C)}[-\pi, \pi]$ функсијасы ејни заманда $C^*[-\pi, \pi]$ синфинә дә дахилдир. Буна көрә дә истәнилән $f \in L_2^{*(C)}[-\pi, \pi]$ функсијасы вә $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $T_n(x)$ тригонометрик чохһәдлиси вар ки,

$$\| f(x) - T_n(x) \|_{C^*} < \varepsilon / \sqrt{2\pi}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) - T_n(x) |^2 dx} \leqslant \sup_{-\pi < x < \pi} | f(x) - T_n(x) | \cdot \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} < \varepsilon$$

вә ја

$$\| f(x) - T_n(x) \|_{L_2^{*(C)}} < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији алынар.

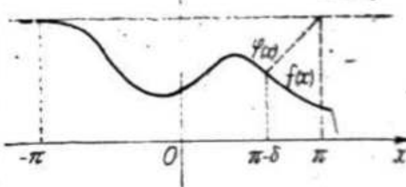
Беләликлә, ашағыдакы теорем исбат едилмиш олур:

Теорем 1. *(1) тригонометрик функсијалар системи $C^*[-\pi, \pi]$ вә $L_2^{*(C)}[-\pi, \pi]$ фәзаларында тамдыр.*

Бу теоремдән истифадә едәрәк ашағыдакы даһа күчлү теореми дә исбат етмәк олар:

Теорем 2. *(1) тригонометрик функсијалар системи кәсилмәјән функсијаларын $L_2^{(C)}[-\pi, \pi]$ фәзасында тамдыр.*

Исбаты. Тутаг ки, $f \in L_2^{(C)}[-\pi, \pi]$ функсијасы вә ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди верилмишдир. $f(x)$ функсијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјән олдуғундан мәһдуддур: $|f(x)| \leqslant M$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$. Инди $\delta < \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^2$ шәртини өдәјән $\delta > 0$ әдәди көтүрәк вә ашағыдакы кими функсија тә'јин едәк (шәкил 266):



Шәкил 266

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & -\pi \leqslant x \leqslant \pi - \delta \text{ олдугда} \\ f(\pi - \delta) + \dfrac{f(-\pi) - f(\pi - \delta)}{\delta}(x - \pi + \delta), & \pi - \delta < x < \pi \text{ олдугда.} \end{cases}$$

$\varphi(x)$ функсијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјәндир, парчанын уч нөгтәләриндә бәрабәр гијмәтләр алыр $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, мәһдуддур $|\varphi(x)| \leqslant M$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ вә ашағыдакы бәрабәрсизлији өдәјир:

$$\| f(x) - \varphi(x) \|_{L_2^{(C)}} = \left\{ \int_{\pi-\delta}^{\pi} [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \right\}^{1/2} <$$

$$< 2M \left(\int_{\pi-\delta}^{\pi} dx \right)^{1/2} = 2M\delta^{1/2} < \varepsilon/2. \qquad (8)$$

Бундан башга, $\varphi \in L_2^{*(C)}[-\pi, \pi]$ олдуғундан 1-чи теоремә көрә верилмиш ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $T_n(x)$ тригоно-

чохһәдлиси вар ки,

$$\|\varphi(x)-T_n(x)\|_{L_2^{(c)}}<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. (8) вә (9) бәрабәрсизликләриндән $\|f(x)-T_n(x)\|_{L_2^{(c)}}\leqslant\|f(x)-\varphi(x)\|_{L_2^{(c)}}+\|\varphi(x)-T_n(x)\|_{L_2^{(c)}}<\varepsilon$

алыныр ки, бу да (1) системинин $L_2^{(c)}[-\pi,\pi]$ фәзасында там олдуғуну көстәрир.

Тригонометрик функсијалар системи $L_2^{(c)}[-\pi,\pi]$ фәзасындан даһа кениш олан һиссә-һиссә кәсилмәз функсијаларын $L_2^{(h)}[-\pi,\pi]$ фәзасында да тамдыр. Бу фәзаны тә'јин етмәк үчүн $[a,b]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәз функсија анлајышы илә таныш олаг.

Тә'риф. *Тутаг ки, $[a,b]$ парчасынын елә $T=[a\leqslant x_0<$ $<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n\leqslant b]$ бөлкүсү вар ки, $f(x)$ функсијасы (x_k, x_{k+1}) $(k=0,1,\dots,n)$ интервалларынын һәр бириндә кәсилмәјәндир вә уч нөгтәләриндә сонлу*

$$f(x_k+0)=\lim_{x\to x_k+0}f(x),\ f(x_{k+1}-0)=\lim_{x\to x_{k+1}-0}f(x),$$
$$(k=0,1,\dots,n-1)$$

лимитләри вар. Онда $f(x)$ функсијасына $[a,b]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәз функсија дејилир.

Бурадан ајдындыр ки, $[a,b]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәз функсија ја һәмин парчада кәсилмәјәндир, ја да сонлу сајда биринчи нөв кәсилмә нөгтәси вардыр. Бундан башга, $[a,b]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәз $f(x)$ функсијасынын өзү вә онун $f^2(x)$ квадрагы һәмин $[a,b]$ парчасында интегралланандыр (XXII, § 4).

$[a,b]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәз функсијалар чохлуғунда ики $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијаларынын скалјар һасилини

$$(f,\varphi)=\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

кими тә'јин етдикдә сонсуз өлчүлү Евклид фәзасы алыныр. Бу фәзаны $L_2^{(h)}[a,b]$ илә ишарә едәк.

Һәр бир $f\in L_2^{(h)}[-\pi,\pi]$ функсијасы үчүн елә кәсилмәз $\varphi\in L_2^{(c)}[-\pi,\pi]$ функсијасы тапмаг олар ки,

$$\|f-\varphi\|_{L_2}=\left(\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]^2\,dx\right)^{1/2}<\varepsilon \qquad (10)$$

бәрабәрсизлији өдәниләр. Доғрудан да, тутаг ки, $\varphi(x)$ функсијасы олараг $f(x)$ функсијасынын x_k кәсилмә нөгтәләринин кичик әтрафларынын харичиндә $f(x)$ илә үст-үстә дүшән вә һәмин әтрафларда хәтти олан кәсилмәз функсија көтүрүлмүш

дүр. Онда x_k нөгтәләринин көстәрилән әтрафларыны елә кичик көтүрмәк олар ки, (10) бәрабәрсизлији өдәнилсин.

Бурадан вә 2-чи теоремдән ашағыдакы тәклиф алыныр:

Теорем 3. ***(1) тригонометрик функсијалар системи һиссә-һиссә кәсилмәз функсијаларын $L_2^{(h)}[-\pi,\pi]$ фәзасында тамдыр.***

Гејд. Ејни гајда илә исбат етмәк олар ки, (1) ортогонал тригонометрик функсијалар системи даһа үмуми $L_2[-\pi,\pi]$ фәзасында да тамдыр.

Тригонометрик функсијалар системинин там олмасы һаггында бурада исбат етдијимиз теоремләрдән вә сонсуз өлчүлү Евклид фәзаларында елементләрин үмуми ортогонал системләр үзрә ајрылышы һаггындакы теоремләрдән (§ 4 вә § 5) нәтичә олараг ашағыдакы тәклифләр алыныр:

Теорем 4. ***Тутаг ки, $f\in L_2^{(h)}[-\pi,\pi]$. Онда***

1) n-тәртибли тригонометрик чохһәдлиләр ичәрисиндә $L_2^{(h)}[-\pi,\pi]$ фәзасынын нормасында f функсијасындан ән аз мејл едәни онун (5) Фурје сырасынын n-чи

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (11)$$

хүсуси чәмидир. Бу һалда,

$$E_n(f)_{L_2^{(h)}}=\sqrt{\|f\|^2_{L_2}-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]} \qquad (12)$$

олар (§ 4, теорем 1, тә'риф 2, (14) дүстуру).

2) Фурје сырасынын (11) хүсуси чәмләр ардычыллығы L_2 фәзасынын нормасында, јә'ни орта квадратик мә'нада $f(x)$ функсијасынын өзүнә јығылыр:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0 \qquad (13)$$

(§ 5, теорем 2).

3) Парсевал бәрабәрлији доғрудур:

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2_{L_2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) \qquad (14)$$

(§ 5, теорем 2).

Нәтичә 1. *Бүтүн тригонометрик Фурје әмсаллары сыфра бәрабәр олан $f\in C[-\pi,\pi]$ функсијасы ејниликлә сыфра бәрабәрдир.*

Доғрудан да, (14) Парсевал бәрабәрлијинә көрә кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы үчүн $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=0$ олар. Бурадан алыныр ки, $f(x)\equiv 0$ олмалыдыр.

Нәтиҹә 2. Ејни тригонометрик Фурје сыралары олан вә $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары һәмин парчада ејниликлә бәрабәрдир: $f(x) \equiv \varphi(x)$.

Нәтиҹә 3. Һәр бир һиссә-һиссә кәсилмәз f функсијасынын тригонометрик Фурје әмсалларынын лимити сыфра бәрабәрдир:

$$\lim_{\kappa \to \infty} a_\kappa = \lim_{\kappa \to \infty} b_\kappa = 0, \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Доғрудан да, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ интегралы сонлу олдуғундан (14) сырасы јығыландыр. Јығылан сыранын үмуми һәддинин лимити исә сыфра бәрабәрдир.

§ 8. ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЈЕ СЫРАСЫНЫН НӨГТӘДӘ ЈЫҒЫЛМАСЫ

Кәсилмәјән функсијанын тригонометрик Фурје сырасынын орта квадратик мә'нада һәмин функсијаја јығылмасы әввәлки параграфда көстәрилмишдир.

Лакин тригонометрик Фурје сыраларыны ријази—физика тәнликләринин вә башга мәсәләләрин һәллинә тәтбиг етмәк үчүн Фурје сырасынын $[-\pi, \pi]$ парчасынын верилмиш нөгтәсиндә вә ја $[\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi]$ парчасында јығылмасыны билмәк лазымдыр. Бу мәсәләләрлә чох ријазијјатчылар мәшғул олмушдур.

Мүәјјән едилмишдир ки, елә кәсилмәјән функсијалар вардыр ки, онларын тригонометрик Фурје сыралары $[-\pi, \pi]$ парчасынын мүәјјән нөгтәсиндә вә ја һәмин парчада һәр јердә сых олан сонсуз сајда нөгтәдә дағылыр. Демәли, функсија үзәринә гојулан кәсилмәзлик шәрти онун тригонометрик Фурје сырасынын верилмиш нөгтәдә јығылмасыны тә'мин етмир. Бунун үчүн бахылан функсија кәсилмәзликдән башга бир сыра әлавә шәртләри дә өдәмәлидир.

1966-чы илдә исвеч ријазијјатчысы Л. Карлесон исбат етмишдир ки, $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјән вә һәтта һәмин парчада Риман мә'нада интегралланан һәр бир f функсијасынын тригонометрик Фурје сырасы $[-\pi, \pi]$ парчасында санки һәр јердә $f(x)$ функсијасынын өзүнә јығылыр. Лакин әввәлләр, 1923-чү илдә совет ријазијјатчысы А. Н. Колмогоров[1] исбат етмишдир ки, верилмиш функсија Риман мә'нада интегралланан олмадыгда онун тригонометрик Фурје сырасы $[-\pi, \pi]$ парчасынын һеч бир нөгтәсиндә јығылмаја да биләр.

Фурје сыраларынын нөгтәдә јығылмасыны тәдгиг етмәк үчүн тәкчә кәсилмәјән функсијалара бахмағын мә'насы јохдур. Чүнки $[-\pi, \pi]$ парчасында интегралланан һәр бир $f \in L_1^{(R)}[-\pi, \pi]$

[1] Колмогоров Андреј Николајевич (1903) мәшһур Совет ријазијјатчысыдыр.

функсијасынын да тригонометрик Фурје әмсалларыны

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \kappa t\,dt, \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \kappa t\,dt, \quad \kappa = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

дүстурлары илә тә'јин етмәк вә онун

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_\kappa \cos \kappa x + b_\kappa \sin \kappa x) \tag{3}$$

Фурје сырасыны јазмаг олар. Нәзәрә алмаг лазымдыр ки, $f(x)$ функсијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында интегралланан олдугда $f(x) \sin \kappa x$ вә $f(x) \cos \kappa x$ функсијалары да һәмин парчада интегралланандыр (XXII, § 5).

Мә'лумдур ки, $[-\pi, \pi]$ парчасында тә'јин олунмуш вә $f(-\pi) = f(\pi)$ шәртини өдәјән һәр бир f функсијасыны бүтүн әдәд охуна дөври давам етдирмәк олар (XI, § 12). $f(x)$ функсијасы үчүн $f(-\pi) = f(\pi)$ шәрти өдәнилмәдикдә исә онун гијмәтини анчаг бир $x = \pi$ (вә ја $x = -\pi$) нөгтәсиндә дәјишмәклә (бу заман (1) вә (2) дүстурларында интегралларын гијмәти дәјишмәдијиндән Фурје әмсаллары дәјишмәз) јенә дә ону бүтүн әдәд охуна дөври давам етдирмәк олар. Бурадан ајдындыр ки, кәләчәкдә, үмумилији азалтмадан, бахдығымыз $f \in L_1^{(R)}[-\pi, \pi]$ функсијаларыны 2π дөврлү функсијалар һесаб етмәк олар. Бүтүн әдәд охунда кәсилмәјән вә 2π дөврлү функсијалар фәзасы C^*, $[-\pi, \pi]$ парчасында Риман мә'нада интегралланан вә 2π дөврлү функсијалар фәзасы исә L^* олсун.

Верилмиш нөгтәдә (3) Фурје сырасынын јығылмасыны тәдгиг етмәк үчүн онун

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{n} (a_\kappa \cos \kappa x + b_\kappa \sin \kappa x) \tag{4}$$

хүсуси чәмләринә бахаг. Бурада a_κ вә b_κ әвәзинә онларын (1) вә (2) интеграл ифадәләрини јаздыгда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{\kappa=1}^{n} (\cos \kappa x \cos \kappa t + \right.$$

$$\left. + \sin \kappa x \cdot \sin \kappa t) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{\kappa=1}^{n} \cos \kappa (t - x) \right] dt$$

олар. Инди

$$\frac{1}{2}+\sum_{\kappa=1}^{n}\cos\kappa u=\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\left\{\sin\frac{u}{2}+\sum_{\kappa=1}^{n}\left[\sin(2\kappa+1)\frac{u}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin(2\kappa-1)\frac{u}{2}\right]\right\}=\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} \qquad (5)$$

дүстурундан истифадә едәк. Онда Фурје сырасынын хүсуси чәми үчүн

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt \qquad (6)$$

ифадәси алынар.

Бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки интеграла *Дирихле*[1] *интегралы*,

$$D_n(u)=1+2\sum_{\kappa=1}^{n}\cos\kappa u=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u} \qquad (7)$$

функсијасына исә *Дирихле нүвәси* дејилир.

Дирихле нүвәси бүтүн әдәд охунда кәсилмәјәндир вә онун үчүн $D_n(0)=2n+1$ бәрабәрлији доғрудур. $D_n(u)$ функсијасы 2π дөврлү чүт функсијадыр: $D_n(-u)=D_n(u)$.

(7) бәрабәрлијиндән ајдындыр ки,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)\,du=1 \text{ вә ја } \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(u)\,du=1 \qquad (8)$$

о ар. (6) бәрабәрлији Дирихле нүвәси васитәсилә

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,D_n(t-x)\,dt$$

кими јазылар. Бурада $f\in L^*$ олдуғуну гәбул едәрәк, $u=t-x$ әвәзләмәсини апараг:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(u+x)\,D_n(u)\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u+x)\,D_n(u)\,du. \qquad (9)$$

[1] Дирихле Петер Густав Лежен (1805—1859) алман ријазијјатчысыдыр.

Бу бәрабәрликдән вә $D_n(x)$ функсијасынын чүт олмасындан истифадә едәрәк $S_n(x)$ чәми үчүн ашағыдакы көстәрилиши дә алмаг олар:

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}D_n(u)\,du. \qquad (10)$$

Теорем 1. ***Тутаг ки, $[-\pi,\pi]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәз олан $f(x)$ функсијасынын һәмин парчанын һәр бир x нөгтәсиндә сонлу сол вә сағ төрәмәләри $f'_-(x)$ вә $f'_+(x)$ вар. Онда онун Фурје сырасы истәнилән $x\,(\neq\pm\pi)$ нөгтәсиндә $S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ чәминә, $x=\pm\pi$ нөгтәләриндә исә $S_1=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ әдәдинә јығылыр.***

Исбаты. Үмумилији азалтмадан, фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасы бүтүн әдәд охуна дөври давам етдирилмишдир. Онун дөври давамы олан 2π дөврлү функсијаны јенә дә $f(x)$ илә ишарә етмәк олар. Онда (8) вә (10) мүнасибәтләринә әсасән

$$S_n(x)-S(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}D_n(u)\,du-$$

$$-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(u)\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}u\,du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin\frac{2n+1}{2}u\,du=I_n^{(1)}+I_n^{(2)}$$

аларыг. Көстәрәк ки, $I_n^{(1)}\to0\ (n\to\infty)$ вә $I_n^{(2)}\to0\ (n\to\infty)$ мүнасибәтләри доғрудур. Бу мәгсәдлә $\varphi(u)=\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}}$ гәбул едәрәк, биринчи $I_n^{(1)}$ топлананы ашағыдакы кими јазаг:

$$I_n^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(u)\cos\frac{u}{2}\sin nu\,du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(u)\sin\frac{u}{2}\cos nu\,du.$$

Шәртә көрә $f(u)$ функсијасы $[-\pi,\pi]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәјәндир. Онда $\varphi(u)$ функсијасы да $u=0$ нөгтә-

сини өз дахилинә алмајан вә $[-\pi, \pi]$ парчасында јерләшән һәр бир парчада һиссә-һиссә кәсилмәјән олар. $u=0$ нөгтәсиндә сонлу

$$\lim_{u\to 0+}\varphi(u)=\lim_{u\to 0+}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\;\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}=$$

$$=\lim_{u\to 0+}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}=f'_{+}(x)$$

лимитинин олмасы көстәрир ки, $\varphi(u)$ функсијасы $[0, \pi]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәјәндир. Бу һалда $\varphi(u)\cos\frac{u}{2}$ вә $\varphi(u)\sin\frac{u}{2}$ функсијалары да $[0, \pi]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәјән олар. Һәмин функсијалар васитәсилә ашағыдакы кими јени функсијалар тә'јин едәк:

$$\varphi_1(u)=\begin{cases}\varphi(u)\cos\frac{u}{2}, & 0\leqslant u\leqslant\pi \quad \text{олдугда},\\ 0, & -\pi\leqslant u<0 \quad \text{олдугда},\end{cases}$$

$$\varphi_2(u)=\begin{cases}\varphi(u)\sin\frac{u}{2}, & 0\leqslant u\leqslant\pi \quad \text{олдугда},\\ 0, & -\pi\leqslant u<0 \quad \text{олдугда}.\end{cases}$$

Ајдындыр ки, $\varphi_1(u)$ вә $\varphi_2(u)$ функсијалары да $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәјәндир. Буна көрә дә онларын Фурје әмсалларынын лимити сыфра бәрабәр олар (§ 7, нәтиҹә 3):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(u)\sin nu\,du=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(u)\cos\frac{u}{2}\sin nu\,du=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_2(u)\cos nu\,du=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(u)\sin\frac{u}{2}\cos nu\,du=0.$$

Бурадан тәләб олунан

$$\lim_{n\to\infty}I_n^{(1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(u)\sin nu\,du+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_2(u)\cos nu\,du=0$$

бәрабәрлији алыныр. $\lim\limits_{n\to\infty}I_n^{(2)}=0$ бәрабәрлијинин доғрулуғуну да ејни үсулла исбат етмәк олар.

Беләликлә, тәләб олунан

$$\lim_{n\to\infty}[S_n(x)-S(x)]=0 \quad \text{вә ја} \quad \lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$$

бәрабәрлији исбат олунур.

Теоремин шәртләрини $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссә-һиссә һамар функсијалар да өдәјир.

Тә'риф. *Тутаг ки, $[a, b]$ парчасынын елә $T=[a\leqslant x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n\leqslant b]$ бөлкүсү вар ки, $f(x)$ функсијасынын (x_k, x_{k+1}) $(k=0,1,\dots,n-1)$ интервалларынын һәр бириндә кәсилмәз төрәмәси вә уҹ нөгтәләриндә сонлу сол вә сағ төрәмәләри*

$$f'_{-}(x_k)=\lim_{\Delta x_k\to 0-}\frac{f(x_k+\Delta x_k)-f(x_k-0)}{\Delta x_k},$$

$$f'_{+}(x_k)=\lim_{\Delta x_k\to 0+}\frac{f(x_k+\Delta x_k)-f(x_k+0)}{\Delta x_k}$$

вардыр. Онда $f(x)$ функсијасына $[a, b]$ парчасында һиссә-һиссә һамар функсија дејилир.

Исбат етдијимиз теоремдән ашағыдакы кими нәтиҹәләр алыныр:

Нәтиҹә 1. $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјән вә һиссә-һиссә һамар $f(x)$ функсијасынын Фурје сырасы $(-\pi, \pi)$ интервалында $f(x)$ функсијасынын өзүнә, $x=\pm\pi$ нөгтәләриндә исә $S_1=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$ әдәдинә јығылыр.

Доғрудан да, $f(x)$ функсијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан $f(-\pi+0)=f(-\pi)$ вә $f(\pi-0)=f(\pi)$ олур. Онда теоремдә көстәрилән S_1 әдәди $S_1=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$ әдәдинә бәрабәр олар.

Хүсуси һалда, $f(-\pi)=f(\pi)$ бәрабәрлији өдәнилдикдә, мәсәлән, $f(x)$ функсијасы 2π дөврлү кәсилмәз вә һиссә-һиссә һамар функсија олдугда, онун Фурје сырасы бүтүн $[-\pi, \pi]$ парчасында $f(x)$ функсијасына јығылыр.

Нәтиҹә 2. $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәјән вә һиссә-һиссә һамар 2π дөврлү $f(x)$ функсијасынын Фурје сырасы истәнилән $x\in(-\infty, \infty)$ нөгтәсиндә $S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ ҹәминә јығылыр.

Хүсуси һалда, һиссә-һиссә һамар 2π дөврлү $f(x)$ функсијасы кәсилмәз оларса, онда онун Фурје сырасы истәнилән $x\in(-\infty, \infty)$ нөгтәсиндә $f(x)$ функсијасынын өзүнә јығылар.

Мисал 1. $f(x)=|x|$ функсијасыны $[-\pi, \pi]$ парчасында Фурје сырасына ајырмалы.

Бу функсијанын Фурје әмсалларыны (1) вә (2) дүстурлары васитәсилә тапаг:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}t\,dt=\pi,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos kt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}t\cos kt\,dt=\frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi-1),$$

$$a_{2j}=0,\quad a_{2j-1}=-\frac{4}{\pi(2j-1)^2}\quad (j=1,2,\ldots),$$

$$b_\kappa=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\sin\kappa t\,dt=0\quad(\kappa=1,2,\ldots).$$

Бурадан ајдындыр ки, верилмиш функсијанын Фурје сырасы

$$|x|\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2\kappa-1)^2}\cos(2\kappa-1)x$$

олар. $f(x)=|x|$ функсијасы $[-\pi,\pi]$ парчасында кәсилмәјәндир, $f(-\pi)=f(\pi)=\pi$ шәртини өдәјир вә һиссә-һиссә һамар функсијадыр.

Буна көрә дә (нәтичә 1) функсијанын Фурје сырасы $[-\pi,\pi]$ парчасында өзүнә јығылыр:

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2\kappa-1)^2}\cos(2\kappa-1)x.$$

Мисал 2. $f(x)=\operatorname{sig} n\,x$ функсијасыны (XI, § 3) $(-\pi,\pi)$ интервалында Фурје сырасына ајырмалы. Бу функсија $(-\pi,\pi)$ интервалында һиссә-һиссә кәсилмәјән вә һиссә-һиссә һамар функсијадыр. Онун дөври давамыны да $f(x)$ илә ишарә етсәк, онда Фурје әмсалларыны (1) вә (2) дүстурлары васитәсилә һесабламаг олар:

$$a_\kappa=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sig} n x\cdot\cos\kappa x\,dx=0,\quad \kappa=0,1,2,\ldots$$

$$b_\kappa=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sig} n x\cdot\sin\kappa x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin\kappa x\,dx=-\frac{2}{\kappa\pi}(\cos\kappa\pi-1),$$

$$b_{2j}=0,\quad b_{2j-1}=\frac{4}{\pi(2j-1)}\quad(j=1,2,3,\ldots).$$

Беләликлә, теоремә көрә

$$f(x)=\operatorname{sign} x=\frac{4}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\sin(2\kappa-1)x}{2\kappa-1}\quad(-\pi<x<\pi)$$

ајрылышы алыныр.

Тригонометрик Фурје сыраларынын нөгтәдә јығылмасы һаггында башга әламәтләр дә вардыр. Бу әламәтләрин бирини, Дирихле әламәти адланан тәклифи бурада исбатсыз сөјләјәк:

Теорем 2 (Дирихле). 2π *дөврлү дөври $f(x)$ функсијасы $[-\pi,\pi]$ парчасында һиссә-һиссә монотон вә мәһдуддурса, онда онун Фурје сырасы истәнилән $x\in(-\infty,\infty)$ нөгтәсиндә $S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ чәминә*

јығылыр. (Хүсуси һалда, $f(x)$ функсијасынын кәсилмәз олдуғу нөгтәдә сыранын чәми $f(x)$-ин өзүнә бәрабәр олур).

Јада салаг ки, $f(x)$ функсијасына о заман $[a,b]$ парчасында һиссә-һиссә монотон функсија дејилир ки, һәмин парчаны сонлу сајда елә (a,x_1), (x_1,x_2), ..., (x_{n-1},b) интервалларына бөлмәк мүмкүндүр ки, онларын һәр бириндә $f(x)$ функсијасы монотондур (јә'ни ја артмајан, ја да азалмајандыр).

Сөјләдијимиз Дирихле әламәти кифајәт гәдәр күчлүдүр вә 1-чи теоремдән фәргләнир. Дирихле әламәтиндә $f(x)$ функсијасынын нә төрәмәсинин варлығы, нә дә төрәмәнин һиссә-һиссә кәсилмәз олмасы тәләб олунмур.

Бурадан ајдындыр ки, Фурје сыралары илә көстәрилән функсијалар синфи чох кенишдир.

§ 9. ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЈЕ СЫРАСЫНЫН МҮНТӘЗӘМ ЈЫҒЫЛМАСЫ

Тутаг ки, $f\in L_1^{(R)}[-\pi,\pi]$ функсијасы үчүн тригонометрик Фурје сырасы гурулмушдур:

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(a_\kappa\cos\kappa x+b_\kappa\sin\kappa x).\qquad(1)$$

(1) сырасынын һәр бир $A_\kappa(x)=a_\kappa\cos\kappa x+b_\kappa\sin\kappa x$ һədди истәнилән сонлу парчада кәсилмәјән функсија олдуғундан

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\kappa=1}^{n}(a_\kappa\cos\kappa x+b_\kappa\sin\kappa x),\quad n=0,1,2,\ldots$$

хүсуси чәмләри дә һәмин парчада кәсилмәјән функсијалардыр. Буна көрә дә $\{S_n(x)\}$ ардычыллығы $f(x)$ функсијасына $[-\pi,\pi]$ парчасында мүнтәзәм јығылан олдугда һәмин функсија $[-\pi,\pi]$ парчасында һөкмән кәсилмәјән олмалыдыр (XXXVI, § 5). Демәли, $f(x)$ функсијасынын (1) Фурје сырасынын мүнтәзәм јығылан олмасы үчүн һәмин функсијанын кәсилмәз олмасы зәрури шәртдир. Лакин бу шәрт сыранын мүнтәзәм јығылмасы үчүн кафи дејилдир.

Тригонометрик Фурје сырасынын мүнтәзәм јығылмасы үчүн садә кафи шәрт ашағыдакы теоремдә көстәрилир.

Теорем 1. *$[-\pi,\pi]$ парчасында кәсилмәјән, һиссә-һиссә һамар вә $f(-\pi)=f(\pi)$ шәртини өдәјән $f(x)$ функсијасынын Фурје сырасы $[-\pi,\pi]$ парчасында һәмин функсијанын өзүнә мүнтәзәм јығылыр.*

Исбаты. $[-\pi,\pi]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәз $f'(x)$ функсијасынын тригонометрик Фурје әмсалларыны уйғун олараг $a_\kappa^{(1)}$ вә $b_\kappa^{(1)}$ илә ишарә етсәк, онда

$$a_\kappa^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos\kappa x\,dx=\frac{1}{\pi}f(x)\cos\kappa x\,\Big|_{-\pi}^{\pi}+$$

$$+\frac{\kappa}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\kappa x\,dx = \kappa b_\kappa$$

вә

$$b_\kappa^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin\kappa x\,dx = \frac{1}{\pi} f(x)\sin\kappa x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\kappa}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\kappa x\,dx = -\kappa a_\kappa$$

олар. Бурадан

$$a_\kappa = -\frac{b_\kappa^{(1)}}{\kappa} \quad \text{вә} \quad b_\kappa = \frac{a_\kappa^{(1)}}{\kappa} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

мүнасибәтләри вә еләчә дә

$$|a_\kappa| + |b_\kappa| = \frac{|a_\kappa^{(1)}|}{\kappa} + \frac{|b_\kappa^{(1)}|}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}\left(|a_\kappa^{(1)}| + |b_\kappa^{(1)}|\right) \tag{3}$$

бәрабәрлији алыныр.

Шәртә көрә $f(x)$ функсијасынын $f'(x)$ төрәмәси $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәјәндир. Буна көрә дә онун үчүн Парсевал бәрабәрлији (§ 7, теорем 3) доғрудур:

$$\frac{[a_0^{(1)}]^2}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty}\left[(a_\kappa^{(1)})^2 + (b_\kappa^{(1)})^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\,dx < +\infty,$$

$$\left|\frac{a_\kappa^{(1)}}{\kappa}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[(a_\kappa^{(1)})^2 + \frac{1}{\kappa^2}\right]$$

вә

$$\left|\frac{b_\kappa^{(1)}}{\kappa}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[(b_\kappa^{(1)})^2 + \frac{1}{\kappa^2}\right]$$

бәрабәрсизликләриндән вә

$$\frac{[a_0^{(1)}]^2}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty}\left[(a_\kappa^{(1)})^2 + (b_\kappa^{(1)})^2\right], \qquad \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^2}$$

сыраларынын јығылан олмасындан чыхыр ки,

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(\frac{|a_\kappa^{(1)}|}{\kappa} + \frac{|b_\kappa^{(1)}|}{\kappa}\right)$$

сырасы јығыландыр. Онда (3) бәрабәрлијинә көрә

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(|a_\kappa| + |b_\kappa|\right) \tag{4}$$

сырасы да јығыландыр. Демәли, (1) сырасынын үмуми һәддинин мүтләг гијмәти јығылан мүсбәтһәдли (4) сырасынын ујғун һәддиндән бөјүк дејилдир:

$$|a_\kappa\cos\kappa x + b_\kappa\sin\kappa x| \leqslant |a_\kappa| + |b_\kappa|, \quad \kappa = 1, 2, \ldots$$

Бу исә Вејерштрас әламәтинә (XXXVI, § 3) көрә (1) сырасынын мүнтәзәм јығылдығыны көстәрир. (1) сырасынын $f(x)$ функсијасынын өзүнә јығылмасы әввәлки параграфда исбат едилмиш теоремдән (нәтичә 1) ајдындыр.

Нәтичә. $[-\pi, \pi]$ *парчасында кәсилмәјән вә һиссә-һиссә һамар* 2π *дөврлү* $f(x)$ *функсијасынын Фурје сырасы һәмин функсијаја бүтүн әдәд охунда мүнтәзәм јығылыр.*

Верилмиш функсијанын тригонометрик Фурје сырасынын јығылма сүр'әти һәмин функсијанын һамарлыг тәртибиндән, јә'ни диференсиалланма тәртибиндән асылыдыр. Бу 1-чи теоремин үмумиләшмәси олан ашағыдакы теоремдән көрүнүр:

Теорем 2. *Тутаг ки,* $f(x)$ *функсијасынын* $[-\pi, \pi]$ *парчасында һиссә-һиссә һамар* m*-тәртибли* ($m \geqslant 1$) *төрәмәси вар вә* $f^{(\kappa)}(-\pi) = f^{(\kappa)}(\pi)$, $\kappa = 0, 1, \ldots, m-1$ *шәртләри өдәнир. Онда онун тригонометрик Фурје сырасы* $[-\pi, \pi]$ *парчасында һәмин функсијанын өзүнә мүнтәзәм јығылыр вә бундан башга*

$$|S_n(x) - f(x)| = o\left(\frac{1}{n^{m-\frac{1}{2}}}\right) \tag{5}$$

мүнасибәти $[-\pi, \pi]$ *парчасында мүнтәзәм олараг өдәнилир.*

§ 10. ТӘК ВӘ ЧҮТ ФУНКСИЈАЛАРЫН ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЈЕ СЫРАСЫ

Тутаг ки, чүт $\varphi \in L^*$ функсијасы верилмишдир. Онда истәнилән там $\kappa \geqslant 1$ әдәди үчүн $\varphi(x)\cos\kappa x$ функсијасы чүт, $\varphi(x)\sin\kappa x$ функсијасы исә тәк функсија олар. Бу һалда, φ-нин тригонометрик Фурје әмсаллары

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos\kappa x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos\kappa x\,dx, \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

вә

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin\kappa x\,dx = 0, \quad \kappa = 1, 2, \ldots$$

дүстурлары илә һесабланыр (XXII, § 9), јә'ни онун бүтүн b_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots$) әмсаллары сыфра бәрабәр олур. Буна көрә дә φ-нин тригонометрик Фурје сырасы

$$\varphi \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa\cos\kappa x \tag{2}$$

шәклиндә, јә'ни анчаг косинуслардан ибарәт олан сыра шәклиндә јазылыр.

Әкәр верилмиш $\psi \in L^*$ функсијасы тәк оларса, онда $\psi(x)\cos\kappa x$ тәк функсија, $\psi(x)\sin\kappa x$ исә чүт функсија олар.

Бу halда, онун тригонометрик Фурје әмсаллары

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos\kappa x\,dx = 0$$

вә

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin\kappa x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\psi(x)\sin\kappa x\,dx \qquad (3)$$

$$(\kappa = 1, 2, \ldots)$$

дүстурлары илә hесабланыр (XXII, § 9) вә Фурје сырасы

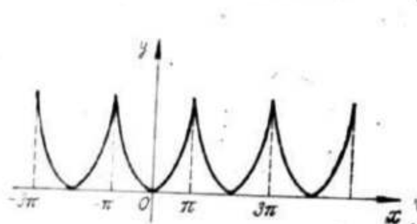
$$\psi \sim \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_\kappa \sin\kappa x \qquad (4)$$

шәклиндә јазылыр.

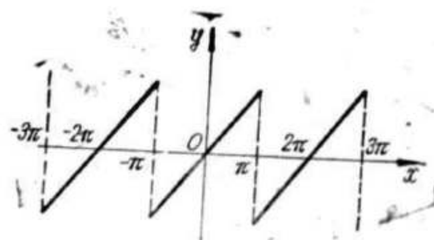
Демәли, верилмиш чүт функсијанын тригонометрик Фурје сырасы анҹаг косинуслардан, тәк функсијанын тригонометрик Фурје сырасы исә анҹаг синуслардан ибарәт олур.

(2) вә (4) сыраларынын, ујғун олараг $\varphi(x)$ вә $\psi(x)$ функсијаларына јығылмасы 8 вә 9-чу параграфларда исбат едилмиш теоремләрлә мүәјјән едилир.

Мә'лумдур ки, $[0, \pi]$ парчасында (вә ја $[-\pi, 0]$ парчасында) верилмиш hәр бир $f(x)$ функсијасыны бүтүн әдәд охуна hәм чүт вә hәм дә тәк давам етдирмәк олар (XI, § 11). Буна көрә дә $[0, \pi]$ парчасында верилмиш функсија бүтүн әдәд охуна 2π дөврлү чүт давам етдирилдикдә косинуслар үзрә Фурје сырасына, тәк давам етдирилдикдә исә синуслар үзрә Фурје сырасына ајрылыр.



Шәкил 267



Шәкил 268

Мисал 1. $f(x) = x^2\ (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ шәклиндә тә'јин олунмуш 2π дөврлү $f(x)$ функсијасыны тригонометрик Фурје сырасына ајырмалы (шәкил 267).

Верилмиш функсија чүт олдуғундан

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_\kappa = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos\kappa x\,dx = \begin{cases}\dfrac{4}{\kappa^2}, & \kappa \text{ чүт олдугда}\\[2mm] -\dfrac{4}{\kappa^2}, & \kappa \text{ тәк олдугда}\end{cases}$$

вә

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin\kappa x\,dx = 0$$

олар. Онда онун Фурје сырасы

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right) \qquad (5)$$

шәклиндә јазылар. $f(x)$ бүтүн әдәд охунда кәсилмәјән вә hиссә-hиссә hамар функсија олдуғундан (5) сырасы онун өзүнә јығылыр (§ 8, нәтиҹә 2), јә'ни

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right) \qquad (6)$$

бәрабәрлији доғрудур. (6) бәрабәрлијиндә $x=\pi$ көтүрдүкдә

$$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

вә ја

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^2} \qquad (7)$$

мүнасибәти алыныр.

Мисал 2. $f(x) = x\ (-\pi < x < \pi)$ шәклиндә верилмиш функсија бүтүн әдәд охуна дөври давам етдирилмишдир (шәкил 268). Алынан 2π дөврлү $f(x)$ функсијасыны тригонометрик Фурје сырасына ајырмалы.

Бу функсија тәк олдуғундан

$$a_\kappa = 0 \ (\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

вә

$$b_\kappa = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin\kappa x\,dx = (-1)^{\kappa+1}\frac{2}{\kappa} \ \ (\kappa = 1, 2, \ldots)$$

олар. Онда онун тригонометрик Фурје сырасы

$$f \sim 2\sum_{\kappa=1}^{\infty}(-1)^{\kappa+1}\frac{\sin\kappa x}{\kappa} \qquad (8)$$

кими јазылар.

2π дөврлү $f(x)$ функсијасы hиссә-hиссә кәсилмәјән вә hиссә-hиссә hамар функсија олдуғундан онун Фурје сырасы кәсилмәзлик нөгтәсиндә өзүнә (§ 8, нәтиҹә 2)

$$f(x) = 2\sum_{\kappa=1}^{\infty}(-1)^{\kappa+1}\frac{\sin\kappa x}{\kappa},$$

кәсилмә нөгтәләриндә ($\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi, \ldots$) исә сыфра јығылыр (сол вә сағ лимитләрин ҹәми сыфра бәрабәрдир).

§ 11. ИХТИЈАРИ $(-l, +l)$ ИНТЕРВАЛЫНДА ВЕРИЛМИШ ФУНКСИЈАНЫН ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЈЕ СЫРАСЫНА АЈРЫЛМАСЫ

Тутаг ки, верилмиш $2l$ дөврлү $f(t)$ дөври функсијасыны Фурје сырасына ајырмаг лазымдыр. Бу мәгсәдлә

$$x = \frac{\pi}{l} t, \quad -l \leqslant t \leqslant l, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

хәтти функсијасы васитәсилә $[-l, l]$ парчасыны $[-\pi, \pi]$ парчасына ин'икас етдирәк. Онда

$$\varphi(x) = f\left(\frac{l}{\pi} x\right)$$

функсијасы x-ә нәзәрән 2π дөврлү функсија олар:

$$\varphi(x+2\pi) = f\left[\frac{l}{\pi}(x+2\pi)\right] = f\left(\frac{l}{\pi} x + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi} x\right) = \varphi(x).$$

Бу функсијанын тригонометрик Фурје әмсалларыны

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\sin kx\, dx \tag{1}$$

дүстурлары илә һесаблајараг, онун

$$\varphi(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{2}$$

тригонометрик Фурје сырасыны јазмаг олар.

Фәрз едәк ки, (2) Фурје сырасы $[-\pi, \pi]$ парчасында $\varphi(x)$ функсијасынын өзүнә јығылыр:

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Бу бәрабәрликдә x әвәзинә $x = \frac{\pi}{l} t$ јаздыгда, көһнә t дәјишәнинә нәзәрән $[-l, l]$ парчасында доғру олан

$$\varphi\left(\frac{\pi}{l} t\right) = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{l} t + b_k \sin\frac{k\pi}{l} t\right)$$

бәрабәрлији алынар. Бу һалда a_k вә b_k әмсаллары (1) дүстурларындан алынан

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\cos kx\, dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l} t\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\sin kx\, dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi}{l} t\, dt$$

бәрабәрликләри васитәсилә һесабланыр.

Беләликлә, $2l$ дөврлү $f(t)$ функсијасы

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{l} t + b_k \sin\frac{k\pi}{l} t\right) \tag{3}$$

кими тригонометрик Фурје сырасына ајрылыр вә онун тригонометрик Фурје әмсаллары

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l} t\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi}{l} t\, dt \tag{4}$$

дүстурлары илә һесабланыр.

Гејд едәк ки, $f(t)$ функсијасы $[-l, l]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәјән (вә ја һиссә-һиссә һамар) функсија олдугда, она ујғун олан $\varphi(x)$ функсијасы да $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәјән (вә ја һиссә-һиссә һамар) функсија олур. Бунун тәрси дә доғрудур, јә'ни $\varphi(x)$ функсијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында һансы шәртләри өдәјирсә, она ујғун олан $f(t)$ функсијасы да $[-l, l]$ парчасында һәмин шәртләри өдәјир. Бурадан ајдындыр ки, функсијаларын $[-\pi, \pi]$ парчасында тригонометрик Фурје сырасына ајрылмасы һаггында олан бүтүн тәклифләр, $[-l, l]$ парчасында верилмиш функсијаларын (3) шәклиндә Фурје сырасына ајрылмасы һаггында да доғрудур.

$[-l, l]$ парчасында (вә ја $(-l, l)$ интервалында) верилмиш функсијаны (3) шәклиндә тригонометрик Фурје сырасына ајырмаг үчүн ону бүтүн әдәд охуна дөври ($2l$ дөврлү) давам етдирмәк лазымдыр. Бу заман, § 8-дә көстәрилдији кими, бә'зән функсија гијмәтләрини $\pm nl$ нөгтәләриндә дәјишмәк лазым олур ки, бу да онларын кәсилмәзлијини поза билир.

$2l$ дөврлү $f(t)$ функсијасы чүт функсија оларса, онда о, анчаг косинуслардан ибарәт олан

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l} t$$

шәклиндә Фурје сырасына, тәк функсија олдугда исә анчаг синуслардан ибарәт олан

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l} t$$

шәклиндә тригонометрик Фурје сырасына ајрылар.

$[0, l]$ вә ја $[-l, 0]$ парчасында верилмиш һәр бир $f(t)$ функсијасыны да бүтүн әдәд охуна чүт вә ја тәк давам етдирмәклә ону анчаг косинуслар вә ја анчаг синуслар үзрә тригонометрик Фурје сырасына ајырмаг олар.

Һәр һансы $[a, b]$ парчасында верилмиш вә дөври олмајан $f(t)$ функсијасыны да әдәд охуна дөври давам етдирмәклә ону тригонометрик Фурје сырасына ајырмаг мүмкүндүр. Бу мәгсәдлә, дөврү $2l > |b-a|$ олан вә $[a, b]$ парчасында верилмиш $f(t)$ функсијасы илә үст-үстә дүшән $\varphi(t)$ функсијасыны Фурје сырасына ајырмаг лазымдыр. Бу сыранын чәми $[a, b]$ парчасында верилмиш $f(t)$ функсијасы илә үст-үстә дүшәр (әлбәттә, Фурје сырасы $\varphi(t)$ функсијасына јығылан олдугда!).

Мисал. $f(x) = x\ (-1 < x < 1)$ функсијасыны Фурје сырасына ајырмалы.

Бу тәк функсијанын бүтүн әдәд охуна 2 дөврлү ($l=1$) давамы

$$f \sim \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_\kappa \sin \kappa\pi x \tag{5}$$

шәклиндә Фурје сырасына ајрылыр. Бурада

$$b_\kappa = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\sin \kappa\pi x\, dx = 2\int_{0}^{1} x \sin \kappa\pi x\, dx =$$

$$= -\frac{2\cos \kappa\pi}{\kappa\pi} = (-1)^{\kappa+1}\frac{2}{\kappa\pi}, \quad \kappa = 1, 2, \ldots$$

$f(x)$ функсијасы $(-1, 1)$ интервалында кәсилмәјән вә һамар функсија олдуғундан онун Фурје сырасы һәмин интервалда өзүнә јығылыр:

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}(-1)^{\kappa+1}\frac{\sin \kappa\pi x}{\kappa}, \quad -1 < x < 1. \tag{6}$$

Бу бәрабәрликдә $x = \frac{1}{2}$ көтүрдүкдә

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right]$$

вә ја

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{7}$$

бәрабәрлији алыныр.

§ 12. ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЈЕ СЫРАСЫНЫН КОМПЛЕКС ШӘКЛИ

Тутаг ки, 2π дөврлү $f(x)$ функсијасы тригонометрик Фурје сырасына ајрылмышдыр:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty}(a_\kappa \cos \kappa x + b_\kappa \sin \kappa x). \tag{1}$$

Бурада a_κ вә b_κ тригонометрик Фурје әмсаллары

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos \kappa x\, dx,$$

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin \kappa x\, dx \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

дүстурлары илә һесабланыр. Ејлер дүстурларындан (XXXVII, § 6) истифадә едәрәк, $\cos \kappa x$ вә $\sin \kappa x$ функсијаларыны үстлү функсијалар васитәсилә ифадә едәк:

$$\cos \kappa x = \frac{1}{2}\left(e^{i\kappa x} + e^{-i\kappa x}\right), \quad \sin \kappa x = \frac{1}{2i}\left(e^{i\kappa x} - e^{-i\kappa x}\right).$$

Бу гијмәтләри (1) бәрабәрлијиндә јеринә јаздыгда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(a_\kappa \frac{e^{i\kappa x} + e^{-i\kappa x}}{2} + b_\kappa \frac{e^{i\kappa x} - e^{-i\kappa x}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_\kappa - ib_\kappa}{2}\right)e^{i\kappa x} + \left(\frac{a_\kappa + ib_\kappa}{2}\right)e^{-i\kappa x}\right] \tag{3}$$

алыныр. Бурада

$$\frac{a_0}{2} = C_0, \quad \frac{a_\kappa - ib_\kappa}{2} = C_\kappa, \quad \frac{a_\kappa + ib_\kappa}{2} = C_{-\kappa}$$

әвәзләмәләрини апардыгда (3) сырасы

$$f(x) = C_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(C_\kappa e^{i\kappa x} + C_{-\kappa}e^{-i\kappa x}\right)$$

вә ја

$$f(x) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} C_\kappa e^{i\kappa x} \tag{4}$$

шәклиндә јазылыр.

(4) сырасына тригонометрик Фурје сырасынын комплекс шәкли дејилир.

Инди (2) дүстурларындан истифадә едәрәк C_κ вә $C_{-\kappa} (=\overline{C}_\kappa)$ әмсалларынын интеграл васитәсилә ифадәсини тапаг:

$$C_\kappa = \frac{1}{2}(a_\kappa - ib_\kappa) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos \kappa x\, dx - \right.$$

$$\left. - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin \kappa x\, dx\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos \kappa x - i\sin \kappa x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\kappa x}\, dx$$

вә ја

$$C_к = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-iкx}\, dx. \tag{5}$$

Ејни гајда илә

$$C_{-к} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{iкx}\, dx \tag{6}$$

дүстуруну вә $C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$ бәрабәрлијинин доғрулуғуну да көстәрмәк олар. $C_к$ ($к = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) әдәдләринә $f(x)$ функсијасынын комплекс Фурје әмсаллары дејилир. (5) вә (6) дүстурларыны бир дүстур шәклиндә јазмаг олар:

$$C_к = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-iкx}\, dx \quad (к = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{7}$$

$2l$ дөврлү $f(x)$ функсијасынын тригонометрик Фурје сырасынын (§ 11) комплекс шәкли

$$f(x) = \sum_{к=-\infty}^{\infty} C_к e^{i\frac{к\pi}{l}x} \tag{8}$$

кими, онун комплекс Фурје әмсалларынын интеграл васитәсилә ифадәси исә

$$C_к = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{к\pi}{l}x}\, dx \quad (к = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{9}$$

шәклиндә олар.

Тригонометрик Фурје сыраларынын комплекс шәклиндән ријазијјатда вә онун мүхтәлиф тәтбигләриндә кениш истифадә олунур. Комплекс шәклиндә көтүрүлмүш Фурје сыралары үзәриндә бир сыра әмәлләр даһа асан апарылыр.

§ 13. ФУНКСИЈАЛАРЫН БЕССЕЛ ФУНКСИЈАЛАРЫ ҮЗРӘ ФУРЈЕ СЫРАСЫНА АЈРЫЛМАСЫ

Тутаг ки, $I_\nu(x)$ ($\nu > 0$ там әдәддир), ν индексли Бессел функсијасыдыр вә

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_к, \ldots \tag{1}$$

онун мүсбәт сыфырларыдыр: $I_\nu(\lambda_к) = 0$, $к = 1, 2, \ldots$. Биз әввәлләр (XXXVII, § 10) көстәрмишик ки, $I_\nu(x)$ Бессел функсијасы үчүн

$$\int_0^1 x\, I_\nu(\lambda_к x)\, I_\nu(\lambda_j x)\, dx =$$

$$J = \begin{cases} 0, & к \neq j \text{ олдугда} \\ \frac{1}{2}\left\{[I'_\nu(\lambda_к)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_к^2}\right)[I_\nu(\lambda_к)]^2\right\}, & к = j \text{ олдугда} \end{cases}$$

мүнасибәти доғрудур. Бу көстәрир ки,

$$I_\nu(\lambda_1 x),\ I_\nu(\lambda_2 x),\ \ldots,\ I_\nu(\lambda_к x),\ \ldots \tag{3}$$

Бессел функсијалары системи $[0, 1]$ парчасында x чәкисинә көрә ортогоналдыр.

Бир чох мәсәләләрин һәллиндә, хүсусилә ријази физика тәнликләрини һәлл едәркән, верилмиш функсијаны там систем тәшкил едән (3) Бессел функсијалары үзрә Фурје сырасына ајырмаг тәләб олунур. $[0, 1]$ парчасында мүәјјән шәртләри өдәјән функсијалары (3) Бессел функсијалары үзрә Фурје сырасына ајырмаг олар.

Тутаг ки, $[0, 1]$ парчасында интеграллананан $f(x)$ функсијасы (3) Бессел функсијалары үзрә Фурје сырасына ајрылмышдыр:

$$f(x) = \sum_{к=1}^{\infty} C_к I_\nu(\lambda_к x). \tag{4}$$

Онда бу ајрылышын әмсаллары

$$C_к = \frac{\int_0^1 x\, f(x)\, I_\nu(\lambda_к x)\, dx}{\int_0^1 x\, [I_\nu(\lambda_к x)]^2\, dx}, \quad к = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

дүстуру илә һесабланыр.

(4) сырасына $f(x)$ функсијасынын *Фурје—Бессел сырасы*, (5) әдәдләринә исә *Фурје—Бессел әмсаллары* дејилир.

Фурје—Бессел сырасынын $f(x)$ функсијасынын өзүнә јығылдығы мә'лум олмадыгда (4) әвәзинә

$$f \sim \sum_{к=1}^{\infty} C_к I_\nu(\lambda_к x) \tag{6}$$

кими јазырлар.

Фурје—Бессел сырасынын јығылмасы һаггында ашағыдакы теореми сөјләмәк олар:

Теорем. ***Тутаг ки, $f(x)$, $[0, 1]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәјән вә һиссә-һиссә һамар функсијадыр. Онда онун (6) Фурје—Бессел сырасы һәр бир $x \in (0, 1)$ нөгтәсиндә $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$ чәминә јығылыр.***

Хүсуси һалда, $f(x)$ функсијасы $x \in (0, 1)$ нөгтәсиндә кәсилмәз олдугда (6) сырасы һәмин нөгтәдә функсијанын өзүнә јығылыр, јә'ни (4) бәрабәрлији доғру олур.

§ 14. ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЈЕ СЫРАЛАРЫНЫН ӘДӘДИ ОРТА ГИЈМӘТ УСУЛУ ИЛӘ ЧӘМЛӘНМӘСИ

Тутаг ки, $f(x)$, бүтүн әдәд охунда тә'јин олунмуш, кәсилмәјән вә 2π дөврлү функсијадыр, јә'ни $f \in C^*$. Белә функсијалар өз

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_\kappa \cos \kappa x + b_\kappa \sin \kappa x) \tag{1}$$

Фурје сыралары илә биргијмәтли тә'јин олунур. Бу о демәкдир ки, ејни Фурје сырасы олан ики $f \in C^*$ вә $\varphi \in C^*$ функсијалары ејниликлә бәрабәрдир (§ 7). Лакин кәсилмәјән функсијанын Фурје сырасы ајры-ајры нөгтәләрдә вә һәтта һесаби нөгтәләр чохлуғунда дағыла биләр. Буна көрә дә кәсилмәјән функсијалары өз Фурје сыраларынын чәми, јә'ни сыранын хүсуси чәмләринин лимити кими тапмаг һәмишә мүмкүн дејилдир.

Бәс онда Фурје сырасы мә'лум олан кәсилмәјән функсијаны нечә тапмаг олар?

Бу мәсәлә, ашағыда исбат етдијимиз Фејер[1] теореми васитәсилә һәлл олунур.

Тутаг ки, $S_\kappa(x)$ вә $D_\kappa(x)$ $(\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$ илә (1) сырасынын ујғун олараг хүсуси чәмләри вә Дирихле нүвәси ишарә олунмушдур. Онларын

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}, \tag{2}$$

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_n(x)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

кими һесаби орталарыны дүзәлдәк.

(2) ифадәсинә f функсијасынын n-тәртибли *Фејер чәми*, (3) ифадәсинә исә онун n-тәртибли *Фејер нүвәси* дејилир.

Фурје сырасынын n-чи хүсуси чәми үчүн § 8-дә алдығымыз

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u + x)\, D_n(u)\, du \tag{4}$$

дүстуруну (2) бәрабәрлијиндә нәзәрә алдыгда n-тәртибли Фејер чәми

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + u)\, \Phi_n(u)\, du \tag{5}$$

шәклиндә јазылыр. Дирихле нүвәсинин орада көстәрилән

$$D_n(u) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}}$$

[1] Л. Фејер (1880—1959) мачар ријазијјатчысыдыр.

ифадәсинә әсасән

$$(n+1)\,\Phi_n(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} D_\kappa(u) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{\sin \frac{2\kappa+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cdot \sin \frac{2\kappa+1}{2} u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{\cos \kappa u - \cos (\kappa+1) u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \cos (n+1) u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} u}{\sin^2 \frac{u}{2}}$$

бәрабәрлији вә бурадан да n-тәртибли Фејер нүвәси үчүн

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} u}{\sin^2 \frac{u}{2}} \tag{6}$$

дүстуру алыныр. Дирихле нүвәсинин § 8-дә көстәрилән (7) ифадәсинә әсасән Фејер нүвәси үчүн

$$\Phi_n(u) = 1 + 2 \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{n+1-\kappa}{n+1} \cos \kappa u \tag{7}$$

ифадәсини алмаг олар. Буна әсасән Фејер чәмини

$$\sigma_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{n+1-\kappa}{n+1} (a_\kappa \cos \kappa x + b_\kappa \sin \kappa x) \tag{8}$$

кими дә јазмаг олар. Бу көстәрир ки, n-тәртибли Фејер чәми n-тәртибли тригонометрик чохһәдлидир.

(6) вә (7) дүстурларындан Фејер нүвәсинин ашағыдакы хассәләри алыныр:

1) u-нун бүтүн гијмәтләриндә $\Phi_n(u) \geqslant 0$,

2) $\Phi_n(u)$ чүт, кәсилмәјән вә дөври (2π дөврлү) функсијадыр,

3) $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\, du = 1 \tag{9}$$

бәрабәрлији доғрудур (бу (7) бәрабәрлијиндән асанлыгла алыныр).

4) Истәнилән $0 < \delta < \pi$ әдәди үчүн

$$\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(u)\, du \leqslant \frac{1}{n+1} \int_{\delta}^{\pi} \frac{du}{\left(\sin \frac{\delta}{2}\right)^2} = \frac{\pi - \delta}{(n+1)\left(\sin \frac{\delta}{2}\right)^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

мүнасибәти өдәнилир.

(5) вә (9) бәрабәрликләринә әсасән

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x)]\, \Phi_n(u)\, du \quad (10)$$

ифадәси алыныр.

Теорем (Фејер). ***Истәнилән $f \in C^*$ функсијасынын $\{\sigma_n(f, x)\}$ Фејер чәмләри ардычыллығы бүтүн әдәд охунда $f(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылыр, јә'ни***

$$\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_C \to 0 \quad (n \to \infty) \quad (11)$$

мүнасибәти өдәнилир.

Исбаты. $f(x)$ функсијасы мүнтәзәм кәсилмәјән олдуғундан онун $\omega(f; \delta) = \sup_{0<|u|<\delta} \|f(x+u) - f(x)\|_C$ кәсилмәзлик модулу үчүн $\omega(f; \delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$ мүнасибәти доғрудур (XXVI, § 8). Онда ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta_0 > 0$ вар ки, $0 < \delta < \delta_0$ олдугда $\omega(f; \delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ бәрабәрсизлији өдәнилир.

Бундан башга, $f(x)$ функсијасы кәсилмәјән олдуғундан мәһдуддур: $|f(x)| \leqslant M$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Беләликлә, (10) бәрабәрлијиндән, интегралы үч һиссәјә бөлмәклә

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+u) - f(x)|\, \Phi_n(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) \leqslant \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(u)\, du + \omega(f; \delta) \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(u)\, du \leqslant \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(u)\, du + \omega(f; \delta) \quad (12)$$

мүнасибәти алыныр.

4) хассәсинә көрә ихтијари $\varepsilon > 0$ үчүн елә N вар ки, n-ин $n \geqslant N$ гијмәтләриндә

$$\frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(u)\, du < \frac{\varepsilon}{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда $0 < \delta < \delta_0$ вә $n \geqslant N$ олдугда x-ин бүтүн гијмәтләриндә (12) мүнасибәтиндән

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији алыныр ки, бу да теоремин доғру олдуғуну көстәрир.

Фејер теореминдән бир сыра мүһүм нәтичәләр алыныр.

Нәтичә 1. ***Тригонометрик функсијалар системи $C^*[-\pi, \pi]$ фәзасында тамдыр.***

Доғрудан да, һәр бир $f \in C^*[-\pi, \pi]$ функсијасыны бүтүн әдәд охуна дөври (2π дөврлү) давам етдирмәк олар вә Фејер теореминә көрә һәр бир дөври функсија $C^*[-\pi, \pi]$ фәзасынын нормасында $\{\sigma_n\}$ тригонометрик чохһәдлиләр (Фејер чәмләри) ардычыллығынын лимитидир.

Бу нәтичә әввәлләр башга үсулла исбат едилмишдир (§ 7).

Кәсилмәјән функсијалар чохлуғунун $L_2[-\pi, \pi]$ фәзасында һәр јердә сых олмасындан вә сөјләдијимиз нәтичәдән чыхыр ки, тригонометрик функсијалар системи $L_2[-\pi, \pi]$ фәзасында тамдыр.

Нәтичә 2. Тригонометрик функсијалар системи $L_2[-\pi, \pi]$ фәзасында тамдыр.

Фејер теореминдән, китабын I чилдиндә сөјләдијимиз Вејерштрасын 2-чи теореминин (XIX, § 9) доғрулуғу да алыныр.

Нәтичә 3. (Вејерштрасын 2-чи теореми). Әкәр $f(x)$ функсијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјән вә $f(-\pi) = f(\pi)$ шәртини өдәјән, јә'ни $f \in C^*[\pi, \pi]$ олан функсијадырса, онда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $T(x)$ тригонометрик чохһәдлиси вар ки, x-ин $[-\pi, \pi]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad (13)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Доғрудан да, һәр бир $f \in C^*[-\pi, \pi]$ функсијасы үчүн ахтарылан $T(x)$ чохһәдлиси олараг һәмин функсијанын $\sigma_n(f, x)$ Фејер чәмини көтүрмәк олар.

Бурадан ајдындыр ки, Вејерштрас теореминдә һәр бир $f \in C^*[-\pi, \pi]$ функсијасы үчүн (13) шәртини өдәјән тригонометрик $T(x)$ чохһәдлисинин анчаг варлығы көстәрилдији һалда Фејер теореминдә верилмиш функсија үчүн (13) бәрабәрсизлијини өдәјән конкрет чохһәдли көстәрилир. Бу мә'нада, Фејер теореми Вејерштрас теореминдән „күчлүдүр".

Вејерштрасын 2-чи теореминин доғрулуғундан онун ашағыдакы 1-чи теореминин (XIX, § 9) доғрулуғу да алыныр:

Вејерштрасын 1-чи теореми: ***Әкәр $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјәндирсә, онда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә чәбри $P(x)$ чохһәдлиси вар ки, x-ин $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә***

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (14)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Исбаты. $[a, b]$ парчасыны $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$ хәтти функсијасы васитәсилә $[0, \pi]$ парчасына ин'икас етдирдикдә $f(x)$ функ-

сијасы $[0, \pi]$ парчасында кәсилмәјән

$$f(x)=f\left[a+\frac{t(b-a)}{\pi}\right]=\varphi(t)$$

функсијасына чеврилир. $\varphi(t)$ функсијасыны $\varphi(t)=\varphi(-t)$ шәртилә әввәлчә $[-\pi, 0)$ областына, сонра да бүтүн әдәд охуна дөври давам етдирсәк, онда C^* синфинә дахил олан функсија аларыг. Бу функсија вә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн Вејерштрасын 2-чи теореминә көрә елә $T(t)$ тригонометрик чоxһәдлиси вар ки, t-нин бүтүн гијмәтләриндә

$$|T(t)-\varphi(t)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (15)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

$\sin \kappa t$ вә $\cos \kappa t$ $(\kappa=1, 2, \ldots)$ функсијалары әдәд охунун истәнилән сонлу парчасында мүнтәзәм јығылан гүввәт сырасына ајрылдығындан (XXXVII, § 6), онларын хәтти комбинасијасы олан $T(t)$ чоxһәдлиси дә бүтүн әдәд охунда јығылан гүввәт сырасына ајрылыр:

$$T(t)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} C_\kappa t^\kappa.$$

Тутаг ки, бу сыранын

$$|T(t)-S_n(t)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad 0\leqslant t\leqslant\pi \qquad (16)$$

бәрабәрсизлијини өдәјән хүсуси чәми $S_n(t)$ илә ишарә едилмишдир (бу һәмишә мүмкүндүр!). Онда (15) вә (16) бәрабәрсизликләриндән

$$|\varphi(t)-S_n(t)|<\varepsilon, \quad 0\leqslant t\leqslant\pi \qquad (17)$$

мүнасибәти, бурадан да t-ни $t=\frac{x-a}{b-a}\pi$ илә әвәз етдикдә x-ин $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә доғру олан

$$\left|f(x)-S_n\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)\right|<\varepsilon$$

бәрабәрсизлији алыныр. $S_n\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)=P(x)$ n-дәрәчәли чәбри чоxһәдли олдуғундан (14) бәрабәрсизлијинин өдәнилмәси, јә'ни теоремин доғрулуғу ајдындыр.

Нәтичә 4.

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \qquad (18)$$

функсијалар системи $C[a, b]$ фәзасында, јә'ни $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијалар фәзасында тамдыр.

Нәтичә 5. (18) функсијалар системи $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијаларын $L_2^{(C)}[a, b]$ фәзасында тамдыр.

Доғрудан да, һәр бир $f\in L_2^{(C)}[a, b]$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олдуғундан 4-чү нәтичәјә көрә ихтијари $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $P(x)$ чәбри чоxһәдлиси вар ки,

$$|f(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}, \quad a\leqslant x\leqslant b$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан

$$\|f(x)-P(x)\|_{L_2^{(C)}}=\sqrt{\int_a^b [f(x)-P(x)]^2\,dx}<\varepsilon$$

бәрабәрсизлији алыныр. Бу да нәтичәнин доғру олдуғуну көстәрир.

III ҺИССӘ

БИРДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛ ҺЕСАБЫ

XXI ф ә с и л. **Гејри-мүәјјән интеграл**

XXII ф ә с и л. **Мүәјјән интеграл**

XXIII ф ә с и л. **Мүәјјән интегралын тәтбигләри**

XXIV ф ә с и л. **Гејри-мәхсуси интеграллар**

IV ҺИССӘ

ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАЛАРЫН ДИФЕРЕНСИАЛ ҺЕСАБЫ

XXV ф ә с и л. **Чохөлчүлү фәзада нөгтәләр чохлуғу**

XXVI ф ә с и л. **Чохдәјишәнли функсија. Онун лимити вә кәсилмәзлији**

XXVII ф ә с и л. **Чохдәјишәнли функсијанын төрәмәси вә диференсиалы**

XXVIII ф ә с и л. **Гејри-ашкар функсијалар вә онларын тәтбиги**

XXIX фәсил. **Чохдәјишәнли функсијаларын екстремуму**

V ҺИССӘ

АДИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

XXX фәсил. **Биртәртибли диференсиал тәнликләр вә онларын һәлли үсуллары**

XXXI фәсил. **Јүксәктәртибли диференсиал тәнликләр**

XXXII фәсил. **Диференсиал тәнликләр системи**

XXXIII фәсил. **Дајаныглыг нәзәријјәсинин елементләри**

XXXIV фәсил. **Диференсиал тәнликләрин әдәди вә тәгриби һәлли**

VI ҺИССӘ

СЫРАЛАР

XXXV фәсил. **Әдәди сыралар**

XXXVI фәсил. **Функсионал ардычыллыглар вә сыралар**

XXXVII фәсил. **Гүввәт сыралары**

XXXVIII фәсил. **Фурје сырасы**

Рашид Гамид оглы Мамедов

Доктор физико-математических наук, профессор

Курс высшей математики

II том

Учебник

(на азербайджанском языке)

Нәшријјат редактору *Е. Дадашова*

Бәдии редактору *У. Меһдијева*

Техники редактору *Ә. Рәһимов*

Корректорлары *С. Агајева, С. Асланова*

ИБ — 1183

Јығылмаға верилмиш 7/VIII 1981-чи ил. Чапа имзаланмыш 11/XII 1981-чи ил. Кағыз форматы 60×90¹/₁₆. Кағыз № 3. Латын гарнитуру. Јүксәк чап. Физики вә шәрти ч. в. 28,25. Шәрти рәнк-оттиск 640 мин. Учот нәшр. вәрәги 24,8. Сифариш № 407. Тиражы 22500. Чилддә гијмәти 95 гәп.

Азәрбајҹан ССР Дөвләт Нәшријјат Полиграфија вә Китаб Тиҹарәти Ишләри Комитәсинин „Маариф" Нәшријјаты, Бакы, Ә. Тағызадә, күчәси № 4.

Азәрбајҹан ССР Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тиҹарәти Ишләри Комитәсинин „Гызыл Шәрг" мәтбәәси, Бакы, Һәзи Асланов күчәси, № 80.

Азербайджанское государственное издательство учебно-педагогической литературы „Маариф", г. Баку, ул. А. Тагизаде № 4.

Типография им. „Красный Восток", Баку, ул. Ази Асланова, 80.

95 тәп.